
Stanford University Libraries
3 6105 000 663 174

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND 69.

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND 69.

DER GANZEN FOLGE 305. BAND.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

G. UND E. WIEDEMANN.

MIT ACHT FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1899.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Inhalt.

Neue Folge. Band 69.

Neuntes Heft.

Ausgegeben am 7. November 1899.

Zwölftes Heft.

Ausgegeben am 15. December 1899.

Nachweis zu den Figurentafeln.

1899. ANNALEN № 9.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 69.

1. *Dispersionsmessungen am Gyps;*
von Walter König.

Eine Untersuchung über Doppelbrechung, bei der die im weissen Lichte auftretenden Interferenzerscheinungen photographisch aufgenommen wurden, führte mich auf das Problem, die mittlere Wellenlänge des bei der Aufnahme wirksamen Strahlencomplexes zu bestimmen. Diese Aufgabe war für den vorliegenden Zweck am einfachsten dadurch zu lösen, dass man eine in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge bekannte Interferenzerscheinung photographirte und aus dem dabei erhaltenen Abstand der Interferenzstreifen einen Rückschluss auf die Wellenlänge machte. Um in den beiden zu vergleichenden Fällen möglichst gleichartige Verhältnisse zu haben, wurden die Interferenzen eines Gypskeiles zwischen gekreuzten und zwischen parallelen Nicols photographirt. Der Schluss auf die Wellenlänge setzt dann die Kenntniss der Dispersionsverhältnisse des Gypses voraus. Ist α der Winkel des Keiles, d der Streifenabstand für die Wellenlänge λ, und sind n_e und n_o die Brechungsexponenten für einen den Keil senkrecht durchsetzenden Lichtstrahl von der gleichen Wellenlänge λ, so ist

$$d = \operatorname{ctg} \alpha \, \lambda \, / \, (n_e - n_o) \, .$$

Man muss also zur Auswerthung der beschriebenen Versuche die Abhängigkeit der Differenz $n_e - n_o$ von der Wellenlänge kennen. Da die gebräuchlichen Gypskeile — die im Folgenden benutzten waren von der Firma Dr. Steeg und Reuter in Homburg — mit ihrer einen Fläche der Spaltungsebene des Gypses parallel geschliffen werden, so ist die in Betracht kommende Differenz des Brechungsexponenten sehr nahe gleich der Differenz $n_1 - n_3$ des grössten und des kleinsten Hauptbrechungsexponenten des Gypses. Für diese Brechungsexponenten liegen eine Reihe von Messungen für verschiedene Wellenlängen vor,

und es konnte daher zunächst der Versuch gemacht werden, diese älteren Messungen für den vorliegenden Zweck zu benutzen. Ich gebe in Tab. I eine Zusammenstellung über die Werthe der Differenz $n_1 - n_3$, wie sie sich aus den Messungen von v. Lang[1]), Quincke[2]), Dufet[3]) und Mülheims[4]) ergeben, und bemerke dazu, dass die Brechungsexponenten von v. Lang

Tabelle I.

Werthe von $n_1 - n_3$ nach den Messungen von

	λ	v. Lang	Quincke	Dufet	Mülheims
A	760	—	—	—	0,00864
a	719	—	—	—	0,00875
B	687	0,00982	—	—	0,00883
Li	671	—	—	0,00902	—
C	656	0,00982	0,00911	0,00905	0,00896
D	589	0,00966	0,00937	0,00916	0,00904
Th	535	—	—	0,00923	—
E	527	0,00986	0,00949	—	0,00916
b	517	—	—	—	0,00919
F	486	0,00972	0,00964	0,00932	0,00925
G	431	0,00986	0,00997	0,00948	—

und Dufet nach der Prismenmethode, von Quincke und Mülheims durch Totalreflexion gemessen worden sind; die Wellenlängen sind im Folgenden immer in Milliontel Millimetern gerechnet. Nachstehende Figur stellt diese vier Beobachtungsreihen graphisch dar. Die Zahlen von v. Lang zeigen einen sehr unregelmässigen Verlauf; diejenigen der drei anderen Beobachter lassen ein stetiges Ansteigen der Differenz mit abnehmender Wellenlänge erkennen. Einige Unregelmässigkeiten in der Gleichförmigkeit des Anstieges rühren wohl von der Unsicherheit der Beobachtungen her. Man kann sie eliminiren, indem man die Beobachtungen durch die Cauchy'sche Dispersionsformel darstellt:

$$n_1 - n_3 = a + b/\lambda^2 + c/\lambda^4.$$

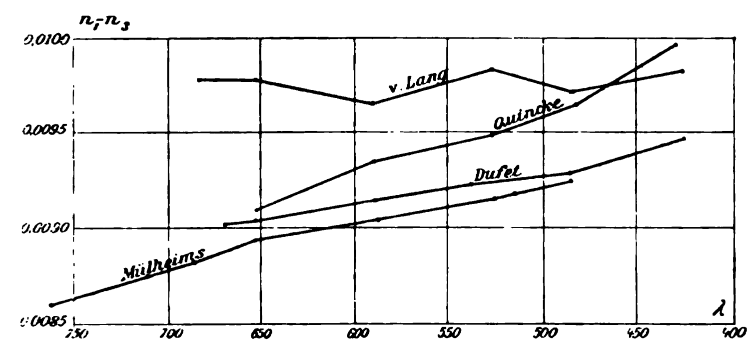
1) V. v. Lang, Sitzungsber. der k. Gesellsch. der Wissensch. zu Wien (2) **76.** p. 803. 1877.

2) G. Quincke, Festschr. d. naturf. Gesellsch. zu Halle 1879; Beibl. **4.** p. 124. 1880.

3) H. Dufet, Bull. Soc. Minér. **11.** p. 123—143. 1888; Beibl. **13.** p. 225. 1889.

4) A. Mülheims, Zeitschr. f. Krystall. **14.** p. 232. 1888.

V. v. Lang hat seine Beobachtungen für die einzelnen Brechungsexponenten nach dieser Formel dargestellt, indem er die Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelte. Man braucht nur die Constanten für den grössten und den kleinsten Hauptbrechungsexponenten voneinander abzuziehen, um die für die Darstellung der Differenz erforder-



lichen Constanten der obigen Formel zu erhalten. Für die drei anderen Beobachtungsreihen habe ich die Rechnung durchgeführt, und zwar wurden die Constanten für die Reihen von Quincke und Dufet aus drei einzelnen Beobachtungen, für diejenige von Mülheims nach der Methode der kleinsten Quadrate aus allen Beobachtungen berechnet. Tab. II enthält

Tabelle II.

Werthe der Constanten *a*, *b* und *c*, berechnet aus den Beobachtungen von

	a	*b*	*c*
v. Lang	0,01009	−193	$+ 27{,}79 \times 10^6$
Quincke	0,00834	+353	$- 9{,}32 \times 10^6$
Dufet	0,00865	+184	$- 5{,}24 \times 10^6$
Mülheims	0,00772	+686	$- 77{,}66 \times 10^6$

als Ergebniss dieser Rechnungen die Werthe der drei Constanten *a*, *b* und *c* für die vier verschiedenen Beobachtungsreihen. Inwieweit sich die letzteren durch die genannte Formel mit Hülfe der angegebenen Constanten darstellen lassen, zeigt Tab. III; sie enthält die berechneten und die beobachteten Werthe und die Differenzen zwischen beiden. Die Uebereinstimmung zwischen Berechnung und Beobachtung ist nament-

Tabelle III.

Vergleichung der berechneten und beobachteten Werthe von $n_1 - n_3$ nach den Beobachtern:

1. v. Lang				3. Dufet			
	ber.	beob.	Diff.		ber.	beob.	Diff.
B	0,00981	0,00982	+ 1	*Li*	0,00903	0,00902	−1
C	0,00979	0,00982	+ 3	*C*	0,00905	0,00905	—
D	0,00977	0,00966	−11	*D*	0,00914	0,00916	+2
E	0,00976	0,00986	+10	*Th*	0,00923	0,00923	—
F	0,00977	0,00972	− 5	*F*	0,00934	0,00932	−2
G	0,00986	0,00986	0	*G*	0,00948	0,00948	—
2. Quincke				4. Mülheims			
C	0,00911	0,00911	—	*A*	0,00868	0,00864	−4
D	0,00928	0,00937	+ 9	*a*	0,00876	0,00875	−1
E	0,00949	0,00949	—	*B*	0,00883	0,00883	0
F	0,00967	0,00964	− 3	*C*	0,00890	0,00896	+6
G	0,00997	0,00997	—	*D*	0,00905	0,00904	−1
				E	0,00918	0,00916	−2
				b	0,00920	0,00919	−1
				F	0,00923	0,00925	+2

lich für die Reihen von Dufet und Mülheims eine ganz befriedigende. Grössere Abweichungen zeigt die Reihe von v. Lang. Sie ist aber gegenüber den drei anderen vor allem dadurch ausgezeichnet, dass die Berechnung ein ganz abweichendes Verhalten der Differenz $n_1 - n_3$ zur Wellenlänge ergiebt; diese Differenz nimmt erst ab und dann wieder zu. In den Werthen der Constanten drückt sich diese Verschiedenheit dadurch aus, dass b und c für die v. Lang'sche Reihe das entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie für die drei anderen Reihen. Diese letzteren stimmen im Gang der Erscheinung, dem Vorzeichen der Constanten überein; die absoluten Beträge der Constanten dagegen zeigen beträchtliche Verschiedenheiten. Auch die Figur liess von vornherein erkennen, dass die drei Reihen sich um Beträge voneinander unterscheiden, die offenbar grösser als die Beobachtungsfehler sind. Aus diesen Abweichungen wird man demnach auf eine gewisse Verschiedenheit des in den drei Fällen benutzten Materiales schliessen müssen.

Unter diesen Umständen erschien die Uebertragung der älteren Dispersionsbestimmungen auf die von mir benutzten Gypskeile von zweifelhaftem Werthe. Ich habe es daher vorgezogen, die Dispersion der Doppelbrechung, d. h. die Abhängigkeit der Streifenbreite von der Wellenlänge, unmittelbar an den benutzten Gypskeilen selbst zu bestimmen. Dafür wurde das folgende, mit einfachen Mitteln und schnell zum Ziele führende Verfahren benutzt. Der zu untersuchende Gypskeil, der in üblicher Weise auf einer stärkeren Glasplatte als Unterlage aufgekittet und mit einem dünnen Glase überdeckt war, wurde auf einer in Glas geritzten Millimetertheilung befestigt und mit dieser vertical so aufgestellt, dass die Interferenzstreifen horizontale Lage hatten und die Theilstriche der Theilung ihnen parallel liefen. Sonnenlicht, durch Spiegel in horizontale Richtung geworfen, fiel durch ein polarisirendes Nicol'sches Prisma auf den Gypskeil, hinter diesem in grösserer Entfernung auf das analysirende Nicol'sche Prisma und unmittelbar hinter diesem auf einen Projectionskopf, der ein stark verkleinertes Bild der Millimeterscala und der Interferenzerscheinung zugleich auf dem Spalt eines Spectralapparates entwarf. Der Abstand des Keiles von dem Projectionskopfe betrug etwa 66 cm, der des Spaltes 18 cm. Die Ausführung dieser Versuchsanordnung setzt die Anwendung grosser Nicols voraus, die den ganzen Keil oder wenigstens einen grösseren Theil auf einmal zu projiciren gestatten; die von mir benutzten, von Schmidt und Haensch für einen grossen Projectionsapparat angefertigten Prismen hatten eine lange Diagonale von 4 cm Länge. Um eine vollständige Erhellung des Gesichtsfeldes zu erzielen, wurde vor dem polarisirenden Nicol noch eine schwache Convexlinse angebracht, die das Strahlenbündel auf den Projectionskopf concentrirte. Man könnte gegen diese Anordnung einwenden, dass dabei die den Gypskeil an verschiedenen Stellen durchsetzenden Strahlen nicht genau parallel waren, die Gangdifferenz also durch die Neigung der Strahlen verändert werden musste. Doch ist dagegen zu bemerken, dass bei dem gewählten grossen Abstande des Keiles von dem Projectionskopfe diese Differenzen in der Richtung der Strahlen nur sehr geringfügig sind; da die Ausdehnung des Gesichtsfeldes 28 mm betrug, so war die Neigung eines

Randstrahles gegen den Centralstrahl in der That nicht grösser als 1,2°. Ausserdem ist zu bedenken, dass von diesem ohnehin nur unbedeutenden Fehler alle Farben in nahezu gleicher Weise getroffen werden; der Einfluss dieses Umstandes auf die Darstellung der Dispersionsverhältnisse dürfte daher wohl zu vernachlässigen sein. Da der Spalt des Spectroskopes senkrecht zu den Interferenzstreifen verläuft, so erscheint das Spectrum durchzogen von schwarzen, im violetten Theile fast horizontal verlaufenden, nach dem Roth zu sich etwas aufwärts krümmenden Streifen. Ihr verticaler Abstand, gemessen längs einer der Fraunhofer'schen Linien des Spectrums, giebt die Streifenbreite für die Wellenlänge der betreffenden Linie. Der Abstand kann unmittelbar in Millimetern gemessen werden, da zugleich mit den Interferenzstreifen die Glasscala auf den Spalt projicirt wird. Das Spectrum erscheint infolgedessen von feinen horizontalen Linien durchzogen, den Bildern der Millimeterstriche; wurden die verticalen Abstände der Interferenzstreifen in dieser das ganze Spectrum durchziehenden Scala gemessen, so stellten die gefundenen Zahlen die Streifenabstände am Orte des Gypskeiles, in Millimetern ausgedrückt, dar.

Bei Anwendung directen Sonnenlichtes unter passender Abblendung durch rothes oder blaues Glas konnten in dieser Weise die Streifenabstände im ganzen Bereiche des sichtbaren Spectrums von A bis H schnell und mit grosser Schärfe ermittelt werden. Die Messungen sind an zwei Gypskeilen von verschiedenem Winkel ausgeführt, und die Ergebnisse in Tab. IV zusammengestellt. Für jede der angegebenen Linien wurde der Abstand der äussersten sichtbaren Streifen und die Zahl der zwischen ihnen liegenden Streifenintervalle sowohl für parallele wie für gekreuzte Nicols bestimmt. Tab. IV enthält in Columne 3 und 6 die Gesammtzahl der ausgemessenen Intervalle, d. h. die Summe der beiden, in den zwei Nicollagen beobachteten Zahlen, desgleichen in Columne 4 und 7 die Summe der beiden gemessenen Abstände in Millimetern; die mittlere Streifenbreite d in Columne 5 und 8 ist dann einfach durch Division der Zahlen der beiden vorhergehenden Columnen erhalten.

Um auch auf diese Messungen die oben benutzte Dis-

Tabelle IV.

Messung des Streifenabstandes d an 2 Gypskeilen.

	λ	1. Gypskeil Zahl der Streifen	Summe der d	d in mm	2. Gypskeil Zahl der Streifen	Summe der d	d in mm
A	760,4	24	47,8	1,992	7	45,6	6,51
a	718,6	26	48,4	1,862	7	42,6	6,09
B	687,0	27	48,0	1,778	8	46,3	5,79
C	656,3	29	48,9	1,686	9	49,6	5,51
D	589,4	33	49,4	1,497	10	48,8	4,88
E	527,0	38	50,2	1,321	12	51,8	4,32
F	486,1	41	49,6	1,210	13	51,4	3,95
G	430,7	48	50,8	1,057	15	52,0	3,47
H_1	396,6	52	50,4	0,969	16	50,2	3,14

Tabelle V.

Vergleichung zwischen Berechnung und Beobachtung.

	λ/d beob.	λ/d ber.	Diff.	d beob.	d ber.	Diff.
			1. Gypskeil.			
A	381,7	382,8	−1,1	1,992	1,986	+0,006
a	385,9	384,9	+1,0	1,862	1,867	−0,005
B	386,4	386,7	−0,3	1,778	1,777	+0,001
C	389,3	388,6	+0,7	1,686	1,689	−0,003
D	393,7	393,5	+0,2	1,497	1,498	−0,001
E	398,9	398,8	+0,1	1,321	1,321	0,000
F	401,7	402,5	−0,8	1,210	1,208	+0,002
G	407,5	407,4	+0,1	1,057	1,057	0,000
H_1	409,3	409,3	0,0	0,969	0,969	0,000
			2. Gypskeil.			
A	116,7	117,4	−0,7	6,51	6,47	+0,04
a	118,1	118,0	+0,1	6,09	6,09	0,00
B	118,7	118,5	+0,2	5,79	5,80	−0,01
C	119,1	119,0	+0,1	5,51	5,52	−0,01
D	120,8	120,3	+0,5	4,88	4,90	−0,02
E	122,1	121,9	+0,2	4,32	4,32	0,00
F	122,9	123,1	−0,2	3,95	3,95	0,00
G	124,3	124,9	−0,6	3,47	3,45	+0,02
H_1	126,4	126,0	+0,4	3,14	3,15	−0,01

persionsformel anwenden zu können, wurden zunächst aus den Beobachtungen die Werthe der Grösse λ/d berechnet. Diese ist nach der eingangs angeführten Formel der Differenz der Brechungsexponenten proportional, wird sich also durch eine Formel

$$\lambda/d = \alpha + \beta/\lambda^2 + \gamma/\lambda^4$$

darstellen lassen, deren Constanten sich von den Constanten a, b, c nur durch einen constanten Factor unterscheiden werden. Die Durchführung der Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergiebt folgende Werthe.

Für den ersten Gypskeil:

$$\frac{\lambda}{d} = 361,7 + \frac{13,962 \times 10^6}{\lambda^2} - \frac{1,0197 \times 10^{12}}{\lambda^4},$$

für den zweiten Gypskeil:

$$\frac{\lambda}{d} = 112,3 + \frac{3.3102 \times 10^6}{\lambda^2} - \frac{0.1796 \times 10^{12}}{\lambda^4}.$$

Wie weit sich die Beobachtungen durch diese Formeln darstellen lassen, lehrt Tab. V. Sie enthält nebeneinander erstens die aus den Beobachtungen gewonnenen und die nach obigen Formeln berechneten Werthe von λ/d, zweitens die direct beobachteten und die aus den berechneten Werthen von λ/d hergeleiteten „berechneten" Werthe von d. Die Columnen, welche die Differenzen enthalten, zeigen, dass diese im Ganzen ungleichmässig vertheilt und sehr gering sind; sie gehen für den ersten Keil nicht über 0,3, für den zweiten nicht über 0,6 Proc. hinaus. Am grössten sind die Abweichungen für das rothe Ende, besonders für die A-Linie; für diese waren aber auch die Ablesungen am ungenauesten, weil die Streifen diese Linie nicht senkrecht, sondern unter starker Neigung schnitten, und weil sie ausserdem über die A-Linie hinaus kaum noch zu verfolgen waren. Gleichwohl gehen auch diese Differenzen über die möglichen Beobachtungsfehler kaum hinaus. Wenn die grösste Differenz $d_{\text{beob.}} - d_{\text{ber.}}$ für den ersten Keil 0,006, für den zweiten 0,04 beträgt, so entspricht dieser Differenz für den „Mittelwerth der d" eine Differenz für die beobachtete „Summe der d" (vgl. Tab. IV) bei dem ersten Keil von $24 \times 0,006 = 0,144$ mm, bei dem zweiten Keil von $7 \times 0,04 = 0,28$ mm. Die beobachtete „Summe der d" ist

aber aus vier Ablesungen der Streifenlage auf der Millimetertheilung erhalten, und die einzelne Ablesung ist, namentlich am rothen Ende, höchstens auf 0,1 mm genau. Man kann also sagen, dass die Uebereinstimmung innerhalb der Fehlergrenzen eine vollkommene ist.

Um die hier gefundenen Dispersionsconstanten untereinander und mit denjenigen der älteren Beobachter vergleichen zu können, berechne ich noch die Verhältnisse β/α und γ/α, sowie b/a und c/a, und stelle sie in Tab. VI untereinander.

Tabelle VI.

Dispersionsconstanten:

Für den 1. Keil	$\frac{\beta}{\alpha} = 38\,602$	$\frac{\gamma}{\alpha} = -\ 2819 \times 10^6$
Für den 2. Keil	$\frac{\beta}{\alpha} = 29\,485$	$\frac{\gamma}{\alpha} = -\ 1600 \times 10^6$
Nach Quincke	$\frac{b}{a} = 42\,330$	$\frac{c}{a} = -\ 1118 \times 10^6$
Nach Dufet	$\frac{b}{a} = 21\,270$	$\frac{c}{a} = -\ 606 \times 10^6$
Nach Mülheims	$\frac{b}{a} = 88\,794$	$\frac{c}{a} = -10057 \times 10^6$

Im allgemeinen Verlaufe der Erscheinung, dem Vorzeichen der Constanten und der Grössenordnung, ist Uebereinstimmung zwischen den verschiedenen Beobachtern vorhanden. Im einzelnen aber sind die Abweichungen der Constanten voneinander beträchtlich grösser, als aus Beobachtungsfehlern folgen würde. Auch die beiden von mir untersuchten Keile zeigen merkliche Verschiedenheit. Sie könnten vielleicht auf einer Ungleichmässigkeit in der Orientirung der Keilflächen beruhen, die sich an den Präparaten nicht mehr controliren liess. Doch kann auch hier eine Verschiedenheit des Materiales vorliegen, da die beiden Keile zu ganz verschiedenen Zeiten von der Firma Dr. Steeg und Reuter bezogen wurden und daher sicherlich nicht aus demselben Stück geschnitten sind.

Ich komme endlich auf die im Eingang berührte Frage zurück, die die Veranlassung zu der vorliegenden Untersuchung gegeben hatte. Will man aus dem Streifenabstand für einen Strahlencomplex auf die mittlere Wellenlänge desselben schliessen, so würde es schwierig sein, aus der Formel zu

einem gegebenen d den Werth von λ zu ermitteln. Am einfachsten ist es, eine Tabelle über den Zusammenhang von d und λ zu berechnen und aus ihr mittels Interpolation zu gegebenem d das zugehörige λ zu entnehmen. Tab. VII ist eine

Tabelle VII.

Tabelle über den Zusammenhang von λ und d für die beiden Keile.

λ	1. Keil			2. Keil		
	d	Diff.	d/d_D	d	Diff.	d/d_D
800	2,100		1,402	6,838		1,396
		0,143			0,459	
750	1,957		1,306	6,379		1,302
		0,143			0,461	
700	1,814		1,211	5,918		1,208
		0,143			0,460	
650	1,671		1,116	5,458		1,114
		0,143			0,461	
600	1,528		1,020	4,997		1,020
		0,142			0,461	
550	1,386		0,926	4,536		0,926
		0,140			0,459	
500	1,246		0,832	4,077		0,832
		0,137			0,455	
450	1,109		0,740	3,622		0,739
		0,131			0,446	
400	0,978		0,653	3,176		0,648
		0,120			0,427	
350	0,858		0,573	2,749		0,561
		0,091			0,385	
300	0,767		0,512	2,364		0,483

derartige Tabelle für die beiden von mir untersuchten Keile. Sie enthält ausser λ und d noch die Werthe von d/d_D, d. h. des Verhältnisses der Streifenbreite d für die Wellenlänge λ zur Streifenbreite für die D-Linie. Diese letzteren Zahlen geben noch einmal in anderer Form einen Vergleich der beiden Keile miteinander. Auch könnte man sie, falls man die Verschiedenheit des Materiales vernachlässigen dürfte, benutzen, um aus Messungen der Streifenbreite an einem beliebigen Gypskeil Schlüsse auf die Wellenlänge zu machen. Innerhalb des ausgemessenen Spectralbereiches stimmen die Werthe von d/d_D für die beiden Keile sehr nahe überein. Bei Extrapolation in das Ultraviolett treten aber grosse Unterschiede auf. Allerdings stimmen auch hier beide Keile insofern überein, als sie zwischen den Wellenlängen 300 und 200 eine Umkehrung im Verlaufe der d-Werthe ergeben; doch liegen die berechneten Umkehrpunkte an verschiedenen Stellen des Spectrums, für den ersten Keil bei $\lambda = 272$ ($d = 0,747$), für

den zweiten bei $\lambda = 236$ ($d = 2{,}074$). Bei weiterer Extrapolation über diese Werthe hinaus zeigen die d mit abnehmender Wellenlänge eine starke Zunahme.

Um ein Beispiel für die Anwendung der Tab. VII zu geben, habe ich von den Interferenzstreifen der beiden Keile photographische Aufnahmen auf gewöhnlichen Schleussner'schen Trockenplatten gemacht. Die Keile waren dabei wieder auf der gläsernen Millimetertheilung befestigt, sodass im Bilde die Streifenbreite auf der mitphotographirten Scala unmittelbar in Millimetern abgelesen werden konnte. Eine grössere Anzahl von Streifen war allerdings bei der Breite des wirksamen Spectralbereiches nicht zu beobachten; von der vierten Ordnung an waren die Streifen schon ziemlich verwaschen; konnten an dem ersten Keil aber noch bis zur zehnten Ordnung verfolgt werden. Die Streifenbreite ergab sich für den ersten Keil zu 1,04 mm, für den zweiten zu 3,48 mm. Daraus würde als zugehörige Wellenlänge folgen für den ersten Keil 423, für den zweiten 433. Im Mittel würde demnach die mittlere Wellenlänge der Empfindlichkeitscurven der gewöhnlichen Trockenplatten 0,000 428 mm sein.

Frankfurt a. M., Inst. d. Physikal. Vereins, Juli 1899.

(Eingegangen 19. Juli 1899.)

---

2. *Ueber die elektrische Ladung elektrolytisch frisch hergestellter Gase*[1]; *von Wilhelm Kösters.*

Es ist eine seit langem wohl bekannte Thatsache, dass bei Regenfall oder an Wasserfällen die positive, normale Luftelektricität in eine negative übergeht. Lenard[2]) führte über diese Erscheinung die erste eingehendere Untersuchung aus und stellte fest, dass diese negative Elektrisirung der Luft immer dann eintritt, wenn fallende Tropfen oder ein Wasserstrahl auf ein Hinderniss treffen. Er erklärt die Erscheinung durch die einfache Annahme von Potentialdifferenzen zwischen Gasen und Flüssigkeiten. Der Vorgang ist dann folgender: Während des Tropfenfalles bildet sich zwischen Tropfen und Luft eine elektrische Doppelschicht (Wasser +, Luft −), die beim Auftreffen auf ein Hinderniss so schnell mechanisch zerrissen wird, dass die negative Elektricität der Luft sich mit der positiven des Wassers nicht ebenso schnell wieder vereinigen kann und von der Luft mit fortgenommen wird. Seit Lenard haben sich eine Reihe Forscher mit der Lenard'schen „Wasserfallelektricität" beschäftigt.[3]) Lord Kelvin war der erste, welcher eine Umkehrung des Phänomens ausführte, indem er Gasblasen durch Wasser treten liess und eine Elektrisirung des Gases und Wassers nach dem Austreten nachwies.[4])

Im Februarheft des „Philosophical Magazine" 1898 erschien nun eine Arbeit von John S. Townsend[5]) im Anschluss an

---

1) Auszug aus einer Bonner Inaugural-Dissertation.

2) Ph. Lenard, Wied. Ann. **46.** p. 584. 1892.

3) K. Wesendonck, Wied. Ann. **51.** p. 353. 1895; H. Usener, Bonner Diss. Juli 1895; J. J. Thomson, Phil. Mag. **37.** p. 341. 1895; Lord Kelvin, Magnus Maclean, Alexander Galt, Proc. Roy. Soc. **57.** p. 335. 1895; F. B. Kenrick, Zeitschr. f. physikal. Chem. **19.** p. 625. 1896; K. A. Holmgrem, Soc. physiograph. de Lund. April 1893. Nov. 1894; Magnus Maclean, Makita Goto, Phil. Mag. **30.** p. 148 bis 152. 1890.

4) Lord Kelvin etc., Proc. Roy. Soc. **57.** p. 335. 1895.

5) John S. Townsend, Phil. Mag. **45.** p. 125. 1898; Proc. Cambr. phil. Soc. **9.** p. 244—258. 1898.

eine frühere Arbeit, in welchen er nachweist, dass bei der Elektrolyse aufsteigende Gase eine elektrische Ladung mitführen, die bei verschiedenen Elektrolyten und Gasen verschieden war. Positive Ladung besass Wasserstoff und Sauerstoff aus der Elektrolyse von Schwefelsäure und Wasserstoff aus Kalilauge; negativ geladen waren Sauerstoff aus Kalilauge und Chlor aus Salzsäure. Eigenthümlich verhielt sich der Wasserstoff aus der Elektrolyse von Salzsäure. Bei Benutzung von Platinelektroden war er positiv; bei Benutzung frischer Kohleelektroden war er im Anfang ebenfalls positiv, wechselte nach wenigen Minuten Stromdurchgang seine Ladung und blieb sodann negativ. Durch diese Arbeiten veranlasst, hatte ich mir zur Aufgabe gemacht, den Ursprung dieser Ladung festzustellen. Nach einigen Voruntersuchungen kam uns der Gedanke, dass diese Elektricitätserregungen vielleicht nur eine Form der Lenard'schen Wasserfallelektricität seien, und damit entstand der Wunsch, diese Frage zu entscheiden. Die vorliegende Arbeit soll ein Beitrag zur Lösung derselben sein.

Townsend stellt über diese Ladungserscheinungen bei der Elektrolyse, ohne experimentell auf ihren Ursprung zurückzugehen, die Hypothese auf, dass die elektrolytischen Ionen aufsteigen, ohne ihre Ladung an die Elektrode abzugeben. Es müsste demnach Wasserstoff positive, Sauerstoff negative Elektricität mitführen. In der positiven Ladung des Sauerstoffes aus der Elektrolyse von Schwefelsäure und in dem Zeichenwechsel beim Wasserstoff aus der Elektrolyse von Salzsäure zwischen Kohleelektroden liegt jedoch ein Widerspruch gegen diese Hypothese. Dazu kommt, dass die Richtigkeit der Townsend'schen Hypothese eine Abweichung des Faraday'schen elektrolytischen Gesetzes bedeutete.[1]) Dies veranlasste mich, die Townsend'sche Hypothese zu verwerfen.

1. Die Versuche Townsend's habe ich in ihrem qualitativen Theil (so weit es den Zweck meiner Arbeit anging) wiederholt

---

1) Die Elektricitätsmengen, welche Wasserstoff aus Schwefelsäure bei einem Strome von 6 Amp. mitführte, waren, wie sich später zeigte, von der Grösse, dass sie (nach Berechnung) einen dauernden Strom von etwa der Ordnung 10^{-11} Amp. hätten erzeugen können, der sich eventuell galvanometrisch hätte nachweisen lassen. Ich hoffe, diesen Nachweis später führen zu können.

und ihre Resultate bestätigt gefunden. In Townsend's Arbeiten ist bereits erwähnt, dass mit steigender Temperatur des Elektrolyten die Ladung des Gases wächst.[1] Diese Zunahme mit der Temperatur habe ich an Wasserstoff aus der Elektrolyse von Schwefelsäure festzustellen versucht; ich bediente mich dazu des Apparates Fig. 1. Von dem Entwickelungs-

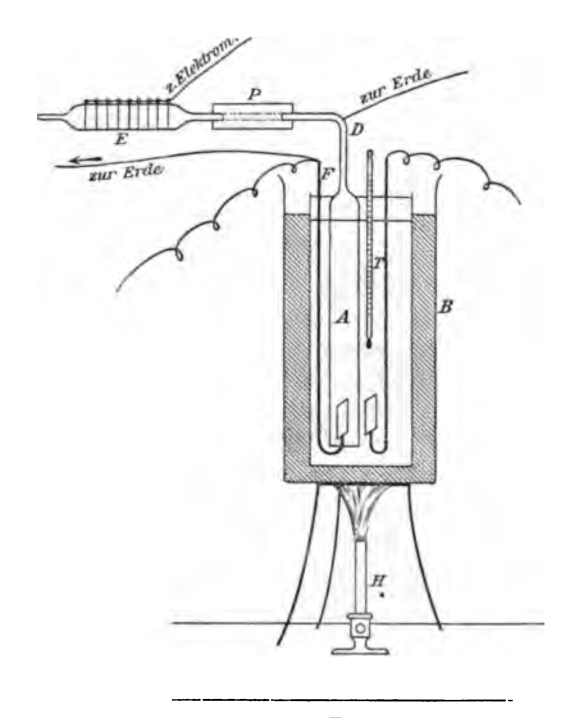


Fig. 1.

gefäss *A*, dessen Temperatur durch einen umgebenden Wasserbehälter constant gehalten wurde, wird der entwickelte Wasserstoff oder Sauerstoff mit Hülfe eines isolirenden Paraffinrohres durch eine weitere Röhre mit Metallgaze geführt, deren Ladung mit dem Elektrometer gemessen wurde. Bei den mit Wasserstoff und Sauerstoff aus Schwefelsäure durchgeführten Versuchen zeigte sich jedoch, dass die Grösse der Ladung des Gases noch von einer Reihe von uncontrolirbaren und nicht

1) Vgl. auch H. Usener, Bonner Diss. p. 35. Juli 1895.

zu beseitigenden Factoren abhing, die eine genauere Bestimmung der Abhängigkeit von der Temperatur vereitelten. Mit längerem Stromdurchgang nahm die erhaltene Ladung überhaupt in den meisten Fällen bis auf Null ab, was, wie sich experimentell zeigte, von Veränderungen in der Schwefelsäure herrührte.[1])

2. Die von den Gasen aus der Elektrolyse mitgeführten Elektricitätsmengen konnten noch etwa von einer Reibung des vom elektrolytischen Gase mitgeführten Flüssigkeitsstaubes an den Wänden der Fortleitungsröhren des Gases herrühren. Um diese Frage zu entscheiden, wurde die ganze Vorrichtung zur Fortleitung des Gases entfernt und direct über dem Entwickelungsgefäss ein Blatt feiner Messinggaze isolirt befestigt, welches der aus Schwefelsäure entwickelte Wasserstoff und Sauerstoff passiren musste. Auch in diesem Falle lud sich bei der Gasentwickelung die Gaze zunehmend positiv. Rührt die Ladung des Gases überhaupt von einem Vorgang zwischen Gas und Ableitungsrohr her, so muss dieses die zugehörige entgegengesetzte — negative — Elektrisirung annehmen. Angestellte Versuche zeigten indessen in jedem Falle positive Elektrisirungen des Auffangesystemes.

3. Die zur Gasladung gehörige, entgegengesetzte Elektricität fand sich vielmehr im Entwickelungsgefäss. Wurde nämlich dieses (mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt) mitsammt den Strom liefernden Accumulatoren und den Zuleitungen durch Paraffin vom Erdboden isolirt mit dem Elektrometer verbunden und der Strom geschlossen, so lud sich die ganze Vorrichtung negativ, also entgegengesetzt wie die aufsteigenden Gase (Wasserstoff und Sauerstoff +). Die Ladungen von Entwickelungsgefäss und Gas waren ausserdem *gleich* und entgegengesetzt. Bedeckte man das Entwickelungsgefäss mit Pappe oder besser gut anschliessendem Filz, so wurde der Ausschlag des Elektrometers fast unmerklich.[2]) Versuche mit Kalilauge und Salzsäure lieferten — auch im Vorzeichen — gleiche Resultate.

---

1) Vgl. Bonner Diss. des Verf. 1899. Ich vermuthe, dass diese Veränderung in der Bildung von Nebenproducten des Stromes Wasserstoffsuperoxyd, Ueberschwefelsäure etc. beruht.

2) Näheres vgl. die Diss. des Verf.

4. Zum Vergleich der Ladungserscheinungen bei der Elektrolyse mit der Lenard'schen Wasserfallelektricität wurde nun folgender Apparat construirt (Fig. 2): In einem Kipp'schen Apparat entwickelter Wasserstoff passirt zunächst die etwa 15 cm lange Röhre mit feuchter, festgepfropfter Watte *E*, welche mit der Erde verbunden ist. Diese dient dazu, das Gas zunächst vom Flüssigkeitsstaube — der von der Ent-

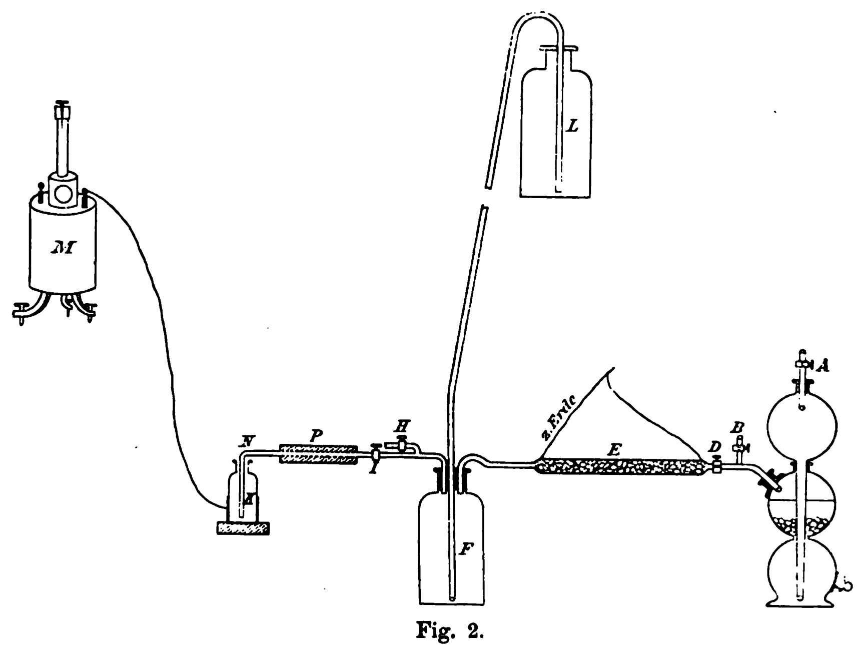


Fig. 2.

wickelung in dem Kipp'schen Apparat herrührt —, dann aber auch von seiner Ladung zu befreien.[1])

Es hatte sich herausgestellt, dass die von Gasentwickelungen stammenden Gase durch ein solches Filter vollständig entladen werden. Von dieser Watteröhre trat das Gas in die etwa 5 *l* haltende Sammelflasche *F* und konnte von da aus unter dem von der Wasser enthaltenden Flasche *L* gelieferten Druck durch Flüssigkeiten geblasen werden, was durch ein isolirtes Rohr mit feiner Spitze geschah. Die Flüssigkeiten

1) Der aus Zink und Schwefelsäure entwickelte Wasserstoff führt eine positive Ladung mit sich. Vgl. W. Hankel, Wied. Ann. 22. p. 387. 1884. Vgl. auch die Bonner Diss. des Verf. 1899.

befanden sich in dem isolirten Gefässe *K*, das mit dem Elektrometer verbunden war. Das Sicherheitsrohr des Kipp'schen Apparates war durch ein Rohr mit Hahn ersetzt, wodurch es möglich war, durch den Druck des sich entwickelnden Gases das in *F* befindliche Wasser etwa 2 m hoch bis *L* zu treiben. Es gingen nun die folgenden Operationen der Reihe nach vor sich:

Die Hähne *A* und *B* werden geöffnet, die Schwefelsäure im Kipp'schen Apparat sinkt herab; *A* und *B* werden geschlossen, *D* geöffnet. Der Wasserstoff strömt durch *E* in die Flasche *F* und drückt das in *F* befindliche Wasser nach *L*. An *F* befindet sich eine Marke, bis zu der man das Wasser in *F* sinken lässt. Jetzt wird *D* geschlossen und *A* geöffnet. Zum Versuch öffnet man den Hahn *J* und notirt den Ausschlag des Elektrometers. Wollen wir mit Sauerstoff arbeiten, so brauchen wir den Kipp'schen Apparat nur durch eine Sauerstoffbombe zu ersetzen. Die Spitze in *K* — auf deren Beschaffenheit es sehr ankommt, worauf ich noch näher eingehen werde — taucht immer zu gleicher Tiefe (3 cm) in die zu untersuchende Flüssigkeit. Das Gefäss *K*, etwa 7 cm hoch, besitzt einen ziemlich engen Hals, welcher etwa zur Hälfte von dem Rohre *N* ausgefüllt wird, um ein Umherspritzen der Flüssigkeit zu vermeiden.

Bevor wir den beschriebenen Apparat zu Messungen benutzen, müssen wir uns vergewissern, ob nicht durch etwaiges Umherschleudern der Flüssigkeit in *K* durch das durchströmende Gas eine bemerkbare Tropfensammlerwirkung eintritt. Dies können wir einfach dadurch constatiren, dass wir dem Gefäss *K* eine starke Ladung (2—5 Volt) mittheilen und beobachten, ob unter diesen Umständen beim Gebrauch derselben Lösung sich dieselbe Ladung beim Durchblasen zeigt, als ohne vorhergegangene Ladung des Gefässes. Eine Prüfung liess keinen Einfluss dieser vorher mitgetheilten Ladung zu Tage treten. Der Sicherheit halber wurde jedoch das Luftpotential häufig mit dem Tropfensammler untersucht; während der Versuche überstieg es niemals die Grösse von etwa + 2 bis 3 Volt.

Ausserdem versicherte ich mich häufig während der Versuche, dass der aus *F* kommende Wasserstoff keine Spur einer Ladung mehr zeigte, indem ich ihn gegen ein isolirtes Zink-

blech strömen liess; bei Einschaltung des Wattefilters habe ich niemals die geringste Ladung bemerkt, während er ohne Filter in allen untersuchten Fällen positive Ladung zeigte.

5. Es galt nun, mit diesem Apparat, den ich der Kürze halber als „Ausströmungsapparat" bezeichnen will, die Elektrisirungen mit denen bei der Elektrolyse — zunächst dem Vorzeichen nach — zu vergleichen. Es waren bei der Elektrolyse die Ladungsvorzeichen der Gase:

	Wasserstoff—Schwefelsäure	+
	Sauerstoff—Schwefelsäure	+
	Wasserstoff—Kalilauge	+
	Sauerstoff—Kalilauge	−
Platinelektroden	Wasserstoff—Salzsäure	+
	Chlor—Salzsäure	−
Kohleelektroden	Wasserstoff—Salzsäure	+ 0 −
	Chlor—Salzsäure	−

Im „Ausströmungsapparat" war Wasserstoff und Sauerstoff gegen Schwefelsäure positiv, wie bei der Elektrolyse.

Wasserstoff—Kalilauge war im einen wie im anderen Falle positiv.

Sauerstoff aus einer Bombe von Dr. Elkan fand sich dagegen im Ausströmungsapparat gegen Kalilauge positiv, in der Elektrolyse negativ.

Hier schien ein unlösbarer Widerspruch zu bestehen. Indessen existirt doch eine Verschiedenheit zwischen beiden Fällen, der Sauerstoff aus der Elektrolyse von Kalilauge enthält Ozon.

Um zu prüfen, ob das elektrolytische Gas auch im Ausströmungsapparat das verlangte Vorzeichen gebe, wurde der Sauerstoff aus der Elektrolyse von Kalilauge in die Sammelflasche *F* des Ausströmungsapparates geleitet (ohne Filter). Zunächst wurde seine Ladung festgestellt, indem ich ihn aus der Spitze des Apparates auf ein Zinkblech strömen liess, sie war, wie zu erwarten, stark negativ. Das Gefäss *K* wurde jetzt mit derselben Kalilauge gefüllt, die soeben bei der Elektrolyse gebraucht war, und der Apparat in Thätigkeit gesetzt. Das Resultat war, trotz der im Gase vorhandenen stark negativen Ladung, die zum grossen Theil an die Flüssigkeit überging, eine starke positive Ladung des Gefässes *K*, in Uebereinstimmung mit der Ladung des Gases bei der Elektrolyse. Diese

auffällige und prägnante Erscheinung macht es schon sehr wahrscheinlich, dass die bei Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten mit der Lenard'schen „Wasserfallelektricität“ identisch sind. Auffällig war hierbei auch die ausserordentlich grosse Ladung, die man mit diesem Gase aus der Elektrolyse im Ausströmungsapparat erhielt. Sie übertraf die von solchen Lösungen und gewöhnlichen Gasen erhaltenen Werthe um das 5—10fache. Ich werde später auf dieses Resultat zurückkommen.

Merkwürdig waren noch die Resultate, welche Townsend erhalten hatte, wenn er Salzsäure einmal zwischen Platin- einmal zwischen Kohleelektroden elektrolysirte. In Folgendem will ich diese Resultate kurz recapituliren. Benutzt man bei der Elektrolyse von Salzsäure Platinelektroden, so zeigt der Wasserstoff nach dem Aufsteigen positive, das Chlor negative Ladung. Auch nach längerem Stromdurchgang, wenn also die Salzsäure durch Platinchlorid und Chlor verunreinigt ist, wechselten diese ihr Vorzeichen nicht. Gebraucht man dagegen frische Kohleelektroden, so zeigt der aufsteigende Wasserstoff zuerst positive Ladung, die aber bald schwächer wird und schon nach wenigen Minuten Stromdurchgang in negative Ladung übergeht, die sodann bestehen bleibt. Das Chlor bleibt währenddessen negativ. Ich habe diese Versuche wiederholt und ihre Resultate bestätigt gefunden. Ich vermuthete zunächst, dass die Veränderung in der Salzsäure durch den Strom diese Wirkung hervorbrächte, da bei Platinelektroden Chlor und Platinchlorid, bei Kohleelektroden Chlor allein in der Lösung gebildet würde. Indessen zeigte sich bald, dass der Zeichenwechsel an die Elektroden gebunden war. Hatte man den Strom längere Zeit mit Platinelektroden durch Salzsäure gehen lassen, und setzte nun statt der Platinkathode eine schon gebrauchte — negative Ladung des Wasserstoffs gebende — Kohlekathode ein, so wurde der vorher positive Wasserstoff negativ. Wurde nun wieder die Platinkathode eingesetzt, so erschien die Ladung des aufsteigenden Wasserstoffs wieder positiv. Es zeigte sich ausserdem gewöhnlicher Wasserstoff im Durchströmungsapparat sowohl gegen die zwischen Platin- als auch Kohleelektroden elektrolysirt gewesene Salzsäure positiv. Leider und merkwürdigerweise gelang es mir nur bei

zwei Kohleelektrodenpaaren, den Zeichenwechsel hervorzubringen; sämmtliche von mir später benutzten frischen Kohleelektroden lieferten auch nach stundenlangem Durchgang von starken Strömen nur positive Ladung, welche langsam abnahm. Diese Erscheinung verhinderte mich, näher zu untersuchen, wie sich dieser Zeichenwechsel im Durchströmungsapparat verhielt; ich vermuthe, dass der elektrolytische Zeichenwechsel von Verunreinigungen des Wasserstoffs herrührt, die sich ja bei Kohleelektroden leicht bilden können. Der von den Platin- oder Kohleelektroden herrührende positive Wasserstoff zeigte auch im Ausströmungsapparat das entsprechende Vorzeichen. auch ergab sich hier wieder mit dem ohne Filter in die Sammelflasche geleiteten Wasserstoff eine aussergewöhnlich grosse Ladung. Ich hoffe, dass es mir später gelingen wird, den Zeichenwechsel zu beobachten, um die Untersuchung desselben im Ausströmungsapparat vornehmen zu können.

6. Bevor ich über die nunmehr angestellten quantitativen Versuche mit dem Ausströmungsapparat berichte, muss ich noch eines Umstandes oder Uebelstandes bei der Benutzung desselben erwähnen. Die Versuche mit diesem wurden immer in der Weise angestellt, dass der Hahn *J* plötzlich geöffnet und von diesem Punkte an eine Minute lang alle 15 Secunden der Stand des Elektrometers abgelesen wurde. Dabei trat die Erscheinung hervor, dass die in jeder Viertelminute erhaltenen Werthe mit der Dauer des Durchströmens abnahmen. Ich gebe hier ein Beispiel:

Es ergab sich bei Benutzung von Schwefelsäure specifisches Gewicht 1,202 und Wasserstoff:

Minuten	Ablenkung Scalentheile
0	0
$^1/_4$	5,2
$^1/_2$	4,0
$^3/_4$	3,3
1	2,7

Diese Abnahme rührt, wie eine nähere Untersuchung ergab, von zweierlei Umständen her.

Während des Versuches trat zunächst eine Verminderung des Druckes ein, unter dem der Wasserstoff ausströmte, da-

durch, dass das Wasser in dem die Gefässe *L* und *F* verbindenden Schlauch eine Reibung erfuhr und deshalb nicht so schnell nachströmen konnte, wie der Wasserstoff ausströmte[1]), ferner dadurch, dass die Höhendifferenz der beiden Wasserspiegel *L* und *F* durch das Hinabfliessen des Wassers vermindert wurde. Eine zweite Erscheinung, welche die Wirkung verminderte, war die Absorption von Wasserstoff in der Lösung während des Durchströmens. Das letztere, d. h. allgemein gesagt, eine Veränderung der Lösung zeigte sich schon dadurch, dass dieselbe Lösung, zum zweiten Male geprüft, kleinere Werthe ergab; ich werde später etwas ausführlicher darauf eingehen. Was die Druckverminderung angeht, so versuchte ich, ob constanter Ausströmungsdruck gleiche Werthe der Elektrisirung pro Zeiteinheit ergab. Zur Herstellung des constanten Druckes benutzte ich das Ausströmungsdruckregulirventil einer Elkan'schen Bombe mit dem sich nach vielen mühevollen Versuchen immer für einige Zeit constanter Ausströmungsdruck herstellen liess, wie mit einem Quecksilbermanometer geprüft wurde. Bei den Versuchen mit Wasserstoff ergab sich, dass unter Verwendung einer einige Minuten zu Versuchen gebrauchten, oder mit Wasserstoff gesättigten Lösung bei constantem Ausströmungsdruck in der Zeiteinheit gleiche Elektricitätsmengen erhalten wurden; andererseits ergab sich, dass bei Verwendung des Durchströmungsapparates mit solchen Lösungen und Wasserstoff in zwei aufeinanderfolgenden Versuchen gleiche elektrische Werthe erhalten wurden. — Bei dieser Gelegenheit habe ich zugleich den Einfluss des Druckes, unter welchem das Gas ausströmt, auf die erhaltene Elektricitätsmenge pro Zeiteinheit festgestellt.[2]) Es zeigte sich, dass diese mit Vergrösserung des Druckes ausserordentlich stark zunahm. Die Versuche wurden mit Schwefelsäure vom specifischen Gewicht 1,135 und Wasserstoff ausgeführt. Folgende Tabelle enthält

1) Dies wurde später durch einen weiten Schlauch vermieden, wodurch die pro Zeiteinheit erhaltenen Werthe bedeutend weniger differirten.

2) Die Geschwindigkeit des ausströmenden Gases nahm mit zunehmendem Drucke in noch geringerem Maasse zu, als wenn sich die Spitze in *K* wie eine Oeffnung in dünner Wand verhalten hätte. Die Ausströmungsgeschwindigkeiten von H_2, O_2, CO_2 verhielten sich bei constantem Druck wie 1 : 0,43 : 0,27.

die Resultate, die aus einer Reihe von Beobachtungen graphisch interpolirt wurden. Die zugehörige Curve zeigt Fig. 3, Abscissen sind die Drucke in cm Quecksilber, Ordinaten die erhaltenen Elektricitätsmengen in Scalentheilen in $^1/_4$ Minute:

Druck cm Hg	Scalentheile / $^1/_4$ Min.	Druck cm Hg	Scalentheile / $^1/_4$ Min.
0,0	0,00	7,0	3,17
1,0	0,15	8,0	3,96
2,0	0,43	9,0	4,89
3,0	0,85	10,0	5,97
4,0	1,30	11,0	7,45
5,0	1,83	12,0	9,55
6,0	2,45	13,0	12,75

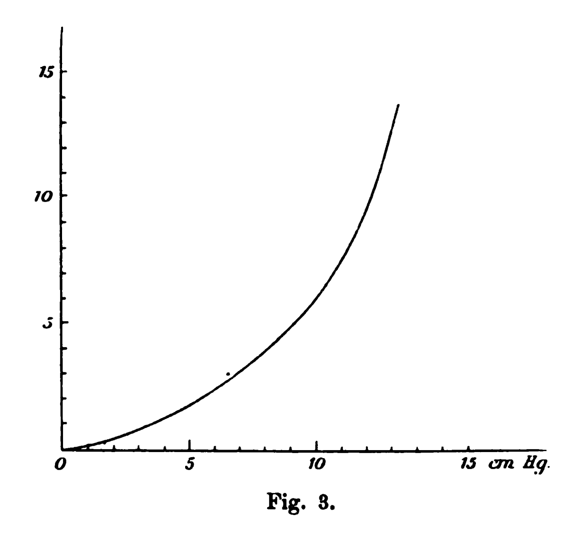


Fig. 3.

7. Ich schritt nun zur quantitativen Vergleichung der Erscheinung bei der Elektrolyse mit der des Durchströmungsapparates. Es liess sich erwarten, dass bei einem Bestehen der Identität zwischen Lenard'scher Wasserfallelektricität und „elektrolytischem Vorgang" die bei verschiedenen Lösungen und verschiedenen Temperaturen bei der Elektrolyse erhaltenen Werthe denen beim Durchströmen unter gleichen Verhältnissen erhaltenen proportional seien. Die erwartete Proportionalität zeigte sich jedoch nicht. Die Versuche wurden mit Schwefel-

säurelösungen vom specifischen Gewicht 1,3 und 1,137 durchgeführt. Es ergab sich:

		Elektrolyse: Scalentheile / Min.	Durchstr.: Scalentheile / Min.
H_2SO_4 specifisches Gewicht	1,3	4,69	15,92
H_2SO_4 „ „	1,137	15,00	11,64

Es besteht also nicht nur keine Proportionalität, sondern die Lösung von geringerem specifischen Gewicht liefert im Durchströmungsapparat geringere, in der Elektrolyse grössere Werthe als die concentrirtere Lösung. Es ist schwer, über die Erscheinung sich ein Urtheil zu bilden, ich vermuthe, dass bei der Elektrolyse besonders die Zähigkeit der Lösung eine grosse Rolle spielt. [1])

8. Bei einer Reihe von Versuchen, die ich nun mit dem Durchströmungsapparat und Wasserstoff anstellte, fand ich die meisten Lösungen gegen Wasserstoff negativ. Ausserordentliche variable, meist negative Werthe lieferte Alkohol. [2]) Lieferungen derselben Bezugsquelle aus verschiedenen Flaschen ergaben — wohl infolge von geringfügigen fremden Beimengungen — vollständig — auch im Vorzeichen — verschiedene Werthe. Unter anderen fand ich auch einen wässerigen Alkohol, welcher sich gegen Wasserstoff stark positiv verhielt. Dieser giebt uns ein vortreffliches Mittel an die Hand, zu erweisen, dass die bei der Elektrolyse erhaltene Ladung an der Oberfläche des Elektrolyten entsteht und von der Art der durchströmten Flüssigkeit abhängig ist. Wir schichten auf die zur Elektrolyse gebrauchte Schwefelsäure vorsichtig eine etwa 2 cm dicke Schicht dieses Alkohols, welche mit Magdalaroth gefärbt ist, nachdem wir uns überzeugt haben, dass die Färbung und ausserdem eine ziemlich starke Verunreinigung des Alkohols mit Schwefelsäure das Vorzeichen im Durchströmungsapparat nicht ändert. Schliessen wir nun den Strom, so geschieht folgendes: die aufsteigenden Wasserstoffblasen durchbrechen den Alkohol und vermengen ihn schon nach wenigen Secunden mit der Schwefelsäure. Diese

1) Vgl. über ähnliche Folgen W. Hankel, Wied. Ann. 22. p. 402. 1884.
2) Vgl. auch Ph. Lenard, Wied. Ann. 46. p. 628. 1892.

kurze Zeit genügt aber schon, dem im Anfange aufsteigenden Wasserstoff eine negative Ladung zu geben, welche nach kurzer Zeit wieder in die gewohnte positive übergeht. Untersuchen wir nun die benutzte Schwefelsäure im Durchströmungsapparat mit Wasserstoff, so finden wir auch hier positive Ladung des Wasserstoffs.

9. Ein Punkt war an dem Vorgange bei der Elektrolyse noch besonders auffällig, das war die auserordentliche Grösse der Ladungen im Verhältniss zu der verbrauchten Gasmenge, verglichen mit diesem Verhältniss beim Durchströmungsapparat.[1]) Auch die Annahme, dass infolge der feinen Vertheilung des Gases in der Elektrolyse bei gleichem Gasvolumen eine hundertmal so grosse Oberfläche beim Platzen der Blasen verschwindet als beim Ausströmungsapparat, reicht nicht vollständig hin, die grossen Ladungen bei der Elektrolyse zu erklären. Es war aber, wie schon früher bemerkt (5), aufgefallen, dass elektrolytische Gase oder Wasserstoff aus der Entwickelung durch Zink und Schwefelsäure, welche ohne Wattefilter in den Ausströmungsapparat geleitet wurden, daselbst ganz bedeutend grössere Elektricitätsmengen ergaben, wie filtrirte Gase.[2]) Da nun der bei der Entwickelung von Gasen aus Flüssigkeiten auftretende feine Flüssigkeitsstaub vom Wattefilter zurückbehalten wird, so lag es nahe, diesen für die Grösse der Wirkung bei der Elektrolyse verantwortlich zu machen. Eine genauere Beobachtung des Vorganges bei der Elektrolyse lässt zunächst erkennen, dass aus jeder an der Oberfläche der Flüssigkeit zerplatzenden Blase ein feines Wölkchen aufsteigt, während die Blase selbst beim Zerplatzen gröbere Flüssigkeitstheilchen umherschleudert. Es scheint daher, dass die Blasen schon beim Aufsteigen mit Flüssigkeitsstaub beladen sind, zum mindesten ist es plausibel,

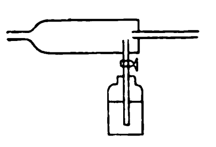
---

1) Die Elektricitätsmenge pro Einheit des Gasvolumens in der Elektrolyse übertraf denselben Werth bei dem Durchströmungsapparat um etwa das Tausendfache; genauere Zahlen anzugeben ist nicht möglich und zwecklos, da, wie wir in 6. gesehen haben, das Verhältniss Elektricitätsmenge : Gasmenge mit der Geschwindigkeit des Ausströmens bedeutend variirt, andererseits keine Proportionalität zwischen den beiden Erscheinungen bestand.

2) Vgl. auch Lord Kelvin, Proc. Roy. Soc. 57. p. 345. 1895.

dass ein grosser Theil des im elektrolytischen Gase suspendirten Staubes durch „Zusammenplatzen" der kleinen, sich an der Elektrode zunächst bildenden Bläschen entsteht.

Einen ähnlichen Flüssigkeitsstaub suchte ich nun in das Gas des Ausströmungsapparates zu bringen und dessen Einfluss auf die erhaltene Ladung festzustellen. Zu diesem Zwecke wurde zwischen Sammelflasche *F* und Wattefilter ein Zerstäuber eingeschaltet, wie Fig. 4 zeigt. Derselbe war in ein weites Rohr eingelassen, auf dessen Wandung die grösseren Tropfen aus dem Zerstäuber aufprallten, während der feinere Staub in die Sammelflasche eintrat. Das Gefäss *K* und der Zerstäuber sind zunächst mit derselben verdünnten Schwefelsäure gefüllt. Wir bringen nun etwas Flüssigkeitsstaub in die Sammelflasche, indem wir durch einen einzelnen Stoss mit Wasserstoff den Zerstäuber in Thätigkeit setzen. Wir füllen sodann die Flasche vollständig mit reinem staubfreien Wasserstoff. Lassen wir nun diesen durch die Schwefelsäurelösung in *K* strömen, so ergeben sich 10—40mal so grosse Ladungen als mit staubfreiem Wasserstoff. Vor dem Versuche wurde die Ladung des mit Staub versehenen Gases constatirt, indem ich es auf ein Zinkblech strömen liess, sie zeigte sich, wie zu erwarten war, positiv; trotz dieser Ladung lud sich die Schwefelsäure in *K* zu den erwähnten grossen Werthen negativ (H_2SO_4 spec. Gew. 1,2 bis 4—5 Volt in der Minute).[1] Die positive Ladung des Wasserstoffs, die von dem Zerstäuber herrührt, ist deshalb äusserst günstig, weil die starke beobachtete Ladung des Gefässes niemals der Zerstäuberwirkung zugeschrieben werden kann. Ganz ähnliche Ergebnisse liefert KOH-Staub in KOH-Lösung, Salzsäurestaub in Salzsäure, Wasserstaub etc., wobei es im allgemeinen gleichgültig ist, ob z. B. das Gas zum Durchblasen durch Schwefelsäure mit Schwefelsäurestaub oder etwa Salzsäurestaub versetzt wird.


Fig. 4.

Es giebt noch andere Mittel, Gase mit feinem Staube zu versehen, dazu gehört ein glühender Platindraht.[2] Wir

1) Vgl. die folgenden Tabellen (10).

2) Vgl. R. Nahrwold, Wied. Ann. 31. p. 467 ff. 1887.

schalten an Stelle des Zerstäubers eine Röhre ein, durch die ein Platindraht geschmolzen ist und lassen denselben beim Durchströmen des Wasserstoffs schwach roth glühen. Prüfen

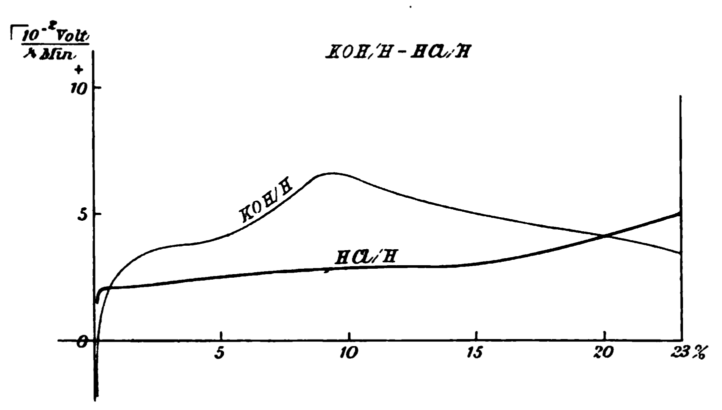


Fig. 5.

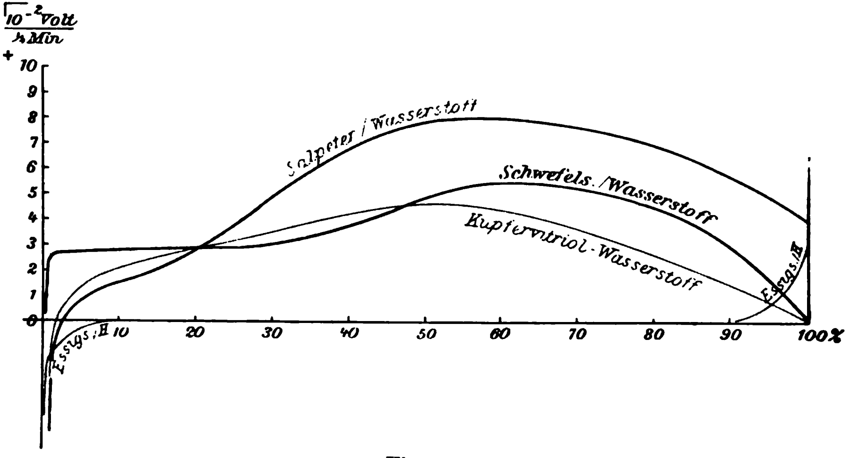


Fig. 6.

wir vor dem Versuche die Ladung des so behandelten Wasserstoffs, indem wir ihn aus der Sammelflasche auf ein Blech strömen lassen, so finden wir ihn für unsere Verhältnisse ausserordentlich stark positiv geladen [1]) (2—3 Volt in der

1) Vgl. J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 31. p. 123. 1887.

Minute bei ungefähr gleicher Ausströmungsgeschwindigkeit, wie bei den Durchblasungsversuchen); trotzdem ergab sich beim Durchströmen durch Schwefelsäure specifisches Gewicht 1,2 noch eine beträchtlich grössere negative Ladung, als mit staubfreiem Wasserstoff. Aehnliche Erscheinungen erhielt man auch bei den übrigen Lösungen. Füllte man *K* mit destillirtem Wasser — welches sich positiv ladet —, so erhielt man bei Anwendung von Wasserstoff mit Platinstaub ausserordentlich grosse Ausschläge (20 Volt pro Minute), da in diesem

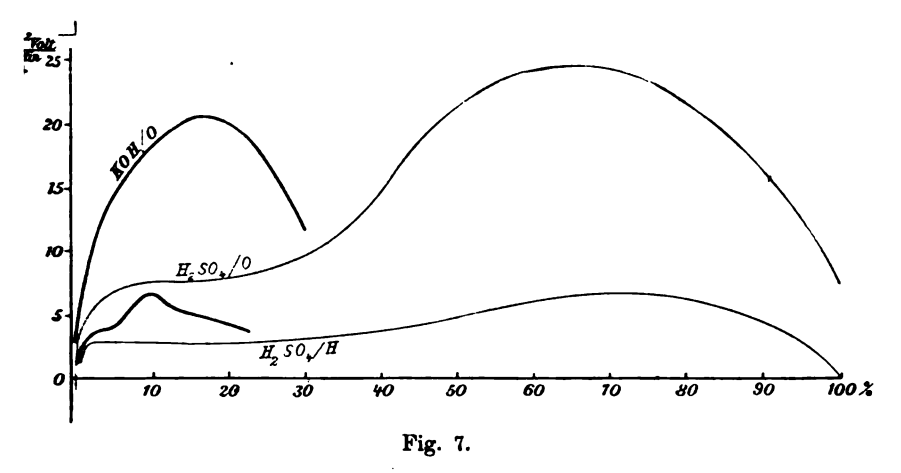


Fig. 7.

Falle die positive Ladung des Wasserstoffs durch Platinstaub sich zu der durch das Durchströmen erzeugten addirte.

10. Ich habe nun eine Reihe von Lösungen auf ihre elektrische Wirkung im Ausströmungsapparat gegen einfache reine Gase untersucht. Eine Anzahl derartiger Bestimmungen liegen schon vor, die jedoch zum grössten Theil mit Luft gemacht sind. Vor den Versuchen wurde die Ausströmungsspitze noch einmal einer gründlichen Prüfung unterzogen. Nach vielen Proben erwies sich eine Spitze von 0,3 mm Oeffnung als die günstigste. Grössere Oeffungen liessen das Gas zu heftig austreten, wodurch die Flüssigkeit leicht umhergeschleudert wurde, während kleinere Oeffnungen wegen des langsamen Gasdurchflusses weniger Elektricität lieferten. Bei den Versuchen wurde nach Oeffnung des Hahnes *J* immer eine Minute lang alle Viertelminute am Elektrometer eine

Ablesung gemacht; zu jedem neuen Versuche wurde in *K* frische Lösung eingefüllt, da wie erwähnt, durch Wasserstoffabsorption in der Lösung eine kleine Verminderung der Wirkung eintrat.[1]) Der mittlere Fehler der angegebenen Messungen beträgt 2 bis 3 Proc. Folgende Tabelle giebt die Resultate einiger besonders untersuchter Lösungen. Zur Construction der Curven wurde noch eine Anzahl anderer Lösungen untersucht, die nicht in der Tabelle enthalten sind. Unter „Proc.-Gehalt“ steht bei den Säuren der Gehalt der Gesammtlösung in Gewichtsprocenten wasserfreier Säure; bei Kalilauge der Gehalt in Gewichtsprocenten KOH, bei den Salzen der Gehalt an (bei 20°) gesättigter Lösung. Die Vorzeichen sind die der Gase.

I. Wasserstoff—Schwefelsäure (Fig. 6 u. 7).

Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\text{ Volt}}{1/4\text{ Min.}}$	Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\text{ Volt}}{1/4\text{ Min.}}$
0,000	− 145,10	16,14	+ 2,81
0,007	0,00	27,44	+ 3,05
0,015	+ 1,09	39,19	+ 3,75
0,030	+ 2,66	41,44	+ 3,84
0,97	+ 2,68	100,00	0,00

II. Wasserstoff — Kalilauge (Fig. 5 u. 7).

Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\text{ Volt}}{1/4\text{ Min.}}$	Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\text{ Volt}}{1/4\text{ Min.}}$
0,008	− 3,08	5,75	+ 4,48
0,015	− 0,66	9,20	+ 6,67
0,022	− 0,31	11,88	+ 5,76
0,34	+ 1,78	19,13	+ 4,33
2,35	+ 3,67	23,00	+ 3,50
4,60	+ 4,02		

III. Wasserstoff — Kupfersulfat (Fig. 6).

Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\text{ Volt}}{1/4\text{ Min.}}$	Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\text{ Volt}}{1/4\text{ Min.}}$
0,00	− 145,40	40,78	+ 4,32
1,80	0,00	41,31	+ 4,29
4,49	+ 1,19	66,67	+ 3,83
16,67	+ 2,64	100,00	0,00

1) Vgl. Abschnitt 6.

IV. Wasserstoff — Essigsäure (Fig. 6).

Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\ \text{Volt}}{^1/_4\ \text{Min.}}$	Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\ \text{Volt}}{^1/_4\ \text{Min.}}$
0,023	− 4,62	7,15	− 0,09
0,07	− 3,52	16,67	0,00
0,50	− 1,46	33,33	0,00
0,53	− 1,36	66,67	0,00
3,46	− 0,47	100,00	+ 2,74

V. Wasserstoff — Kalisalpeter (Fig. 6).

Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\ \text{Volt}}{^1/_4\ \text{Min.}}$	Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\ \text{Volt}}{^1/_4\ \text{Min.}}$
0,042	− 11,34	40,00	+ 6,77
1,15	− 0,93	50,00	+ 7,94
1,67	− 0,29	83,36	+ 6,58
7,69	+ 1,32	100,00	+ 3,98

VI. Wasserstoff — Salzsäure (Fig. 5).

Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\ \text{Volt}}{^1/_4\ \text{Min.}}$	Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\ \text{Volt}}{^1/_4\ \text{Min.}}$
0,004	0,00	5,52	+ 2,623
0,009	+ 1,16	5,59	+ 2,630
0,028	+ 2,06	7,45	+ 2,73
0,11	+ 2,07	11,18	+ 2,86
0,52	+ 2,12	13,04	+ 2,95
1,87	+ 2,24	22,36	+ 4,47

VII. Wasserstoff — Kochsalzlösung.

Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\ \text{Volt}}{^1/_4\ \text{Min.}}$	Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\ \text{Volt}}{^1/_4\ \text{Min.}}$
1,6	+ 0,62	33,33	+ 3,46
8,3	+ 1,72	50,00	+ 4,92
14,0	+ 2,05		

VIII. Wasserstoff — Bonner Leitungswasser.

$$-\,4{,}64\ \frac{10^{-2}\ \text{Volt}}{^1/_4\ \text{Min.}}\,.$$

IX. Sauerstoff — Schwefelsäure (Fig. 7).

Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\ \text{Volt}}{^1/_4\ \text{Min.}}$	Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\ \text{Volt}}{^1/_4\ \text{Min.}}$
0,00	− 75,77	13,81	+ 7,63
0,043	− 1,66	20,65	+ 8,11
0,206	+ 2,82	27,10	+ 9,02
0,449	+ 3,86	34,53	+ 11,36
0,52	+ 3,89	41,44	+ 16,19
0,95	+ 4,40	57,78	+ 23,93
6,91	+ 7,13	100,00	+ 7,73

X. Sauerstoff — Kalilauge (Fig. 7).

Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\text{ Volt}}{^1/_4\text{ Min.}}$	Proc.-Gehalt	$\frac{10^{-2}\text{ Volt}}{^1/_4\text{ Min.}}$
0,017	− 0,992	14,50	+ 20,47
0,44	+ 5,43	29,00	+ 12,46
4,92	+ 14,60		

XI. Sauerstoff — Kupfersulfatlösung.

13,18 Proc.-Gehalt, $+ 5{,}14\ \frac{10^{-2}\text{ Volt}}{^1/_4\text{ Min.}}$

XII. Sauerstoff — Salzsäure.

Spec. Gew. 1,124, $+ 11{,}714\ \frac{10^{-2}\text{ Volt}}{^1/_4\text{ Min.}}$

Das Verhältniss der Ausströmungsgeschwindigkeiten für Wasserstoff und Sauerstoff betrug 0,43. In den Tabellen fällt zunächst die Grösse der Wirkung des reinen Wassers gegen Wasserstoff auf, ausserdem die ausserordentliche Empfindlichkeit derselben gegen geringe Beimengung fremder Substanzen. Schon 0,007 Proc. Schwefelsäure machen die Wirkung zu Null, während allerdings von den Salzen verhältnissmässig viel grössere Mengen dazu nöthig sind. Destillirtes Wasser habe ich in zwei frischen Proben von derselben Firma untersucht, von denen die eine nur etwa die Hälfte der positiven Elektrisirung ergab als die andere. Der in der Tabelle mitgetheilte Werth ist der von letzterer Lösung, den ich durch vielmaliges sorgfältiges Reinigen und Ausspülen des Gefässes *K* erhielt, der grösste, welcher mit käuflichen destillirtem Wasser zu erzielen war. Nach etwa 3 monatlichem Stehen in der Flasche war der grosse Werth dieses Wassers etwa auf die Hälfte gesunken.

Von der Empfindlichkeit mancher Lösungen gegen einzelne schwache Verunreinigungen mögen auch folgendes Beispiel Zeugniss ablegen. Bei einer durch Kochen frisch hergestellten 50proc. Lösung von Kochsalz fand ich plötzlich die Wirkung fast gleich Null, während sie nach den vorhergehenden Versuchen etwa

$$5 \cdot \frac{10^{-2}\text{ Volt}}{^1/_4\text{ Min.}}$$

ergeben musste. Wie die Untersuchung bewies, rührte die Wirkungsabnahme von einem winzigen Partikelchen Siegellack

her, welches durch Zufall in die Kochflasche gelangt war, und von dem wahrscheinlich noch winzigere Theilchen in Lösung gegangen waren.

Ein sehr interessantes Beispiel dieser Empfindlichkeit einzelner Lösungen giebt J. J. Thomson[1]). Setzte man destillirtem Wasser Spuren von Rosanilin zu, so konnte man eine Aenderung in der elektrischen Wirkung gegen Luft schon wahrnehmen, ehe eine Färbung des Wassers erkennbar war.

Die Curven für die Wirksamkeit verschiedener Concentrationen anorganischer Säuren und Salze zeigen alle nahezu den gleichen Verlauf. Interessant ist noch die Eigenthümlichkeit, dass concentrirte Lösungen entweder den Werth Null ergeben, oder sich doch der Grenze Null nähern.[2])

11. Ausser diesen Bestimmungen habe ich nun noch an einer Lösung festgestellt, wie die Erscheinung im Durchströmungsapparat sich gegen Temperaturänderungen verhielt. Benutzt wurde hierzu Schwefelsäure, spec. Gewicht 1,300 und Wasserstoff. Die Lösung wurde gerade deshalb gewählt, weil sie sich gegen die im nächsten Abschnitt zu besprechende Absorption von Wasserstoff während des Versuches als sehr unempfindlich erwies. Es ergab sich bei diesen Versuchen, dass ein Temperatureinfluss innerhalb eines Intervalls von 15—75° nicht zu erkennen war. Der besseren Illustrirung halber und zugleich zur Beleuchtung der Fehlergrenzen des Apparates gebe ich hier einige Beobachtungsresultate direct:

Temperatur	Scalentheile 1/4 Minute		
15	11,8	11,9	11,9
19,5	12,2	11,8	—
29	12,0	12,0	11,8
45	11,8	11,7	12,3
60	11,9	—	—
73	11,8	11,9	—
76	11,9	12,3	—

12. Zuletzt will ich noch einige Beobachtungen besprechen, die sich auf die Aenderung der elektrischen Wirkung durch

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. 37. p. 343. 1894; Discharge of Electricity trough Gases p. 20. 1898.

2) Ueber diese Eigenthümlichkeit bei Luft vgl. J. J. Thomson, Phil. Mag. 37. p. 350. 1894; H. Usener, Bonner Diss. p. 38. 1895.

absorbirte atmosphärische Luft, Sauerstoff und Wasserstoff in der benutzten Lösung beziehen. Wie ich schon früher bemerkte, erhält man geringere Wirkung bei fast allen Lösungen, wenn man schon einmal zu Versuchen mit Wasserstoff gebrauchte Lösung zum zweiten Male benutzt. Ich vermuthete, dass diese Verminderung der Wirkung in der Absorption von Wasserstoff seinen Grund hatte. Die Versuche bestätigten dies. Eine von allen Gasen befreite 50 proc. Kochsalzlösung wurde mit Wasserstoff gesättigt und untersucht, sie ergab um rund 10 Proc. geringere Werthe, als gasfreie Lösung. Auf denselben Werth gelangt auch letztere, wenn man sie längere Zeit (2—3 Minuten genügen schon) im Ausströmungsapparat benutzt. Für Schwefelsäure, spec. Gewicht 1,3, war der Einfluss der Wasserstoffabsorption nicht mit Sicherheit zu constatiren. Sättigte man vor dem Versuche 50 proc. Kochsalzlösung mit atmosphärischer Luft, so ergaben sich in der ersten Minute des Durchströmens bedeutend grössere elektrische Werthe, als in den folgenden. Die mit solcher Lösung in den verschiedenen Minuten erhaltenen Werthe verhielten sich wie folgt:

1. Minute	2. Minute	3. Minute	4. Minute
1,35	1	0,99	0,99

Von der vierten Minute an blieb die Ladung constant. Ich denke mir, dass von dem durchströmenden Wasserstoff die gelöste Luft ausgetrieben und Wasserstoff absorbirt wird. Aehnlich wie Luftabsorption wirkte Sauerstoffabsorption. — Die besprochene Wirkung der Luftabsorption wird ausserordentlich gross, wenn man die zu den Versuchen gebrauchte Kochsalzlösung statt mit Luft zu schütteln, aus gleichen Theilen mit Luft gesättigten Wassers und concentrirter Kochsalzlösung zusammensetzt. (Das Verhältniss der in der ersten Minute erhaltenen Elektricitätsmenge zu der in der zweiten Minute erreichte den Werth 2 : 1). Wahrscheinlich wird durch diese Mischmethode eine übersättigte Lösung hergestellt, ich bin jedoch nicht in der Lage, ein bestimmtes Urtheil abzugeben, da die Absorption von Luft und anderen Gasen in solchen Salzlösungen noch nicht bestimmt ist. Genauere Untersuchungen über die Wirkung der Absorption von Gasen, besonders Sauerstoff, gedenke ich noch

anzustellen, da diese Erscheinungen für die Erklärung der Wechselbeziehungen zwischen Gasen und Flüssigkeiten fruchtbar zu werden versprechen.

Zum Schluss erfülle ich die angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Dr. Kayser sowie Hrn. Privatdocenten Dr. Hagenbach für ihre gütige Unterstützung und freundliche Antheilnahme an meiner Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 14. Juni 1899.

---

3. *Experimentelle und theoretische Untersuchung über das Selbstpotential*[1]; *von G. W. Patterson.*

§ 1. Einleitung.

Die vorliegende Untersuchung über das Selbstpotential ist in zwei Abschnitte getheilt, einen experimentellen und einen theoretischen. In dem ersteren werden die Maxwell'sche und die Oberbeck'sche Methode, zur Bestimmung des Selbstpotentiales aus Ohm und Secunde, mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendbarkeit auf kleine Selbstpotentiale, verglichen. Die Ursachen der jeder Methode anhaftenden Fehler werden ausführlich besprochen.

Bei der Maxwell'schen Methode habe ich eine etwas ausgedehnte Untersuchung über die Anwendung des d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers als ballistisches Galvanometer mitgetheilt.

Im zweiten Theile habe ich die Berechnung des Selbstpotentials von Rollen als Function der Energie, welche in dem magnetischen Felde vertheilt ist, gegeben. Soviel ich weiss, ist diese Methode bisher nicht zur Berechnung des Selbstpotentials angewendet worden, obgleich die Principien, auf welche sie gegründet ist, in den bekannten Werken über die Elektricität und den Magnetismus vollständig erklärt sind.

Erster Theil.

Die Vergleichung der Methoden von Maxwell und von Oberbeck.

§ 2. Die Maxwell'sche Methode.

Maxwell's[2] Methode, das Selbstpotential aus dem Maass von Widerstand und Zeit zu bestimmen, ist später von Lord Rayleigh bei seinen Ohmbestimmungen in verbesserter Form benutzt worden.

1) Auszug aus der Inaugural-Dissertation.

2) J. C. Maxwell, Phil. Trans. Roy. Soc. **155.** p. 475. 1865; J. C. Maxwell's Collected Papers. 1. p. 547. 1890.

Zum Zweck meiner Untersuchung habe ich weitere kleine Aenderungen an der Methode vorgenommen und habe viel grössere Vorsicht angewandt, um eine gleichmässige Temperatur der Rollen zu erzielen.

§ 3. Versuchsanordnung.

Fig. 1 zeigt die von mir gewählte Versuchsanordnung, P ist die Rolle, deren Selbstpotential L gemessen werden soll, W_1, W_2, q_1 und q_2 sind Widerstände, deren Selbstpotentiale und Capacitäten möglichst klein sind; der Gesammtwiderstand

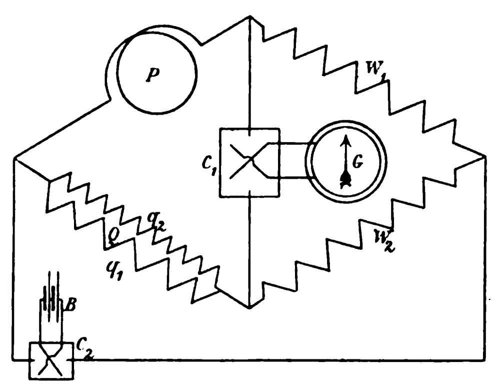


Fig 1.

von q_1 und q_2 (parallel geschaltet) ist Q. C_1 und C_2 sind Wippen, G ist ein ballistisches Galvanometer, und B ist eine Batterie, deren elektromotorische Kraft und Widerstand constant sind. Alle vier Widerstände P, Q, W_1, W_2 sollen einander so gleich sein als möglich. Q soll in seinen Abstufungen anpassbar sein. Das wird dadurch erreicht, dass man zwei Widerstände in Parallelschaltung anwendet. Wenn der Widerstand q_1 etwas grösser ist als der gewünschte Werth von Q $(= PW_2/W_1)$, so ist es möglich, ein Gleichgewicht in der Wheatstone'schen Brücke zu erhalten dadurch, dass man q_2 einen passenden grossen Werth giebt. Wegen seines grossen Werthes ist es möglich, q_2 mit grosser Genauigkeit anzupassen. Ueberdies kann die Wirkung des veränderlichen Contactwiderstandes zwischen den Stöpseln und den Klötzen

des Widerstandskastens und zwischen den Leitungsdrähten und den Klemmschrauben weniger zur Geltung kommen.

§ 4. Beobachtungen.

In seiner ursprünglichen Methode beobachtete Maxwell die Ablenkung α des ballistischen Galvanometers beim Schliessen des Kreises, wenn die Widerstände so abgepasst waren, dass sie keinen dauernden Strom durch das Galvanometer gaben, und die grösste durch den dauernden Strom hervorgebrachte Ablenkung β für den Fall, dass der Widerstand eines Zweiges im Verhältniss von 1 zu ϱ vergrössert wurde. Das Galvanometer wurde erst einige Zeit eingeschaltet, nachdem die Batterie geschlossen war. Er giebt die Formel:

$$(1) \qquad \frac{p}{P} = \frac{T}{\pi}(1 - \varrho)\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}.$$

p ist das Selbstpotential und P der Widerstand der zu messenden Rolle (gleich Q genommen), T ist die Schwingungsdauer des Galvanometers (Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch die Nulllage), und π die Ludolf'sche Zahl 3,14159 .... Um die Wirkung des Widerstandes der Luft zu eliminiren, sollte β gleich 2α sein.

§ 5. Lord Rayleigh's Verbesserungen.

Lord Rayleigh lenkt die Aufmerksamkeit auf kleine Fehler, die auf der Anwendung von $1 - \varrho$ in der Formel (1) beruhen, und giebt eine andere Formel an ihrer Stelle, nämlich:

$$(2) \qquad \frac{L}{Q} = \frac{L}{P} = -\frac{\Delta Q \chi' T \sin \frac{\alpha}{2}}{Q \chi \pi \operatorname{tg} \Theta}.$$

L ist das Selbstpotential der Rolle P; die Widerstände P und Q sind hier gleich. ΔQ ist die Aenderung in Q, um die dauernde Ablenkung Θ hervorzubringen; χ ist die Stromstärke in Q, wenn das Widerstandsgleichgewicht vollkommen ist. T und α sind wegen der Dämpfung corrigirt. Die Ablenkung α wird

durch Umkehrung des Stromes der Batterie hervorgebracht. Falls der Stromkreis nur geschlossen oder unterbrochen wird, muss ein Factor 2 in den Zähler eingeführt werden.

§ 6. Aenderungen für den Gebrauch des d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers.

Wegen der magnetischen Störungen in dem Laboratorium fand ich es räthlich, ein d'Arsonval-Deprez'sches Galvanometer für meine Arbeit zu verwenden. Die Anwendung dieses Galvanometers kann eine Veränderung in der Formel (2) verlangen; diese setzt eine zum Cosinus der Ablenkung proportionale Ablenkungskraft und eine zum Sinus proportionale rücktreibende Kraft voraus.

Der erstere Fall tritt ein, wenn das d'Arsonval-Deprez'sche Galvanometer ein gleichmässiges Feld senkrecht zur mittleren Ebene der aufgehängten Rolle hat; und der zweite tritt mit Annäherung ein, wenn die Aufhängung der Rolle bifilar ist.

Wenn das Feld gleichmässig ist und die Aufhängung unifilar und cylindrisch ist, lautet die Formel:

$$L = \varDelta Q \frac{\chi' T \alpha \cos \Theta}{\chi \pi 2 \Theta} . \tag{3}$$

Es ist nämlich die Ablenkungskraft proportional dem Cosinus des Ablenkungswinkels (beim unveränderlichen Strom), und die rücktreibende Kraft proportional dem Winkel. Bei den ballistischen Ablenkungen nimmt man an, dass die Ablenkungskraft zu wirken aufgehört hat, ehe der Cosinus des Ablenkungswinkels wesentlich verschieden von Eins ist.

Wenn das Feld nicht gleichmässig und die Aufhängung bifilar ist, darf man die Formel schreiben:

$$L = \varDelta Q \frac{\chi' T \sin \frac{\alpha}{2} \Psi(\Theta)}{\chi \pi \Theta} ; \tag{4}$$

worin $\Psi(\Theta)$ in der Weise eine Function von Θ ist, dass $\Theta / \Psi(\Theta)$ genau proportional zur Stromstärke ist. $\Psi(\Theta)$ wird gleich Eins für unendlich kleine Ablenkungen.

Wenn das Feld nicht gleichmässig und die Aufhängung unifilar und cylindrisch ist, lautet die Formel:

$$L = \Delta\, Q \frac{\chi' \, T \alpha \, \Psi(\Theta)}{\chi \, \pi \, 2 \, \Theta}. \tag{5}$$

Bei der cylindrischen, unifilaren Aufhängung ist die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude; bei der bifilaren ist sie grösser für grössere Amplituden. Der Werth für T in den Formeln (2) und (4) ist der Werth für den sehr kleinen Ausschlag.

Die von mir benutzte Aufhängung war ein feines Kupferband, welches für grosse Amplituden gewissermaassen einer Bifilaraufhängung glich. Die Complicationen, welche diese Art der Aufhängung bedingen, werden weiter unten besprochen werden. Vgl. §§ 8 und 17.

§ 7. Annahme einer kleinen Zeitconstante.

In den vorhergehenden Formeln wird angenommen, dass die Schwingungsdauer des Galvanometers im Vergleich zu der Zeitconstante L/R des Systems so gross ist, dass der erzeugte Strom durch das Galvanometer geht, ehe die Rolle in einen Theil des Feldes gelangt ist, in welchem die wirkende Componente einen wahrnehmbar verschiedenen Werth besitzt. Wenn dies nicht so wäre, könnte ein bedeutender Fehler gemacht werden.[1]) In den vorliegenden Versuchen konnte dies deshalb nicht eintreten, weil L/R immer kleiner war als 0,001, und die Schwingungsdauer des Galvanometers grösser war als 12 Secunden.

§ 8. Empfindlichkeit und Dämpfung des Galvanometers.

Das Galvanometer, welches ich benutzte, war von Prof. Edelmann in München. Die Rolle war rechteckig, 8 cm lang und 2,5 cm breit. Sie bestand aus ungefähr 60 Windungen von ziemlich starkem Draht und hatte einschliesslich der Aufhängung einen Totalwiderstand von 4,24 Ohm. Ohne erhöhten Widerstand war das Instrument ganz aperiodisch. Bei meinen Versuchen jedoch wurde es immer mit erhöhtem Widerstande

1) P. H. Ledeboer, La Lumière électrique 31. p. 309. 1889.

angewendet. Um die Schwingungsdauer und die Empfindlichkeit zu vergrössern, ersetzte ich das ursprüngliche Aufhängungsrohr durch ein doppelt so langes. Zur Aufhängung benutzte ich nach Vorversuchen Kupferband; es gab die gewünschte Empfindlichkeit und war nahezu frei von thermoelektromotorischer Kraft. Besondere Versuche zeigten, dass die Schwingungsdauer etwas von der Amplitude abhing. Vgl. § 17.

Wie sich aus der folgenden Darlegung ergeben wird, ist es nicht räthlich, die Empfindlichkeit des Galvanometers über einen gewissen Punkt hinaus dadurch zu erhöhen, dass man die Stärke des Feldes oder die Zahl der Windungen der Rolle vermehrt, da beides zu vergrösserter Dämpfung der Schwingungen führt. Wenn ein Galvanometer eigens für einen solchen Zweck hergestellt würde, sollte es eine Rolle von grossem Trägheitsmoment, aber relativ kleiner Masse an einer langen cylindrischen Aufhängung von geringer Torsionskraft besitzen. Die Zahl der Windungen sollte klein und das Feld stark genug sein, um die gewünschte Empfindlichkeit zu geben. Diese Bedingungen widersprechen sich einigermaassen und gestatten nicht, dass dieses Galvanometer die Empfindlichkeit eines Nadelgalvanometers erreicht.

§ 9. Theorie des d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers.

Wenn wir annehmen, dass die Luftreibung der Rolle der Winkelgeschwindigkeit proportional, dass das magnetische Feld um die Rolle constant ist, und dass die Zeitconstante der Rolle im Verhältniss zu der Schwingungsdauer gering ist (was der Forderung entspricht, dass die durch die Bewegung erzeugte elektromotorische Kraft die gleiche Phase wie der Strom hat), so ist die Bewegungsformel der Rolle nach einem Impuls

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\cos^2\Theta\right)\frac{d\Theta}{dt} + w\Theta = 0\,, \tag{6}$$

worin K das Trägheitsmoment der Rolle ist, Θ die Winkelablenkung, t die Zeit, F das Luftreibungsmoment bei der Einheitswinkelgeschwindigkeit, H die äquivalente Feldstärke um die Rolle (wir ziehen in Rechnung, dass die Rolle nicht aus einer Windung besteht), n die Zahl der Windungen, S die mittlere Windungsfläche, R der Widerstand des Stromkreises

des Galvanometers, und w das Moment entsprechend der Torsion der Aufhängung um die Winkeleinheit. Alle diese Grössen müssen einem Einheitssystem angehören.

$$H n S \cos \Theta \frac{d\Theta}{dt}$$

ist die von der Bewegung der Rolle erzeugte elektromotorische Kraft;

$$\frac{H n S}{R} \cos \Theta \frac{d\Theta}{dt}$$

ist der erzeugte Strom von gleicher Phase und

$$\frac{H^2 n^2 S^2}{R} \cos^2 \Theta \frac{d\Theta}{dt}$$

ist das Verzögerungsmoment, welches auf die Rolle wirkt und von dem erzeugten Strom herrührt.

Wenn Θ gering bleibt, so kann der Unterschied zwischen $\cos^2 \Theta$ und der Einheit vernachlässigt werden, und die Bewegungsgleichung kann geschrieben werden wie folgt:

$$(7) \qquad K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\right) \frac{d\Theta}{dt} + w\Theta = 0.$$

Unter den Bedingungen, dass

$$F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R} < 4 w K$$

und $\Theta = 0$, wenn $t = 0$, ist die Lösung der Gleichung (7):

$$(8) \quad \Theta = \Theta_0 \, e^{-\frac{1}{2K}\left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\right) t} \sin\left(\sqrt{\frac{w}{K} - \frac{1}{4K^2}\left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\right)^2}\, t\right).$$

Zur Vereinfachung kann dies geschrieben werden:

$$(9) \qquad \Theta = \Theta_0 \, e^{-\frac{\Delta t}{T_1}} \sin \frac{\pi t}{T_1}.$$

Dieses ist die Gleichung einer gedämpften harmonischen Bewegung. Θ_0 ist eine von Anfangsbedingungen abhängige Constante. T_1 ist die Schwingungsdauer und Δ das natürliche logarithmische Decrement. Wenn

$$F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R} \geq 4 w K,$$

dann hören die Schwingungen auf, und die Bewegung wird aperiodisch. Das Galvanometer ist dann für ballistische Zwecke nicht geeignet.

§ 10. Correction der Schwingungsdauer wegen Dämpfung.

Die Schwingungsdauer ist, nach (8) und (9):

$$(10)\quad \begin{cases} T_1 = \dfrac{\pi}{\sqrt{\dfrac{w}{K} - \dfrac{1}{4K^2}\left(F + \dfrac{H^2 n^2 S^2}{R}\right)^2}} \\ \quad = \pi\sqrt{\dfrac{K}{w}}\left(1 + \dfrac{1}{8Kw}\left(F + \dfrac{H^2 n^2 S^2}{R}\right)^2 \text{etc.}\right). \end{cases}$$

Wenn es keine Dämpfung gäbe, würde die Schwingungsdauer:

$$(11)\quad T = \pi\sqrt{\frac{K}{w}}.$$

Deshalb

$$(12)\quad T_1 = T\left(1 + \frac{1}{8Kw}\left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\right)^2 \text{etc.}\right).$$

Aus den Gleichungen (8) und (9) ergiebt sich auch, dass

$$\frac{\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{T^2} - \frac{\varDelta^2}{T_1^2}},$$

mithin

$$(13)\quad T = T_1\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \varDelta^2}}.$$

Wenn die Dämpfung gering ist, kann der Unterschied zwischen T und T_1 für gewöhnlich vernachlässigt werden. Bei starker Dämpfung ist es schwierig T mit Genauigkeit zu erhalten, da die Zahl der Schwingungen, welche man beobachten kann, sehr beschränkt ist. Aus diesem Grund habe ich vorgezogen, die Schwingungsdauer des Galvanometers bei offenem Stromkreise zu bestimmen, wobei ich eine geringe Dämpfung und lange andauernde Schwingungen hatte. Der Werth von T kann dann mit viel grösserer Genauigkeit berechnet werden.

Bei dieser Anordnung fand ich

$$\Delta = 0{,}0287 \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \Delta^2}} = 0{,}999958,$$

d. h. der Unterschied zwischen T_1 und T kann vernachlässigt werden.

§ 11. Correction der Amplitude wegen der Dämpfung.

Um die erste Ablenkung mit Rücksicht auf die Dämpfung zu corrigiren, muss man wissen, welcher Bruchtheil Φ einer Schwingungsdauer zwischen einem Durchgang durch den Nullpunkt und der folgenden Elongation verfliesst. Aus Gleichung (9) folgt:

$$\Theta = \Theta_0 e^{-\frac{\Delta t}{T_1}} \sin \frac{\pi t}{T_1}. \tag{9}$$

Die Ablenkung ist Null, wenn t Null oder irgend ein ganzes Vielfaches von T_1 ist. Für die Maximal- und Minimalwerthe muss die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\Theta}{dt} = \Theta_0 e^{-\frac{\Delta t}{T_1}} \left(\frac{\pi}{T_1} \cos \frac{\pi t}{T_1} - \frac{\Delta}{T_1} \sin \frac{\pi t}{T_1}\right) \tag{14}$$

gleich Null sein; oder

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\pi t}{T_1}\right)_{\frac{d\Theta}{dt} = 0} = \operatorname{tg} (\pi \Phi) = \frac{\pi}{\Delta}, \tag{15}$$

und

$$\pi \Phi = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\Delta} = \arcsin \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \Delta^2}} = \arcsin \frac{T}{T_1}. \tag{16}$$

Die Winkelgeschwindigkeit am Anfang ist

$$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{t=0} = \Theta_0 \frac{\pi}{T_1}. \tag{17}$$

Wenn Θ' und Θ'_1 die Entfernung und die Amplitude mit eliminirter Dämpfung sind, und die anderen Bedingungen dieselben bleiben, dann ist

$$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{t=0} = \Theta_0 \frac{\pi}{T_1} = \Theta'_1 \frac{\pi}{T} = \left(\frac{d\Theta'}{dt}\right)_{t=0}. \tag{18}$$

Daraus folgt, dass die erste Ablenkung Θ_1 wie folgt ausgedrückt wird:

$$\Theta_1 = \Theta_0 e^{-\Delta \Phi} \sin \pi \Phi = \Theta'_1 \frac{T_1}{T} e^{-\Delta \Phi} \sin \pi \Phi = \Theta'_1 e^{-\Delta \Phi}. \tag{19}$$

Daher ist die erste, wegen Dämpfung corrigirte Amplitude

(20) $$\Theta_1' = \Theta_1 e^{\varLambda \Phi} = \Theta_1 \lambda^{\Phi}.$$

Wenn A_0, A_1, A_2, ... A_n die aufeinander folgenden Amplituden in Scalentheilen (cm) bedeuten, und A die erste, wegen der Dämpfung corrigirte Amplitude ist, so ist

(21) $$A = A_0 \lambda^{\Phi},$$

wobei

$$\lambda = \frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \dots\dots = \sqrt[n]{\frac{A_0}{A_n}}. \quad \text{(Vgl. § 9.)}$$

Wenn die Dämpfung gering ist, ist Φ beinahe genau 0,5, und wir können es annähernd schreiben:

(22) $$A = A_0 \sqrt{\lambda} = A_0 \left(1 + \frac{\varLambda}{2}\right) \quad \text{(beinahe)}.$$

§ 12. Gebrauch der Doppelamplitude.

Aenderungen der Temperatur der Rollen und Thermoströme verursachen eine allmähliche Verschiebung des scheinbaren Nullpunktes des Galvanometers. Die daraus entstehenden Fehler kann man eliminiren, wenn $\varLambda$ ($= \log \lambda$) von den Doppelamplituden, welche dasselbe logarithmische Decrement wie die Amplituden haben, gerechnet wird. Die erste corrigirte Amplitude ist:

(23) $$A = \frac{A_0 + A_1}{1 + \frac{1}{\lambda}} \lambda^{\Phi} = (A_0 + A_1) \frac{\lambda^{\Phi + 1}}{1 + \lambda}.$$

Wenn das Decrement klein ist, kann man annähernd entweder

(24) $$A = (A_0 + A_1) \frac{\lambda}{2}$$

oder

(25) $$A = (A_0 + A_1) \frac{1 + \varLambda}{2}$$

setzen.

Bei meinen Versuchen war $\varLambda$ zu gross, um diese Annäherungen zu erlauben.

§ 13. **Schema eines d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers.**

Viele der Angaben über den besten Querschnitt der Rolle des d'Arsonval-Deprez'schen Galvanometers, obwohl scheinbar von allgemeiner Anwendbarkeit[1]), gelten für das *ballistische* Galvanometer nicht. Die Angabe, dass die Rolle lang und schmal sein sollte, ist ohne Zweifel richtig für Galvanometer, welche zu jedem, ausgenommen ballistischem Gebrauche bestimmt sind. Eine solche Rolle ist höchst empfindlich, bewegt sich schnell, und hat starke Dämpfung. Die zwei letzten Eigenschaften sind bei einem ballistischen Galvanometer zu vermeiden; dieses soll empfindlich sein, und grosse Schwingungsdauer und mässige Dämpfung haben.

Betrachten wir diese drei Forderungen. Die Empfindlichkeit ist proportional dem Ausdrucke HnS/wR; die Schwingungsdauer ist annähernd proportional $\sqrt{K/w}$, und die Dämpfung pro Secunde ist proportional

$$\frac{1}{K}\left(F + \frac{H^2 n^2 S^2}{R}\right).$$

Es ist sofort klar, dass F und w klein und K gross sein muss. Aenderungen der anderen Grössen bringen widersprechende Erfolge hervor; nämlich: entweder verstärken sie die Empfindlichkeit und die Dämpfung, oder sie verringern beide. Jedoch ergiebt sich, dass die Empfindlichkeit unverändert bleiben wird, wenn sowohl der Widerstand R als die Zahl der Windungen im gleichen Verhältniss verringert werden. $H^2 n^2 S^2$ wird auch in demselben Verhältniss, mit einer entsprechenden Verminderung der Dämpfung, verringert sein.

Es ist vortheilhafter n statt S oder H zu verringern, da sowohl die Zeitconstante als das Selbstpotential der Rolle n^2 annähernd proportional sind. Diese beide Grössen sollten selbstverständlich klein sein. Eine Verminderung von S hat eine ähnliche, obgleich kleinere Wirkung auf die Zeitconstante; sie würde aber auch das Trägheitsmoment zugleich mit der Masse vermindern, was ungünstig wäre. Wenn es aus irgend

1) A. Gray, The theory and practice of absolute measurements in electricity and magnetism, 2. part 2, p. 378, 1893; T. Mather, Phil. Mag. p. 434. May 1890.

einem Grunde nicht thunlich ist, n oder S soviel wie gewünscht zu vermindern, dann wäre es gut, H zu verringern. Das habe ich gethan dadurch, dass ich ein paar Magnete von dem Galvanometer entfernt habe. Nachdem ich die frühere Empfindlichkeit durch Aenderung des Widerstandes des Galvanometerzweiges wieder hergestellt hatte, fand ich, dass die Dämpfung in dem erwarteten Verhältniss verringert war.

§ 14. Wirkungen der Temperaturänderungen.

Der praktischen Anwendbarkeit der Maxwell'schen Methode bei kleinen Selbstpotentialen setzen sich wegen der Fehler bei Temperaturänderungen bedeutende Schwierigkeiten entgegen. Dies ist besonders der Fall, wenn die Zeitconstante der Rolle klein ist; denn die zufällige Aenderung in P infolge Aenderung der Temperatur kann gleich einem bedeutenden Theile der absichtlichen Aenderung ΔQ in Q sein.

Um eine merklich constante Temperatur der Kupferrollen zu erhalten, wurden sie in ein grosses Glas gebracht, welches in ein noch grösseres mit Wasser gefülltes Glasgefäss gestellt wurde. Das Wasser besass die Temperatur der Umgebung, und die Rollen wurden mit Baumwollabfall in einer Höhe von 15 cm bedeckt.

§ 15. Beobachtungen bei maximalen und minimalen Temperaturen.

Schliesslich wurde zu einem sehr einfachen Hülfsmittel gegriffen, um die Wirkungen der Temperatur genau zu berücksichtigen. Wenn die Temperatur des Wassers in dem Gefäss gefallen war, so war die Temperatur der Rolle höher. Wenn die Luft in der Nähe des Gefässes etwas erhitzt wurde, so wurde die fallende Temperatur des Wassers allmählich zum Steigen gebracht. Die Temperatur der Rolle ging dann sehr langsam durch einen Minimalwerth. Während die Temperatur durch dieses Minimum ging, war Gelegenheit zu einer Reihe von durch eine Temperaturänderung nicht gestörten Beobachtungen gegeben.

Nachdem diese Reihe vollendet war, wurde eine andere angefangen, nachdem entweder die Batterie, das Galvanometer, oder beide umgeschaltet waren. Diese vier bildeten thatsächlich eine Gruppe, welche von den durch thermische Wirkungen

verursachten Unregelmässigkeiten und der Asymmetrie des Galvanometerfeldes etc. frei war. Während der Beobachtungen wurde die Temperatur des Zimmers durch einen Gasofen so geregelt, dass die Maximal- und Minimalwerthe der Temperatur der Rolle einander folgten.

§ 17. Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude und der Temperatur.

Genaue Versuche ergaben, dass die Schwingungen bei einer Drahtaufhängung isochron in den Grenzen von Beobachtungsfehlern sind, wenn die Temperatur constant bleibt. Bei einem Kupferband ist dies nicht der Fall. Glücklicherweise ist für Amplituden, wie ich sie benutzte (weniger als 22 cm bei einem Scalenabstand von 270 cm), die Abweichung in der Schwingungsdauer gering. Das Kupferband wirkt in gewisser Beziehung als bifilare Aufhängung, für welche das zurücktreibende Drehungsmoment dem Sinus der Winkelablenkung entspricht, wenn der Winkel klein ist, während ein cylindrischer Draht ein dem Winkel entsprechendes zurücktreibendes Drehungsmoment besitzt.

Die Wirkung der Temperaturänderung auf die Schwingungsdauer ist fast eine lineare Function der Temperatur.[1]) Eine Temperaturerhöhung bringt eine Ausdehnung sowohl des Querschnitts als der Länge der Aufhängung hervor. Die einander entgegengesetzten Wirkungen dieser Ausdehnung würden eine Verminderung der Schwingungsdauer verursachen, wenn nicht die begleitende Vermehrung des Trägheitsmomentes, welche auch von der Ausdehnung und der Aenderung in dem Torsionsmodulus des Aufhängematerials herrührt, es verhinderte. Diese letzten Wirkungen erhalten das Uebergewicht und daraus entsteht eine geringe, dem Wachsen der Temperatur proportionale Zunahme der Schwingungsdauer.

Die folgende Tab. 1 (vgl. p. 47) zeigt die relativ kleine Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude und der Temperatur. Das logarithmische Decrement ist auch mitgetheilt. Die Entfernung zwischen Galvanometer und Scala war 270 cm.

Um die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude zu zeigen, fand ich es nöthig, kurze Zwischenzeiten

1) G. W. Patterson and K. E. Guthe, Phys. Rev. 7. p. 274. 1898.

Tabelle 1.

Nummer der Doppelamplituden	Doppelamplituden	Log. Doppelamplituden (Basis 10)	Logarithmisches Decrement (Basis 10)	Logarithmisches Decrement (Basis *e*)	Zwischenzeit sec	Schwingungsdauer sec	Temperatur (Celsius)
1	86,85	1,938770					
31	34,80	1,541579	0,013239	0,030484	365,2	12,173	22,0
35	30,93	1,490380					
65	12,75	1,105510	0,012829	0,029540	364,6	12,153	22,0
72	10,66	1,027757					
100	4,68	0,670246	0,012765	0,029393	364,2 [1]	12,140	22,0
1	84,98	1,929317					
27	39,55	1,597146	0,012776	0,029418	316,3	12,165	15,9
31	35,22	1,546789					
57	16,79	1,225051	0,012374	0,028492	315,6	12,138	16,0
61	14,97	1,175222					
87	7,18	0,856124	0,012273	0,028260	315,6	12,138	16,1
93	6,09	0,784617					
119	2,97	0,472756	0,011995	0,027620	315,0	12,115	16,2
125	2,50	0,397940					
151	1,21	0,082785	0,012121	0,027910	315,0	12,215	16,2
1	93,45	1,970579					
21	52,88	1,723291	0,012364	0,028469	242,5	12,125	9,15
25	47,30	1,674861					
45	27,27	1,435685	0,011959	0,027537	242,0	12,100	9,17
49	24,47	1,388634					
69	14,24	1,153510	0,011756	0,027069	241,5	12,075	9,20
73	12,77	1,106191					
93	7,46	0,872739	0,011673	0,026878	241,5	12,075	9,20
97	6,69	0,825426					
117	3,92	0,593286	0,011607	0,026726	241,5	12,075	9,20

zu benutzen. Deshalb können die Schwingungsdauern fehlerhaft bis zu 0,1 Proc. sein. Sie zeigen also deutlich, dass die Schwingungsdauer zuerst langsam und darauf schneller mit der Amplitude zunimmt.

Die Schwingungsdauer nimmt auch mit der Temperatur deutlich zu, und zwar ungefähr um 0,004 Secunden oder 0,03 Proc. pro Grad.

1) Von der 70. bis zu der 100. Doppelamplitude.

Wie zu erwarten, ist das logarithmische Decrement grösser, wenn die Schwingungsdauer grösser ist. Es entsteht auch ein Zuwachs in dem logarithmischen Decrement mit der wachsenden Amplitude, da grosse Schwingungen mehr und mehr von einer einfachen harmonischen Bewegung abweichen, nämlich: die zurücktreibende Kraft wächst in geringerem Grade als die Abweichung. Das in der angeführten Tabelle gegebene logarithmische Decrement ist in keinem Falle gross genug, um die Schwingungsdauer wahrnehmbar zu beeinflussen. Vgl. § 10.

§ 18. Correction wegen Ungleichförmigkeit des Feldes.

Die Gleichungen (4) und (5) § 6 enthalten eine unbekannte Function $\Psi(\Theta)$ der Ablenkung, welche experimentell bestimmt werden muss. Wie in § 6 erwähnt, wird diese Function gleich $\cos\Theta$, wenn das Feld gleichförmig ist. In den folgenden Tab. 2 u. 3 werden die Daten und Resultate für die beiden Beobachtungsfolgen gegeben. Der Strom wurde in jedem Falle um bekannte Beträge vergrössert und die Ablenkungen angegeben. Jede Reihe ist der Mittelwerth zweier in entgegengesetzter Ordnung genommener, um fortschreitend verändernde Wirkungen zu eliminiren, wie allmähliche Veränderung der Temperatur der Batterie und der Rollen, und die Polarisation der Batterie. In keinem Falle waren weniger als 10 000 Ohm im Kreise.

Tabelle 2.

Relativstrom	Ablenkung in cm		Mittlere Ablenkung		Secunden ÷ Strom	$\Psi(\Theta)$ Verhältniss zum ersten	Cosinus des Ablenkungswinkels
	linke	rechte	cm	sec[1])			
2	6,56	6,59	6,575	2511,0	1255,5	1,0000	0,9999
3	9,85	9,89	9,870	3768,5	1256,2	1,0006	0,9998
5	16,63	16,525	16,477	6286,0	1257,2	1,0014	0,9995
7	22,99	23,175	23,082	8795,4	1256,5	1,0009	0,9991
9	29,59	29,895	29,742	11315,0	1257,2	1,0014	0,9985
11	36,20	36,62	36,410	13824,0	1256,7	1,0010	0,9977
13	42,79	43,435	43,112	16329,5	1256,1	1,0005	0,9969

1) Die Entfernung zwischen Galvanometer und Scala war 270 cm.

Tabelle 3.

Relativ-strom	Ablenkung in cm		Mittlere Ablenkung		Secunden ÷ Strom	$\Psi(\Theta)$ Verhältniss zum ersten	Cosinus des Ablenkungs-winkels
	linke	rechte	cm	sec[1])			
1	4,142	4,092	4,117	1572,3	1572,3	1,0000	1,0000
2	8,240	8,230	8,235	3144,6	1572,3	1,0000	0,9999
3	12,321	12,416	12,368	4720,9	1573,6	1.0008	0,9997
4	16,443	16,573	16,508	6297,7	1574,4	1,0013	0,9995
5	20,560	20,765	20,662	7876,9	1775,4	1,0020	0,9993
6	24,680	24,96	24,820	9453,9	1575,6	1,0021	0,9990
7	28,835	29,142	28,988	11030,3	1575,8	1,0023	0,9986
8	32,952	33,385	33,168	12606,0	1575,7	1,0022	0,9981
9	37,070	37,630	37,350	14176,6	1575,2	1,0019	0,9976
10	41,225	41,925	41,575	15756,7	1575,7	1,0022	0,9971

Aus den Tabellen ist ersichtlich, dass die Rolle bei der Ablenkung sich in ein stärkeres Feld bewegte, weil die Ablenkungen schneller zunahmen als die Ströme; in einem gleichmässigen Felde würden die Ablenkungen langsamer zunehmen als die Ströme, da die Neigung der Rolle zu dem Feld einen Factor $\cos\Theta$ einführt. Bei ungefähr $2{,}5^0$ erreicht die wirksame Komponente ihren höchsten Werth, und erfährt jenseits dieses Punktes eine Abnahme in dem Verhältniss der Ablenkung durch den Strom.

Da der Nullpunkt nicht genau der gleiche für die verschiedenen Beobachtungen war, so konnte nicht erwartet werden, dass die Resultate genau übereinstimmen würden. Ausser einer geringen, von Tag zu Tag fortschreitenden Veränderung veränderte sich der Nullpunkt mit der Temperatur um $^1/_4$ cm pro Grad. Die Einheit des Stromes ist in den zwei Tabellen verschieden.

Die letzte Tabelle (3) wurde den Correctionen zu Grunde gelegt, da die Bedingungen, unter welchen man sie erhielt, für günstiger erachtet wurden, als diejenigen der früheren. $\Psi(\Theta)$ ist das Verhältniss in der Tabelle, so corrigirt, dass sein Werth, dem unendlich schwachen Strom entsprechend, gleich Eins war. Diese Function, für $\Theta = 0$, muss durch ein

1) Die Entfernung zwischen Galvanometer und Scala war 270 cm.

Maximum oder ein Minimum gehen, da sie auf den durch Plus- und Minusablenkungen erhaltenen Durchschnittswerth gegründet ist. Die Ablenkungen als Functionen des Stromes müssen der Natur der Sache nach durch schwach gekrümmte Curven dargestellt sein. Da sich aus den Tabellen ein Maximalwerth zwischen 2^0 und 3^0 ergiebt, so dürfte $\Theta = 0$ dem Minimalwerth des Verhältnisses entsprechen. Es ist bei dieser Berechnung angenommen worden, dass der Werth des Verhältnisses thatsächlich nicht zwischen seinem Minimalwerth für $\Theta = 0$ und dem für die erste Ablenkung ($\Theta = 1572{,}3''$) gegebenen Werth verändert werden kann. Deshalb sind die in der Tabelle gegebenen Werthe des Verhältnisses für $\Psi(\Theta)$ der Gleichung (25) genommen worden.

§ 19. **Messungen nach der Maxwell-Rayleigh'schen Methode.**

Ich komme nun zu den Messungen (mit Rolle 1), bei welchen ich meine Modification der Maxwell-Rayleigh'schen Methode anwendete. Die Tabellen geben die beobachteten Grössen und die berechneten Resultate folgen. Der Widerstand des Galvanometerzweiges war 24,44 Ohm und die Entfernung zwischen Galvanometer und Scala war 270 cm. Tabelle 4 giebt die Ablesungen und Doppelamplituden, welche

Tabelle 4.

Erste Reihe, Rolle 1, 3. Januar 1899.

(1)		(2)		(3)		(4)	
Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)
45,11 [1])	—	45,49 [1])	—	44,96 [1])	—	44,71 [1])	—
67,13	—	23,93	—	23,515	—	66,60	—
27,22	39,91	63,82	39,89	63,43	39,915	26,76	39,84
60,65	33,43	30,30	33,52	29,40	34,03	60,18	33,42
32,81	27,84	—	—	57,76	28,36	32,39	27,79
56,10	23,29	34,76	—	34,45	23,31	55,67	23,28
36,70	19,40	54,18	19,42	53,85	19,40	36,28	19,39
52,93	16,13	37,90	16,28	37,59	16,26	52,58	16,25
39,405	13,525	51,43	13,53	51,13	13,54	39,01	13,52

1) Nullpunkt.

Tabelle 5.

	(1)	(2)	(3)	(4)
q_1 (in Ohm)	21,1	21,1	21,1	21,1
q_2 " "	1758,8	1771,4	1793,4	1800,7
q_2' " "	1518,8	1531,4	1553,4	1560,7
Q " "	20,84987	20,85163	20,85464	20,85562
ΔQ " "	0,03898	0,03840	0,03740	0,03708
Nullpunkt	46,422	44,50	44,31	45,787
Ablesung	87,68	4,515	5,375	84,935
Ablenkung	41,258	39,985	38,935	39,148

man bei der Umschaltung der Batterie für jede der vier Vertauschungen der Batterie- und Galvanometerverbindungen erhält. Tab. 5 giebt die entsprechenden andauernden, durch die Aenderung des Widerstandes Q in $Q + \Delta Q$ hervorgebrachten Ablenkungen. Q ist der Gesammtwiderstand von q_1 und q_2 (parallel geschaltet), und $Q + \Delta Q$ ist der von q_1 und q_2.

Das logarithmische Decrement

$$\Delta = \log \lambda = 0{,}180253, \quad \lambda = 1{,}19752, \quad \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\Delta} = 86^{0}\, 42'\, 58'',$$

$$\Phi = 0{,}481\,756, \quad \frac{\lambda^{\Phi+1}}{\lambda+1} = 0{,}59438;$$

erste mittlere Doppelamplitude gleich $A_0 + A_1 = 39{,}889$ cm; erste wegen Dämpfung corrigirte Amplitude

$$A = (A_0 + A_1)\frac{\lambda^{\Phi+1}}{1+\lambda} = 23{,}715 \text{ cm}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{23{,}715}{270},$$

$$\alpha = 2^{0}\, 30'\, 35{,}3'';$$

erste mittlere Ablenkung

$$B = 39{,}832 \text{ cm}, \quad \operatorname{tg} 2\Theta = \frac{39{,}832}{270}, \quad \Theta = 4^{0}\, 11'\, 40{,}7'',$$

$$\Psi(\Theta) = 1{,}002;$$

Schwingungsdauer $T = 12{,}190$ sec,

Hülfswiderstände der Wheatstone'schen Brücke

$W_1 = W_2 = 94{,}07$ Ohm, $\Delta Q = 0{,}037965$ Ohm, $\frac{\chi'}{\chi} = 0{,}99966$;

Widerstand des Galvanometerzweiges $= 44{,}24$.

$$L_1 = \Delta Q \frac{\chi'\, T\, \alpha\, \Psi(\Theta)}{\chi\, \pi\, 2\, \Theta} = 0{,}043705 \text{ Henry.}$$

Tabelle 6.

Zweite Reihe, Rolle 1, 4. Januar 1899.

(1)		(2)		(3)		(4)	
Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)
45,76 [1])	—	46,11 [1])	—	46,32 [1])	—	46,08 [1])	—
67,40	—	24,54	—	24,89	—	67,78	—
27,39	40,01	64,42	39,88	64,83	39,94	27,86	39,92
60,90	33,51	30,94	33,48	31,28	33,55	61,32	33,46
32,96	27,94	58,75	27,81	59,17	27,89	33,48	27,84
56,31	23,35	35,43	23,32	35,78	23,39	56,78	23,30
36,83	19,48	54,83	19,40	55,23	19,45	37,40	19,38
53,10	16,27	38,59	16,24	38,93	16,30	53,62	16,22
39,51	13,59	52,10	13,51	52,48	13,55	40,11	13,51

Tabelle 7.

	(1)	(2)	(3)	(4)
q_1 (in Ohm)	21,1	21,1	21,1	21,1
q_2 „ „	1792,3	1792,0	1797,9	1803,9
q_2' „ „	1552,3	1552,0	1557,9	1563,9
Q „ „	20,85449	20,85445	20,85525	20,85605
ΔQ „ „	0,03745	0,03746	0,03720	0,03694
Nullpunkt	45,93	45,513	45,92	46,785
Ablesung	85,43	6,545	7,185	85,75
Ablenkuug	39,50	38,968	38,735	38,965

$$\lambda = 1{,}19755, \quad \Delta = 0{,}180277, \quad \Phi = 0{,}48175, \quad \frac{\lambda^{\Phi+1}}{1+\lambda} = 0{,}59439;$$

$$A_0 + A_1 = 39{,}9375, \quad A = 23{,}74, \quad \alpha = 2^0\,30'\,39{,}2'', \quad B = 39{,}042;$$

$$\Theta = 4^0\,06'\,50{,}0'', \quad \Psi(\Theta) = 1{,}002, \quad T = 12{,}190, \quad W_1 = W_1 = 94{,}07;$$

$$\frac{\chi'}{\chi} = 0{,}99966, \quad G = 44{,}24, \quad \Delta Q = 0{,}03726.$$

$$L_1 = 0{,}04375 \text{ Henry}.$$

1) Nullpunkt.

Tabelle 8.

Dritte Reihe, Rolle 1, 4. Januar 1899.

(1)		(2)		(3)		(4)	
Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)	Ablesung (in cm)	Doppelampl. (in cm)
45,90 [1])	—	46,51 [1])	—	46,63 [1])	—	46,275 [1])	—
67,60	—	25,21	—	25,11	—	68,19	—
27,79	39,81	64,99	39,78	64,95	39,84	28,35	39,84
61,21	33,42	31,51	33,48	31,45	33,50	61,73	33,38
33,43	27,78	59,29	27,78	59,28	27,83	33,97	27,76
56,73	23,30	35,97	23,32	35,94	23,34	57,23	23,26
37,37	19,34	55,34	19,37	55,32	19,38	37,87	19,36
53,63	16,26	39,08	16,26	39,04	16,28	54,11	16,24
40,10	13,53	52,59	13,51	52,55	13,51	40,59	13,52
51,47	11,37	41,21	11,38	41,20	11,35	51,94	11,35

Tabelle 9.

	(1)	(2)	(3)	(4)
q_1 (in Ohm)	21,1	21,1	21,1	21,1
q_2 „ „	1942,0	1963,9	1977,7	1990,0
q_2' „ „	1642,0	1663,9	1677,7	1690,0
Q „ „	10,87321	20,87572	20,87726	20,87863
ΔQ „ „	0,04091	0,03994	0,03933	0,03882
Nullpunkt	47,533	45,63	45,697	47,413
Ablesung	90,86	4,18	4,88	88,425
Ablenkung	43,327	41,45	40,817	41,012

$$\lambda = 1{,}19752, \quad \varDelta = 0{,}180253, \quad \Phi = 0{,}481756, \quad \frac{\lambda^{\Phi+1}}{1+\lambda} = 0{,}59438;$$

$$A_0 + A_1 = 39{,}82, \quad A = 23{,}67, \quad \alpha = 2^0\,30'\,17'', \quad B = 41{,}65,$$

$$\Theta = 4^0\,23'\,05{,}2''; \quad \Psi(\Theta) = 1{,}002, \quad T = 12{,}190, \quad W_1 = W_2 = 94{,}07,$$

$$\frac{\chi'}{\chi} = 0{,}99966; \quad \varDelta Q = 0{,}03975, \quad G = 44{,}24.$$

$$L_1 = 0{,}04387 \text{ Henry.}$$

Diese drei Resultate zusammenfassend, erhalten wir den Mittelwerth

$$\mathbf{L_1 = 0{,}043775 \text{ Henry.}}$$

1) Nullpunkt.

§ 20. Die Oberbeck'sche Methode.

Die zweite in dieser Untersuchung angewendete Methode war die ursprünglich von Oberbeck stammende[1]), in welcher die Rolle von unbekanntem Selbstpotential L_1, aber bekanntem Widerstand W_1 einen Zweig einer Wheatstone'schen Brücke bildete. Eine Rolle (vom Selbstpotential L_0 und Widerstand W_0) eines Elektrodynamometers ersetzte das Galvanometer in dem Galvanometerzweige; ein Sinusinductor I ersetzte die Batterie. Die anderen drei Zweige bestanden aus so weit wie möglich von Selbstpotential und Capacität freien Widerständen. Die zweite Rolle des Elektrodynamometers war in dem Sinus-

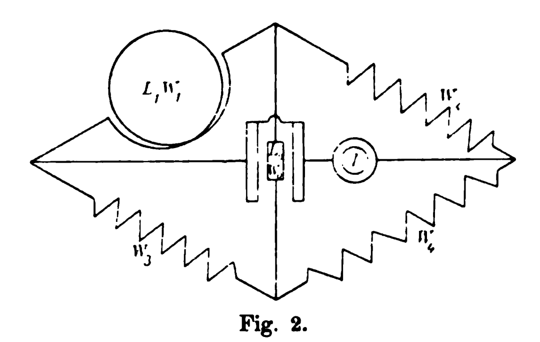


Fig. 2.

inductorzweige. Die Widerstände werden adjustirt, bis die Ablenkung des Elektrodynamometers verschwindet. Letzteres beweist nicht die Abwesenheit des Stromes in der Rolle des Instrumentes, sondern nur einen Phasenunterschied von $^1/_2\,\pi$ der Ströme in den zwei Rollen. Die mittlere Ebene der zwei Rollen sollte senkrecht sein, um ein gegenseitiges Potential zwischen den Rollen zu vermeiden.

Oberbeck vernachlässigt die Wirkung des Selbstpotentials L_0. Die vollkommene L_0 berücksichtigende Formel verdanken wir Troje[2]), nämlich:

$$(26)\qquad L_1^2 + \frac{W_2 + W_4}{W_4}\,\frac{W_3 + W_4}{W_0 + W_3 + W_4}\,L_0\,L_1 = \frac{1}{\pi^2 n^2} \left(W_3\frac{W_2}{W_4} - W_1\right)\left(W' + W_1 + W_3\right),$$

1) A. Oberbeck, Wied. Ann. 17. p. 816 u. 1040. 1882.

2) O. Troje, Wied. Ann. 47. p. 501. 1892; vgl. auch J. Puluj, Elektrotechn. Zeitschr. Heft 27. p. 348. 1891.

worin

$$W' = \frac{W_0 (W_2 + W_4)}{W_0 + W_2 + W_4} ,$$

n = die Zahl der Umkehrungen pro Secunde, und π = 3,14159 . . . .

Dieser Ausdruck kann vereinfacht werden, wenn $W_2 = W_4$. Unter dieser Bedingung giebt Troje die folgende angenäherte Lösung für die Gleichung (26):

$$(27)\quad L_1 = \frac{1}{\pi n} \sqrt{(W_3 - W_1)(W' + W_1 + W_3)} - \frac{W_2 + W_4}{W_0 + W_2 + W_4} L_0 .$$

Ich benutzte die vollständige Lösung, da ich keinen besonderen Vortheil bei dem Gebrauch der Annäherung sah. Diese vollkommene Lösung kann eine der beiden folgenden Formen annehmen. Wenn L_0 absolut bekannt ist und $W_2 = W_4$, so ist

$$(28)\begin{cases} L_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi^2 n^2}(W_3 - W_1)\left(\frac{2\, W_0\, W_2}{W_0 + 2\, W_2} + W_1 + W_3\right) + \left(L_0 \frac{W_3 + W_2}{W_0 + 2\, W_2}\right)^2} \\ \quad - L_0 \frac{W_3 + W_2}{W_0 + 2\, W_2} . \end{cases}$$

Wenn andererseits L_0 nicht absolut bekannt ist, kann man sein Verhältniss zu L_1 durch die Maxwell'sche Methode [1]) oder eine ihrer Modificationen [2]) erhalten. Ist etwa $L_0 = a L_1$, so ist

$$(29)\quad L_1 = \frac{1}{\pi n} \frac{1}{1 + 2a \frac{W_3 + W_2}{W_0 + 2 W_2}} \sqrt{(W_3 - W_1)\left(\frac{2\, W_0\, W_2}{W_0 + 2\, W_2} + W_1 + W_3\right)} .$$

Ich bestimmte dieses Verhältniss a für Rolle 1 und die bewegliche Rolle des verwendeten Elektrodynamometers zu a = 0,09470. Für die Versuche mit Rolle 2 gebrauchte ich den aus dem gemessenen Werth von L_1 berechneten Werth von L_0, und wendete dann die Gleichung (28) an.

Als Quelle der elektromotorischen Kraft benutzte ich einen Sinusinductor, welcher aus einem sich innerhalb einer Rolle

1) J. C. Maxwell, Elect. and Mag. 2. (2. Ausg.) p. 367. 1881.

2) H. S. Carhart and G. W. Patterson, Electr. Measurem. p. 255 ff. 1895.

drehenden Stahlmagneten bestand. Der Magnet wurde bei hoher Geschwindigkeit von einem Elektromotor durch Riemen und Zahnrad in Bewegung (Uebersetzung 1:100) versetzt. Die Geschwindigkeit wurde dadurch berechnet, dass man mit einem Chronometer 75 Umdrehungen des ersten Rades maass. Das entsprach 15000 Umkehrungen des Stromes. Da der Motor durch eine mit anderen Stromkreisen in Verbindung stehende und für allgemeine Zwecke in dem Gebäude benutzte Accumulatorenbatterie getrieben wurde, war es etwas schwierig, eine constante Geschwindigkeit zu erhalten. Viele Beobachtungsreihen wurden wegen der Inconstanz in der Geschwindigkeit verworfen, welche sich durch die Instabilität in dem Gleichgewicht der Wheatstone'schen Brücke zeigte. Wenn das Gleichgewicht stabil blieb, während die Geschwindigkeit gemessen wurde, so sah man die letztere als constant an.

Es sei bemerkt, dass die Formeln den Widerstand W_0 der Elektrodynamometerrolle enthalten. Da diese Rolle aus feinem Kupferdrahte war, würde sich ihre Temperatur durch die Joule'sche Wirkung erhöht haben, wenn der Strom dauernd benutzt worden wäre. Das würde eine entsprechende Vergrösserung des Widerstandes hervorgebracht haben. Da es nicht durchführbar war, den Widerstand W_0 bei jeder Gelegenheit direct zu messen, wurde W_0 ein für alle Mal gemessen und darnach wurde sein Werth wegen der Temperaturänderung corrigirt, wobei als Temperaturcoefficient 0,4 Proc. pro Grad[1]) verwendet wurden. Es wurde angenommen, dass seine Temperatur die der umgebenden Luft sei. Diese Annahme konnte nicht zu bemerkenswerthen Fehlern im Endresultat führen, wenn die Temperatur des Raumes constant war, und überdies wurde der Kreis nur kurze Zeit geschlossen gehalten.

Der Widerstand W_1 der Rolle von unbekanntem Selbstpotential wurde durch die gewöhnliche Wheatstone'sche Brückenmethode sowohl vor als nach jeder Beobachtungsreihe mit dem Wechselstrome gemessen, wozu ein Element statt des Sinusinductors eingeführt wurde.

1) A. E. Kennelly u. R. A. Fessenden, Phys. Rev. 1. p. 260. 1893.

§ 21. Beobachtungen und Resultate.

Unten werden die Beobachtungen und Resultate für die Rolle 1 gegeben. Zu den Berechnungen wurde Formel (29) benutzt (vgl. Tab. 10).

Der mittlere Werth ist

$$L_1 = 0{,}043867 \text{ Henry},$$

woraus

$$a\,L_1 = L_0 = 0{,}00415 \text{ Henry}.$$

Der durch diese Methode gefundene Mittelwerth für L_1 (0,043867) stimmt nahezu mit dem nach der Maxwell-Rayleigh'schen Methode gefundenen (0,043775), § 19, überein.

Tabelle 10.

	Reihe 1		Reihe 2		Reihe 3	
W_0	16,0° C.	88,68 Ohm	14,0° C.	87,96 Ohm	17,0° C.	89,04 Ohm
W_1	9,6	20,39	11,4	20,55	11,5	20,57
$W_3 = W_4$	16,0	9,443	14,0	9,443	17,0	9,443
W_5	16,0	44,50	14,0	43,65	17,0	43,92
a	0,09470		0,09470		0,09470	
Zwischenzeit für 15000 Umkehr,	51,6 sec		52,6 sec		52,2 sec	
n	290,7 pro sec		285,2 pro sec		287,4 pro sec	
L_1	0,04404		0,04376		0,04380	

§ 22. Vergleich der beiden Methoden.

Wenn man die Vortheile der beiden Methoden bei ziemlich grossen Selbstpotentialen vergleicht, müssen viele Thatsachen berücksichtigt werden. Die Maxwell-Rayleigh'sche Methode verlangt genaue Widerstände, ein gutes ballistisches Galvanometer und constante Temperatur. Die Oberbeck'sche Methode erfordert nur ziemlich genaue Widerstände (keine kleinen Aenderungen wie ΔQ der anderen Methoden sind erforderlich), ein empfindliches Elektrodynamometer von relativ hohem Widerstande und geringem Selbstpotential und eine beständige Quelle von elektromotorischer Kraft von Sinusgestalt, aber keine grosse Constanz der Temperatur. Bei sehr kleinen Selbstpotentialen sind die von der Joule'schen

Wirkung entstehenden Nachtheile zu gross, um die Maxwell-Rayleigh'sche Methode in Anwendung zu bringen. Daraus können wir schliessen, dass bei der Wahl der Methode die Frage der constanten Temperatur gegen die constante sinusgestaltige elektromotorische Kraft entscheidend ist.

Die Oberbeck'sche Methode hat den weiteren Vortheil, in gewisser Beziehung eine Nullmethode zu sein, denn man muss zwei Gleichgewichte mit dem Elektrodynamometer erhalten, das eine mit dem Gleich- und das andere mit dem Wechselstrome, welche den zwei dauernden und ballistischen Ablenkungen der anderen Methode entsprechen. Diese letzteren müssen wegen Unregelmässigkeiten in dem Felde, bez. in der Dämpfung corrigirt und beide auf eine Function des Winkels, welche nicht durch directe Beobachtung gegeben ist, zurückgeführt werden. Es kann auch eine Correction wegen unvollkommenen Isochronismus in der Bewegung der Rolle nothwendig werden.

Einen Ersatz für diese Nachtheile bietet die Empfindlichkeit des Galvanometers, welche die eines Elektrodynamometers weit übersteigt, wofern dieses nicht einen Eisenkern hat. Ein Eisenkern bewirkt, dass das Selbstpotential W_0 eine Function des Stromes und nicht eine constante Grösse wird, was seiner Anwendung unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenzusetzen scheint. Jedoch benutzte Oberbeck[1]) ein Galvanometer mit einem Eisenkern wie Puluj.[2])

§ 23. Anwendung auf kleine Selbstpotentiale.

Beide Methoden wurden zu der Messung des Selbstpotentials von noch einer Rolle (Rolle 2) angewendet, deren Selbstpotential L_2 viel kleiner, etwa 0,00585 Henry, und deren Widerstand etwa 7,28 Ohm war. Ihre Zeitconstante war etwa 0,0008 Secunde. Bei der Maxwell-Rayleigh'schen Methode war es nothwendig, einen Werth für ΔQ von nur 0,003 Ohm zu benutzen, um eine dauernde Ablenkung zu geben, welche der durch die Umschaltung der Batterie erzeugten ballistischen entsprach. Wegen des geringen Werthes von L_2 wurde es

1) A. Oberbeck, Wied. Ann. 17. p. 816. 1882.
2) J. Puluj, Elektrotechn. Zeitschr. Heft 27. p. 348. 1891.

für nothwendig erachtet, den Widerstand des Galvanometerzweiges auf den möglich niedrigsten Werth zu vermindern und die Stromstärke durch die Rolle zu vergrössern. Das erste verstärkte die Dämpfung und das zweite die Joule'sche Wirkung. Infolge des sehr geringen Werthes von ΔQ entstand ein bedeutender Fehler durch von Erhitzung herrührenden Widerstandsveränderungen. Der Mittelwerth der Resultate von sechs Beobachtungsreihen war 0,0057, aber die einzelnen Reihen unterschieden sich bis zu etwa 5 Proc. voneinander. Ich bin überzeugt, dass die Rolle ein zu geringes Selbstpotential hatte, um eine befriedigende Anwendung dieser Methode zu gestatten.

Die Oberbeck'sche Methode andererseits gab ziemlich übereinstimmende Resultate mit einem Mittelwerthe für vier Reihen von 0,00585 und eine mittlere Abweichung von 0,00025 oder von etwa 0,5 Proc.

Zweiter Theil.

Die Berechnung von Selbstpotentialen in Ausdrücken der Energie des magnetischen Feldes.

§ 24. Die drei von Maxwell vorgeschlagenen Methoden.

In seiner Schrift „A dynamical Theory of the Electromagnetic Field"[1]) hat Maxwell drei Methoden, um die Coefficienten der elektromagnetischen Induction zu berechnen, vorgeschlagen. In der ersten definirt er als das elektromagnetische Moment (electromagnetic momentum) des einen Kreises, falls durch den anderen ein Einheitsstrom fliesst:

$$M = \int \left(F \frac{dx}{ds'} + G \frac{dy}{ds'} + H \frac{dz}{ds'} \right) ds', \tag{30}$$

worin F, G und H die Componenten des elektromagnetischen Momentes sind, welches dem Einheitsstrom in dem zweiten Kreise entspringt, und ds' ein Längenelement des ersten ist.

Diese Gleichung kann auch die Form

$$M = \iint \mu \frac{ds \, . \, ds'}{r} \cos(ds \, . \, ds') \tag{31}$$

1) J. C. Maxwell, Collected Papers 1. p. 589. 1890; Trans. Roy. Soc. 155. p. 617. 1865.

annehmen, welche zuerst von Franz E. Neumann gegeben wurde[1]), worin μ die magnetische Permeabilität des isotrop und constant vorausgesetzten Mediums ist, und r die Entfernung zwischen ds und ds', welche Elemente der zwei Kreise sind, und einen Winkel $(ds.ds')$ miteinander bilden. In dem Falle des Selbstpotentials gehören ds und ds' demselben Kreise an.

Mit Ausnahme des Factors μ, entspricht diese Formel dem früheren Begriff von Fernwirkung. Der Factor μ giebt jedoch eine Andeutung, dass etwas in dem umgebenden Raume mit dem Phänomen in Beziehung steht.

Bei der zweiten Methode wird das gegenseitige Potential durch die Zahl der magnetischen Kraftlinien gemessen, welche durch den einen Stromkreis gehen, wenn der Einheitsstrom durch den anderen fliesst. Wenn eine Kraftlinie mehrmals den Stromkreis schneidet, gilt sie als ebenso viele einzelne Linien; wenn sie aber nur einen Theil des Stromkreises schneidet, so gilt sie als die entsprechende Bruchzahl. Sind die zwei Kreise identisch, so wird das gegenseitige Potential Selbstpotential.

Diese zweite Methode entspricht in ihrem Wesen einer Anwendung des Faraday'schen Begriffes des elektrotonischen Zustandes (electrotonic state)[2]), der Zahl der durch ihn gebundenen Kraftlinien[3]).

Diese zwei Methoden, und besonders die erste, sind vielfach von Physikern zur Berechnung des Selbstpotentials und des gegenseitigen Potentials der Kreise benutzt worden, so von Maxwell[4]), Fröhlich[5]), Weinstein[6]) und Stefan.[7])

Bei der dritten Methode bezeichnet Maxwell das gegenseitige Potential als den Theil der magnetischen Energie des ganzen Feldes, das von dem Product des Stromes in den beiden Kreisen abhängt. Sind α, β, γ bez. α', β', γ' die Com-

1) F. E. Neumann, Abhandlung. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 8. 1845.

2) M. Faraday, Experimental Researches, Art. 60. 1839.

3) J. C. Maxwell, Collected Papers. **1.** p. 206. 1890; Trans. Camb. Phil. Soc. **10.** part. 1. p. 65. 1849.

4) J. C. Maxwell, Collected Papers **1.** p. 593. 1890; Elect. and Mag. (2. Ausg.) **2.** p. 316. 1881.

5) J. Fröhlich, Wied. Ann. **19.** p. 106. 1883; **22.** p. 117. 1884.

6) B. Weinstein, Wied. Ann. **21.** p. 329. 1884.

7) J. Stefan, Wied. Ann. **22.** p. 107. 1884.

ponenten der magnetischen Intensität, die von dem ersten bez. zweiten Stromkreise herrühren, so ist die Energie des Elementes des Feldes vom Volumen dV.

$$\frac{\mu}{8\pi}\left\{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2+(\gamma+\gamma')^2\right\}dV. \tag{32}$$

Der von dem Product der Ströme abhängige Theil ist

$$\frac{\mu}{4\pi}\left\{\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'\right\}dV. \tag{33}$$

Maxwell macht keinen Gebrauch von diesem Ausdrucke, und meines Wissens ist er nie zur Berechnung der Potentiale angewendet worden.

Wenn die zwei Stromkreise identisch sind, so wird dieser Ausdruck (33) die Basis für die Berechnung des Selbstpotentials des Kreises. Das magnetische Feld hat als Werth

$$H=\sqrt{\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'}, \tag{34}$$

und das Selbstpotential wird

$$L=\int\limits_{\infty}\frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{H}{I}\right)^2 dV, \tag{35}$$

worin I die Stromstärke ist. Das Integral ist auf das ganze Feld auszudehnen.

Diese Gleichung kann einfacher gewonnen werden dadurch, dass man nur einen Stromkreis betrachtet. Maxwell's Art, die Methode darzulegen, hat jedoch den Vortheil allgemeiner Anwendbarkeit auf gegenseitiges und Selbstpotential.

§ 25. Ableitung der Gleichung $L=\int\limits_{\infty}\frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{H}{I}\right)^2 dV$.

Es ist eine Folge von dem Green'schen Satz[1]), dass die aus der magnetischen Polarisation des Feldes entstehende Energie

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\infty}\mu H^2\,dV \tag{36}$$

ist. Es ergiebt sich auch aus der Definition des Selbstpotentials eines Kreises in Ausdrücken von elektromotorischer

1) George Green, Math. Papers, Essay on the application of Math. to elect. and mag. p. 1. 1871; J. C. Maxwell, Elect. and mag. (2. Ausg.) 1. p. 127. 1881; 2. p. 249 u. 261. 1881.

Kraft und Stromstärke, dass die zur Erzeugung eines Stromes im Kreise angewendete Arbeit

(37) $$W = \frac{1}{2} L I^2$$

ist. Aus (36) und (37) ergiebt sich durch Elimination von W

(35) $$L = \int_{\infty} \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{H}{I}\right)^2 dV,$$

wie in § 24 bereits abgeleitet wurde. Die Gleichungen (35) und (36) sind derselben Bedingung unterworfen wie (31), nämlich: dass μ die constante magnetische Permeabilität eines isotropen Mediums ist. Wenn diese Bedingung fehlt, ist L keine bestimmte Grösse des Stromkreises, sondern ist von dem jeweiligen Zustand des Kreises und des ihn umgebenden Feldes abhängig.

Wenden wir Gleichung (35) zu der Berechnung der Selbstpotentiale einiger Kreise an.

§ 26. Anwendung auf ein Solenoid von grosser Länge.

Nehmen wir ein Solenoid von gleichförmigem Querschnitt S und sehr grosser Länge l an, welches aus n Windungen pro Längeneinheit aus einem sehr dünnen bandförmigen Leiter besteht, dessen Dicke vernachlässigt werden kann. Nehmen wir auch an, dass der Isolationsraum zwischen den einander folgenden Windungen unendlich klein ist. Wenn man die Wirkungen der sehr entfernten Enden vernachlässigt, so ist das magnetische Feld innerhalb des Solenoids constant, und ausserhalb desselben Null. Also haben wir den bekannten Ausdruck

(38) $$\frac{H}{I} = 4\pi n.$$

Woraus folgt, dass

(39) $$L = 4\pi\mu n^2 \int dV = 4\pi\mu n^2 l S.$$

Das Selbstpotential pro Längeneinheit ist dann, mit Ausnahme der Enden,

(40) $$\frac{L}{l} = 4\pi\mu S n^2.$$

§ 27. Anwendung auf ein Ringsolenoid von rechteckigem Querschnitt.

Betrachten wir zunächst den Fall eines Ringsolenoids von rechteckigem Querschnitt. Nehmen wir die in § 26 gegebenen analogen Bedingungen in Beziehung auf Form und Stellung der Leiter an. Mögen die ganze Anzahl der Windungen N, der innere Radius r_1, und der äussere r_2, und der Axialdurchmesser a sein. Die Stärke des Feldes ist dem reciproken Werthe der Längen der Kraftlinien proportional. Daraus erhalten wir:

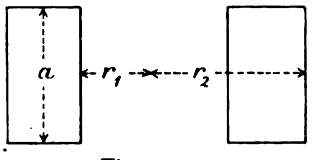


Fig. 3.

$$(41) \qquad \frac{H}{I} = 4\pi n = \frac{2N}{r},$$

und

$$(42) \qquad L = \int \frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{2N}{r}\right)^2 dV = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{2N}{r}\right)^2 a\, r\, dr\, d\Theta,$$

was bei Durchführung der Integration

$$(43) \qquad L = 2\, a\, \mu N^2 \log_e \left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

giebt.

§ 28. Anwendung auf ein Ringsolenoid von kreisförmigem Querschnitt.

Wenn das Ringsolenoid einen kreisförmigen Querschnitt hat, so wird die Formel etwas complicirter. Wie vorher ist

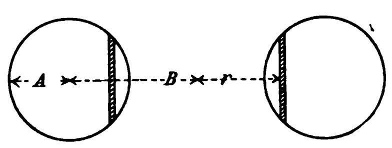


Fig. 4.

$$(41) \qquad \frac{H}{I} = \frac{2N}{r},$$

und schreiben wir

$$A = \frac{r_2 - r_1}{2} \quad \text{und} \quad B = \frac{r_2 + r_1}{2}.$$

worin A der Radius des Querschnittes und B der Mittelradius des Ringes ist. Nehmen wir als Volumenelement einen Ring von der Dicke dr und Breite

$$2\sqrt{A^2-(B-r)^2}\ ,$$

wie in der Figur 4 gezeigt ist, dann ist

$$dV = 4\pi r\sqrt{A^2-(B-r)^2}\,dr\,. \tag{44}$$

Indem wir (41) und (44) in (35) setzen, erhalten wir den folgenden Ausdruck

$$L = \int\limits_{r=B-A}^{r=B+A} \frac{4\mu N^2}{r}\sqrt{A^2-(B-r)^2}\,dr\,. \tag{45}$$

Um diese Gleichung für die Integration vorzubereiten, schreibt man

$$\sqrt{A^2-(B-r)^2} = A - \chi(B-r)\ ,$$

woraus

$$B - r = \frac{2A\chi}{1+\chi^2} \quad \text{und} \quad dr = -\frac{2A(1-\chi^2)\,d\chi}{(1+\chi^2)^2}\,.$$

Wenn wir diese Substitution vornehmen, erhalten wir

$$(46)\ \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{r=B-A}^{r=B+A} \frac{\sqrt{A^2-(B-r)^2}}{r}\,dr = \int\limits_{\chi=+1}^{\chi=-1} \frac{2A^2(1-\chi^2)^2\,d\chi}{B\left(1-\frac{2A\chi}{B}+\chi^2\right)(1+\chi^2)^2} \\ \displaystyle = \int\limits_{\chi=+1}^{\chi=-1} \left[\frac{2(B^2-A^2)}{B\left(1-\frac{2A\chi}{B}+\chi^2\right)} - \frac{2B}{1+\chi^2} - \frac{4A\chi}{(1+\chi^2)^2}\right] d\chi\,. \end{cases}$$

Dieses können wir integriren, wie folgt:

$$(47)\ \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{r=B-A}^{r=B+A} \frac{\sqrt{A^2-(B-r)^2}}{r}\,dr = -2\sqrt{B^2-A^2}\Bigg[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{B-A}{B+A}} \\ \displaystyle\qquad - \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{B+A}{B-A}}\right)\Bigg] + 2B\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right] \\ \displaystyle\qquad = \pi\left(B-\sqrt{B^2-A^2}\right)\,. \end{cases}$$

Wir haben demnach gesehen, dass diese dritte Methode bei den drei verschiedenen Formen des Solenoids dasselbe Resultat liefert, wie die gewöhnlich angewendeten.[1])

Zum Schlusse möchte ich Hrn. Prof. Dr. von Lommel, Hrn. Prof. Dr. Graetz und Hrn. Prof. Dr. Seeliger meinen tiefgefühlten Dank aussprechen.

München, Physikal. Inst. d. Univ., 12. Mai 1899.

1) In der Dissertation ist auch noch der Fall einer kreisförmigen Rolle von rechteckigem Querschnitt behandelt. Vgl. p. 40 daselbst.

(Eingegangen 17. Juni 1899.)

---

4. *Ueber Zustandsgleichungen und Energiegleichungen; von O. Wiedeburg.*

Seitdem einmal der Energiebegriff als der allgemeinste, auf allen Gebieten der Physik anwendbare aufgefunden worden ist, benutzt man als Ausgangspunkt theoretischer Herleitungen mit Vorliebe Gleichungen, die sich auf Energiegrössen beziehen, wie sie in den beiden „Hauptsätzen“ der Thermodynamik und ihrer Erweiterung, der Energetik, ihren allgemeinen Ausdruck finden. Und doch zeigt es sich andererseits in so manchen Fällen vortheilhafter, zur Darstellung der Erscheinungen Gleichungen anderer Art als Grundlage zu wählen, die keineswegs Gleichungen zwischen Energiegrössen sind, denen gegenüber die allgemeinen Energiegleichungen nur die Rolle von principiell gültigen Relationen spielen, die bei jedem Ansatze erfüllt sein müssen. Es lohnt sich wohl, das gegenseitige Verhältniss solcher verschiedenen Ausgangspunkte theoretischer Herleitungen näher ins Auge zu fassen und klarzustellen.

In meinen Arbeiten über nicht-umkehrbare Vorgänge und den sich daran anschliessenden[1]) habe ich eine bestimmte Kategorie von Gleichungen in den Vordergrund gestellt, die nicht selbst Energiegleichungen sind, aber doch zum Energiebegriff von Haus aus in naher Beziehung stehen, als nach bestimmtem Schema gebaute Gleichungen zwischen den „*Factoren*“ der verschiedenen Energiearten. Für diese, im allgemeinsten Falle sich auf nicht-umkehrbare Vorgänge beziehenden Gleichungen habe ich die Bezeichnung als „*Zustandsgleichungen*“ des betreffenden Körpers angewendet.

Diese Zustandsgleichungen also stellen die Grundlage der Rechnung dar, ihnen gegenüber erscheinen die Energiegleichungen nur als eine eigenartige Ausdrucksform für dieselben Erscheinungen. Dieses, den vielfach üblichen Gedanken-

1) O. Wiedeburg, Wied. Ann. **61.** p. 705. 1897; **62.** p. 652. 1897; **63.** p. 154. 1897; **64.** p. 519. 1898; Zeitschr. f. physik. Chem. **29.** p. 27. 1899.

gang gewissermaassen umkehrende Verfahren möchte ich gerade mit Rücksicht hierauf im Folgenden noch näher erläutern, um dann einige weitere Bemerkungen über die Formulirung der Erscheinungen in Zustandsgleichungen und Energiegleichungen anzuknüpfen.

Energiecoefficienten und Factoren der Zustandsgleichungen.

Da der Unterschied zwischen der jetzt üblichen Behandlungsweise und der von mir neu vorgeschlagenen überall da besonders hervortritt, wo *thermische* Vorgänge mitspielen, so wollen wir das zur Erläuterung dienende Beispiel derart wählen, dass auch thermische Zustandsänderungen mit in Betracht kommen: In meiner letzten, speciell die thermischen Begriffe behandelnden Arbeit wurde ein Metalldraht betrachtet, der infolge Aenderung seiner Temperatur ϑ und seiner Spannung P Aenderungen seiner Länge l erfährt.

In der thermodynamischen Schlussweise, wie sie von Clausius, Kirchhoff etc. durchgeführt ist, geht man davon aus, dass sich bei solchen gleichzeitigen Aenderungen der unabhängigen Variabeln P und ϑ die „dazu nöthige" Zufuhr an Wärme (thermischer Energie) Q und mechanischer Arbeit A darstellen lasse in der Form:

$$(1) \qquad \mathfrak{d}\, Q = X d P + Y d \vartheta, \quad \mathfrak{d} A = M d P + N d \vartheta,$$

wo die als Functionen von P und ϑ anzusehenden Energiecoefficienten X, Y, M, N ihrer speciellen Bedeutung nach leicht charakterisirt werden können.[1])

Die beiden Hauptsätze besagen nun in unserem Falle, dass sowohl die Summe $\mathfrak{d}\, Q + \mathfrak{d}\, A$ als auch der Quotient $\mathfrak{d}\, Q / \vartheta$, wenn ϑ die „absolute" Temperatur, vollständige Differentiale von Zustandsfunctionen sein müssen, nämlich der Energie E bez. Entropie S des Drahtes:

$$(2) \qquad \mathfrak{d}\, Q + \mathfrak{d} A = d E,$$

$$(3) \qquad \frac{\mathfrak{d}\, Q}{\vartheta} = d S,$$

1) Zeichen $\mathfrak{d}$ benutzt zur Unterscheidung der „Diminutive" von Differentialen (vgl. Zeitschr. f. physik. Chem. **29**. p. 35. 1899).

und daraus ergeben sich sofort zwei Beziehungen zwischen den Differentialquotienten jener vier Energiecoefficienten nach P und ϑ, nämlich

$$(4) \qquad \frac{\partial X}{\partial \vartheta} - \frac{\partial Y}{\partial P} = \frac{\partial N}{\partial P} - \frac{\partial M}{\partial \vartheta}$$

und

$$(5) \qquad \frac{\partial X}{\partial \vartheta} - \frac{\partial Y}{\partial P} = \frac{X}{\vartheta} \text{ oder auch } \frac{\partial Y}{\partial P} = \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{X}{\vartheta}\right).$$

Nun könnte man zu den beiden Grundgleichungen (2) und (3) eine speciell zu (3) ganz analoge hinzufügen, die sich auf die mechanische Arbeit bezieht:

$$(6) \qquad \frac{\mathfrak{d} A}{P} = d\,l,$$

wo auch l gerade wie S eine Function der Variabeln P und ϑ; aus ihr würde sich, zu (5) analog, ergeben:

$$(7) \qquad \frac{\partial N}{\partial P} - \frac{\partial M}{\partial \vartheta} = \frac{N}{P} \text{ oder auch } \frac{\partial M}{\partial \vartheta} = P \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{N}{P}\right),$$

wonach man statt Gleichung (4) auch schreiben könnte:

$$(8) \qquad \frac{X}{\vartheta} = \frac{N}{P}.$$

Führt man die nähere Bedeutung der Grössen M und N, die sich aus der Darstellung

$$\mathfrak{d} A = P\,d\,l = P \frac{\partial l}{\partial P} d\,P + P \frac{\partial l}{\partial \vartheta} d\,\vartheta$$

ergiebt, in Gleichung (7) ein, so reducirt sich diese auf die als „selbstverständlich" angesehene Gleichung

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 l}{\partial \vartheta\, \partial P} = \frac{\partial^2 l}{\partial P\, \partial \vartheta}.$$

Also unser Ansatz (6), wonach $\mathfrak{d} A / P$ ein vollständiges Differential, liefert nur ein selbstverständliches Resultat, weil wir nämlich gewöhnt sind, wenn wir den Zustand unseres Drahtes beschreiben wollen, die direct anschauliche Grösse l als Function von P und ϑ mit zu benutzen.

Können wir nicht den zu (6) ganz analogen Ansatz (3) und das, was sich daraus ergiebt, nämlich Gleichung (5), unter demselben Gesichtspunkte betrachten? Wird es sich nicht empfehlen, in der Wärmelehre *von Haus aus* eine Grösse S mit zu benutzen, die mit der Temperatur ϑ den augenblicklichen thermischen Zustand des Drahtes gerade so gut be-

schreibt, wie l und P zusammen den elastischen, die von ϑ und P gerade so gut abhängt wie die Drahtlänge l?

Anschaulich wird uns eine solche thermische Grösse S sofort, wenn wir die alte Vorstellung vom „Wärmestoff" in abgeklärter Form wieder aufnehmen, wenn wir dem Körper eine „thermische Ladung" S zuschreiben, wie wir ohne Bedenken von einer „elektrischen Ladung" zu sprechen pflegen. In meiner letzten Arbeit habe ich diese Fragen zusammenfassend näher behandelt und ich möchte darauf verweisen. Hier kommt für uns in Betracht die Grundlage, die wir bei solcher Anschauungsweise für unsere Darstellung der zu behandelnden Vorgänge ohne weiteres gewinnen in den beiden „Zustandsgleichungen", die lediglich die Abhängigkeit des l und S von P und ϑ constatiren. Dabei ist der Draht als ein „eindeutiges System" vorausgesetzt, das nämlich nur *umkehrbarer* Zustandsänderungen fähig ist. Da wir nur zwei Zustandsseiten nebeneinander betrachten, so bestimmen zwei Variable den Zustand vollständig, insofern die beiden anderen noch mit benutzten ihren eigenen Werthen nach stets durch die jeweiligen Werthe jener beiden mit bestimmt sind.

Schreiben wir also die beiden Zustandsgleichungen in der Form:

$$(10) \qquad \begin{cases} dS = \sigma\, d\vartheta + \varepsilon\, dP, \\ dl = \lambda\, dP + \eta\, d\vartheta, \end{cases}$$

wo die Factoren σ, ε, λ, η als Functionen von P und ϑ anzusehen sind[1]), so sind uns die folgenden beiden Relationen zwischen den Differentialquotienten dieser Factoren als selbstverständlich gegeben:

$$(11) \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial P} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \eta}{\partial P}.$$ [2])

1) Ganz entsprechend ist der Ansatz, den G. Lippmann seiner Zeit machte für das Zusammenwirken von *elektrischen* und andersartigen Vorgängen auf Grund des Satzes von der Erhaltung der Elektricitätsmengen (Compt. rend. **92.** p. 1049 u. 1149. 1881; Ann. de Chim. et de Phys. (5) **24.** p. 145. 1881).

2) Die zweite der Gleichungen (11), identisch mit (9), stellt die Beziehung dar zwischen der Aenderung des thermischen Ausdehnungscoefficienten mit der Spannung und der Aenderung des Elasticitätscoefficienten mit der Temperatur, die von G. Dahlander geprüft worden ist (Pogg. Ann. **145.** p. 147. 1872).

Um nun aus diesem Ansatz mit der Erfahrung übereinstimmende Schlüsse zu ziehen, ist es nothwendig und hinreichend, dass wir zwischen den vier Factoren *noch eine einzige* Beziehung als vorhanden ansehen, nämlich die Beziehung

$$\eta = \varepsilon, \tag{12}$$

die die beiden voneinander sonst ganz unabhängigen Zustandsgleichungen miteinander verknüpft, die gegenseitige Beeinflussung der beiden Zustandsseiten näher formulirt, die Wechselwirkung der verschiedenen „Naturkräfte" enger gestaltet.

Aus dieser Relation ergiebt sich sofort als Folgerung, dass

$$\vartheta\, d S + P d l = d E \tag{13}$$

ist, d. h. vollständiges Differential einer Function E von P und ϑ, wir werden dazu geführt, den den verschiedenen Zustandsseiten gemeinsamen Begriff der *Energiegrössen* einzuführen, indem wir

$$\vartheta\, d S = \mathfrak{d} Q \quad \text{und} \quad P d l = \mathfrak{d} A \tag{14}$$

als solche bezeichnen, wir gewinnen die beiden Häuptsätze der Thermodynamik.

Um zu diesen beiden Hauptsätzen zu gelangen, hatten wir also nur *eine* Annahme nöthig (Gleichung 12), nachdem wir einmal die zu behandelnden Vorgänge unter Mithülfe der in Anlehnung an die alte Vorstellung veranschaulichten Grösse S formulirt hatten.

Diejenigen Grössen, durch die wir von *unserem* Standpunkt aus den behandelten Körper charakterisiren, seiner speciellen Natur nach von anderen unterscheiden, sind die vier *Factoren* σ, λ, ε, η *der beiden Zustandsgleichungen* (10); zwischen diesen bez. ihren Differentialquotienten bestehen die drei Relationen (11) und (12); vom *thermodynamischen* Standpunkte aus spielen die vier *Energiecoefficienten* X, Y, M, N die Rolle der charakteristischen Grössen, deren Zusammenhang durch die drei Relationen (4) [bez. (8)], (5) und (7) geregelt wird. Um die eine Gruppe von Relationen aus der anderen herzuleiten, braucht man nur die Beziehungen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} X = \varepsilon . \vartheta, & Y = \sigma . \vartheta, \\ M = \lambda . P, & N = \eta . P \end{array} \right. \tag{15}$$

zu beachten.

(Eine Differentialgleichung höherer, nämlich 2. Ordnung, lässt sich noch ohne weiteres hinschreiben:

(16)
$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial P^2} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \vartheta^2},$$

und dementsprechend bei Benutzung der Energiecoefficienten:

(17)
$$\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial P^2} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 M}{\partial \vartheta^2}.)$$

Können wir annehmen, dass die Factoren unserer Zustandsgleichungen *Constanten* seien, so verlieren die beiden Differentialrelationen (11) ihre Bedeutung für uns, es ist das Verhalten des in *zwei*facher Hinsicht (thermischer und elastischer) seinen Zustand ändernden Körpers quantitativ völlig bestimmt durch die *drei* voneinander unabhängigen Constanten σ, λ, ε, von denen σ auf die rein thermische, λ auf die rein elastische Seite der Zustandsänderung, ε auf die Wechselwirkung zwischen beiden sich bezieht.

Aufgabe des Experimentes ist es jedenfalls, diese Grundgrössen für die verschiedenen Körper zahlenmässig zu ermitteln, um dann durch Vergleich zwischen ihnen Gesetze für ihre Abhängigkeit von der Natur des Körpers aufzufinden. Solche Gesetzmässigkeiten darf man nicht immer gerade bei den am leichtesten und directesten zu messenden Grössen erwarten, sondern viel eher bei solchen, die zu einer möglichst einfachen und systematischen Formulirung der Grunderscheinungen dienen, wie wir sie in unseren Zustandsgleichungen aufzustellen suchten. Warburg[1]) hat einmal darauf hingewiesen, dass man, um Beziehungen zwischen der chemischen Constitution und den physikalischen Eigenschaften bei tropfbaren Flüssigkeiten zu constatiren, sich nicht auf die Vergleichung der specifischen Wärme bei constantem Druck, der thermischen Ausdehnung und der isothermischen Compressibilität für die verschiedenen Flüssigkeiten beschränken solle, sondern auch die specifische Wärme bei constantem Volumen C_v und den Ausdruck

$$\vartheta \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v - p$$

1) E. Warburg, Arch. des scienc. phys. et nat. (3) 28. p. 338. 1892; Beibl. 17. p. 1031. 1893.

in Betracht ziehen müsse, die als partielle Differentialquotienten der Gesammtenergie nach ϑ bei constantem v bez. nach v bei constantem ϑ vielleicht in einfacherer Beziehung zur chemischen Constitution ständen als die oben genannten directer messbaren Grössen. Von unserem Standpunkte aus werden wir an Stelle dieser Energiecoefficienten noch mehr die Factoren unserer Grundgleichungen in den Mittelpunkt stellen. Als erstrebenswerthes Ziel muss es uns dabei immer vorschweben, diese Grundgleichungen so zu formuliren, dass ihre Factoren wirklich als *Körperconstanten* anzusehen sind, namentlich also auch unabhängig vom jeweiligen Aggregatzustand. Wie man dazu *vielleicht* gelangen könne durch die — zunächst rein formale — Einführung zweier besonderer Zustandsseiten (Cohäsion, Constitution), die durch die Veränderlichkeit der ihnen entsprechenden Zustandsvariabeln den Wechsel der Aggregatzustände darstellen sollen, das habe ich früher dargelegt. [1])

Das Princip der virtuellen Zustandsänderungen.

Kehren wir zurück zum Hauptpunkt unserer Erörterungen, dem gegenseitigen Verhältniss von Zustandsgleichungen und Energiegleichungen. Wenn wir den ersteren, die den einfachsten Ausdruck der zu behandelnden Vorgänge darstellen (sobald wir für die Wärme von Haus aus den anschaulichen Begriff der thermischen Ladung mitbenutzen), die *eine* durch Gleichung (12) gegebene Beziehung hinzufügen, so genügt dies, wie wir sahen, um die in der üblichen Thermodynamik als *Grundlage* benutzte Energiegleichung aus *unseren* Grundlagen *herzuleiten.*

Was nun den physikalischen Inhalt dieser Beziehung

$$(12) \qquad \eta = \varepsilon$$

betrifft, so besagt sie, dass die durch die beiden partiellen Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{\vartheta} = \varepsilon \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)_{P} = \eta$$

1) O. Wiedeburg, Wied. Ann. **64.** p. 541. 1898.

dargestellte Wechselwirkung der beiden verschiedenen Zustandsseiten nicht eine zweifach verschiedene sei, sondern eine einfach bestimmte:

$$(18) \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_\vartheta = \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)_P.$$

Rein mathematisch gesprochen ist das, was zu unseren allgemeinen Zustandsgleichungen als wesentliches Merkmal der behandelten Zustandsänderungen hinzutritt, nichts Anderes als die *Bedingung der Integrabilität* der Productensumme $\vartheta dS + Pdl$; der erste Hauptsatz, das Energieprincip, in seiner den zweiten Hauptsatz mitenthaltenden Form:

$$(13) \qquad \vartheta\, dS + P\, dl = dE$$

ist seinerseits der *directe Ausdruck dieser Integrabilität.*

Je nach der Wahl der unabhängigen Variabeln kann man ja die Relation (18) auf verschiedene Form bringen: die vier thermodynamischen Relationen Maxwell's:

$$(19) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_\vartheta = \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)_P, & \left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_\vartheta = -\left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right)_l, \\ \left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_P = -\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial P}\right)_S, & \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial l}\right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_l \end{cases}$$

besagen im Grunde alle dasselbe, unterscheiden sich nur durch die physikalische Deutung, deren sie fähig sind, und die durch Einführung anderer partieller Differentialquotienten an Stelle der direct vorkommenden ja noch mannichfach abgeändert werden kann.

Es lassen sich nun diese verschiedenen Relationen (19) zusammenfassen in eine einzige Formel, von der ich glaube, dass sie in der Allgemeinheit, in der wir sie aufstellen wollen, noch nicht gegeben worden ist:

Die Energiegleichung (13) gilt für jede mögliche Zustandsänderung des betrachteten Körpers; kennzeichnen wir also zwei verschiedene, voneinander unabhängige, mögliche Zustandsänderungen durch Verwendung des Variationszeichens δ mit verschiedenem Index, so bestehen nebeneinander die Gleichungen:

$$(20) \qquad \begin{cases} \vartheta\, \delta_1 S + P \delta_1 l = \delta_1 E, \\ \vartheta\, \delta_2 S + P \delta_2 l = \delta_2 E; \end{cases}$$

wir variiren nun die erste Gleichung in der Weise, wie es durch das Zeichen δ_2, und umgekehrt die zweite in der Weise, wie es durch δ_1 angedeutet ist, und erhalten:

$$(21)\quad \begin{cases} \delta_2\,\vartheta\,\delta_1\,S + \vartheta\,\delta_2\,\delta_1\,S + \delta_2\,P\,\delta_1\,l + P\,\delta_2\,\delta_1\,l = \delta_2\,\delta_1\,E\,, \\ \delta_1\,\vartheta\,\delta_2\,S + \vartheta\,\delta_1\,\delta_2\,S + \delta_1\,P\,\delta_2\,l + P\,\delta_1\,\delta_2\,l = \delta_1\,\delta_2\,E\,; \end{cases}$$

bei der vorausgesetzten gegenseitigen Unabhängigkeit der beiden Variationen liefert Subtraction dieser beiden Gleichungen:

$$(22)\qquad \delta_2\,\vartheta\,\delta_1\,S + \delta_2\,P\,\delta_1\,l = \delta_1\,\vartheta\,\delta_2\,S + \delta_1\,P\,\delta_2\,l\,.$$

Aus dieser allgemeinen Formel ergeben sich sofort die verschiedenen Gleichungen (19), wenn man jedesmal die Variation δ_1 einer der vier Grössen und die Variation δ_2 einer anderen, der anderen Zustandsseite angehörigen, gleich Null setzt.

Wir wollen Formel (22) noch allgemeiner schreiben, nämlich bezogen auf einen Körper, an dem wir die gleichzeitigen, umkehrbaren Aenderungen irgend zweier *beliebiger* Zustandsseiten verfolgen, die wir durch ihre Intensitätsgrössen J bez. J' und ihre Quantitätsgrössen M bez. M' kennzeichnen wollen, sodass also die Energiegleichung hier lautet:

$$(23)\qquad J\,d\,M + J'\,d\,M' = d\,E\,;$$

es ergiebt sich, Gleichung (22) entsprechend:

$$(24)\qquad \delta_1\,J\,.\,\delta_2\,M + \delta_1\,J'\,.\,\delta_2\,M' = \delta_2\,J\,.\,\delta_1\,M + \delta_2\,J'\,.\,\delta_1\,M'\,.$$

Die allgemeine Bedeutung dieser Formel rechtfertigt es wohl, wenn wir ihr eine besondere Bezeichnung beilegen, sie etwa nach bekannten Analogien benennen als das *Princip der virtuellen Zustandsänderungen.*

Es ist Formel (24) zugleich der allgemeine Ausdruck des von Ostwald[1]) aufgestellten und verwendeten „Princips der virtuellen Energien“, schliesst auch die von Peddie[2]) als „Verallgemeinerung des zweiten Hauptsatzes“ aufgestellte Formel und ein von Le Chatelier[3]) gegebenes „Gesetz für das Gleichgewicht bei physikalischen, chemischen und mechanischen Erscheinungen“ in sich.

1) W. Ostwald, Zeitschr. f. physik. Chem. **10**. p. 363. 1892.

2) W. Peddie, Proc. Roy. Soc. Edinb. **19**. p. 253. 1892; Zeitschr. f. physik. Chem. **13**. p. 128. 1894.

3) H. Le Chatelier, Zeitschr. f. physik. Chem. **1**. p. 565. 1887.

Ein Beispiel der leichten Anwendbarkeit unserer Formel sei hier gegeben. Wir betrachten ein System aus zwei Mengen desselben Körpers in verschiedenen Aggregatzuständen; hier kann unter Aufwand von thermischer und mechanischer Energie in zweierlei ganz verschiedener Weise der Zustand umkehrbar geändert werden:

1. Es wird Uebergang einer Menge dn des Stoffes aus der einen Phase in die andere bewirkt bei constanter Temperatur ϑ $(= J)$ und constantem Druck p $(= - J')$ unter Aenderung des Volumens V und der thermischen Ladung (Entropie) S:

$$\delta_1 J = 0\,, \quad \delta_1 J' = 0\,, \quad \delta_1 M = \frac{\partial S}{\partial n}\, dn\,, \quad \delta_1 M' = \frac{\partial V}{\partial n}\, dn\,;$$

2. Es wird ohne Stoffübergang durch gleichzeitige Aenderung von ϑ und p ein neues Gleichgewicht hergestellt:

$$\delta_2 J = d\vartheta\,, \quad \delta_2 J' = - dp\,;$$

unser Princip liefert sofort:

$$0 = d\vartheta \frac{\partial S}{\partial n}\, dn - dp \frac{\partial V}{\partial n}\, dn\,,$$

eine Gleichung, die durch Einführung der thatsächlich kalorimetrisch gemessenen thermischen Energiezufuhr

$$Q_n = \vartheta \frac{\partial S}{\partial n}$$

in die bekannte Clapeyron-Clausius'sche Beziehung übergeht.

Wie dies Beispiel schon zeigt, bietet unser so allgemein gültiges Princip ein bequemes und dabei correct formulirtes Schema dar, dessen Anwendung die sonst meist unter Behandlung passend construirter *Kreisprocesse* durchgeführten Rechnungen wesentlich abzukürzen gestattet.

Man kann auch Gleichung (24) selbst herleiten aus der Anwendung der in ihrer allgemeinsten Form (23) aufgestellten Energiegleichung auf einen im Unendlichkleinen durchgeführten Kreisprocess. Benutzen wir zur graphischen Darstellung der zweiseitigen Veränderlichkeit im Zustand des Körpers sowohl die J, M- als auch die J', M'-Coordinatenebene, so ergiebt sich ja, abgesehen von einem Minuszeichen, dass die in beiden Ebenen bei einem solchen Kreisprocess von der Bahn des

darstellenden Punktes umschlossenen Flächen an Inhalt einander gleich sein müssen:

$$\int\limits_{\mathfrak{K}\mathfrak{P}.} J\, d\, M = - \int\limits_{\mathfrak{K}\mathfrak{P}.} J'\, d\, M' .$$

Nun sei diese Bahn in der J, M-Ebene — und ganz entsprechend in der J', M'-Ebene — ein Parallelogramm, dessen Seiten die Projectionen $\delta_1 M$, $\delta_1 J$ und $\delta_2 M$, $\delta_2 J$ besitzen; dann ist dessen Inhalt bekanntlich

$$\delta_1 J \delta_2 M - \delta_2 J \delta_1 M,$$

und man hat also die Beziehung:

$$\text{(24a)} \quad \delta_1 J \delta_2 M - \delta_2 J \delta_1 M = - (\delta_1 J' \delta_2 M' - \delta_2 J' \delta_1 M')$$

in Uebereinstimmung mit (24). Wir können, worauf ich schon einmal hinwies, die Wechselwirkung der beiden Zustandsseiten auch formuliren als eine *Abbildung* der beiden Coordinatenebenen aufeinander *derart*, dass einander entsprechende geschlossene Curven in beiden gleichen Flächeninhalt haben.

So findet denn jenes für die Wechselwirkung zweier Zustandsseiten charakteristische Merkmal, dem wir ursprünglich durch das Gleichsetzen zweier Factoren der Zustandsgleichungen Ausdruck verliehen, noch mannichfach verschiedene Darstellung: im Energieprincip, im Princip der virtuellen Zustandsänderungen, in dessen geometrisch-anschaulicher Deutung.

Ein allgemeiner Satz über den Sinn der „Gegenwirknng“ eines stabilen Systems.

Mit dieser quantitativ festgelegten Gesetzmässigkeit hinsichtlich der Wechselwirkung steht nun in naher Beziehung ein nur qualitativ zu formulirender allgemeiner Satz über das Verhalten eines im stabilen Gleichgewicht befindlichen, nur umkehrbare Zustandsänderungen erfahrenden Systems. Er ist mit *allgemeiner* Gültigkeit von Ostwald, Braun, Gouy in verschiedener Form ausgesprochen worden, von anderer Seite mehrfach für *specielle* Gebiete.

Um diesen Satz im Anschluss an unsere bisherigen Betrachtungen zu formuliren, wollen wir ausgehen von dem System der Zustandsgleichungen, wie wir es aufzustellen haben in dem allgemeinen Fall, wo zwei beliebige Zustandsseiten

mit den Variabeln J, M und J', M' aufeinander wirken, sodass zwischen diesen vier Grössen zwei Gleichungen bestehen, die wir als Differentialgleichungen schreiben so, wie es in meinen früheren Arbeiten geschehen:

$$(25)\qquad \begin{cases} c\,dJ = dM - c\,r\,dM', \\ c'\,dJ' = dM' - c'\,r\,dM; \end{cases}$$

durch Umformung ergeben sich daraus die Gleichungen:

$$(25\,\text{a})\qquad \begin{cases} (1 - c\,c'\,r^2)\,dM = c\,dJ + c\,c'\,r\,dJ', \\ (1 - c\,c'\,r^2)\,dM' = c'\,dJ' + c\,c'\,r\,dJ, \end{cases}$$

die Verallgemeinerung der in unserem obigen Beispiel gültigen Gleichungen (10).

Die für den betrachteten Körper charakteristischen Grössen c, c', r, die im allgemeinen als selbst variabel gelten mögen, sind, wie man sieht, schon derart eingeführt, dass diese Zustandsgleichungen der allgemeinen Wechselwirkungsbedingung [im obigen speciellen Fall Gleichung (12)] genügen.

Hinsichtlich dieser Grössen c, c', r wollen wir nun für das folgende eine Annahme benutzen, die wohl als selbstverständlich gelten darf; wir wollen nämlich annehmen, dass wir für jede beliebige Zustandsseite die sie kennzeichnenden Variabeln J und M immer so wählen können, dass J gleichzeitig mit M wächst und abnimmt, gleichgültig, welche von den Variabeln der *fremden* Zustandsseiten wir dabei constant setzen, d. h. es soll

$$\left(\frac{\partial J}{\partial M}\right)_{M'} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial J}{\partial M}\right)_{J'}$$

als positiv angesehen werden, ebenso entsprechend

$$\left(\frac{\partial J'}{\partial M'}\right)_{M} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial J'}{\partial M'}\right)_{J}.$$

Man braucht sich nur einige Beispiele zu vergegenwärtigen, um das Zutreffende dieser Annahme zu erkennen: wir setzen die Temperatur anwachsend durch Wärmezufuhr (in unserer Auffassung Vermehrung der thermischen Ladung), die Länge eines Drahtes anwachsend mit seiner Spannung, setzen die Dielektricitätsconstante, die Magnetisirungsconstante positiv — Grössen, die nach unserer Darstellungsweise als Differentialquotienten einer Quantitäts- nach der zugehörigen Intensitäts-

grösse erscheinen. Auch für das Verhältniss zwischen Druck und Volumen gilt dies, sobald wir hier nur consequent $-p$ als Intensität betrachten.

Danach haben wir also von den Factoren unserer Zustandsgleichung c und c' als positiv anzusehen und ebenso den Ausdruck $1 - c c' r^2$. Für den Wechselwirkungsfactor r ergiebt sich daraus eine obere Grenze:

$$r^2 < \frac{1}{c c'}.$$ [1]

Beachten wir das, so kommen wir nun zu folgenden Schlüssen über das gegenseitige Verhältniss von Differentialquotienten, die sich nicht wie die obigen auf nur *eine* Zustandsseite, sondern auf die Wechselwirkung zwischen zwei solchen beziehen.

Wir berechnen:

$$(26) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial M'}{\partial M}\right)_{J'} = c' r, & \left(\dfrac{\partial M}{\partial M'}\right)_{J} = c r, \\ \left(\dfrac{\partial J'}{\partial M}\right)_{M'} = -r, & \left(\dfrac{\partial M}{\partial J'}\right)_{J} = \dfrac{c c' r}{1 - c c' r^2}, \end{cases}$$

und finden also, dass die beiden Grössen

$$(27) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial M'}{\partial M}\right)_{J'} \text{ und } \left(\dfrac{\partial M}{\partial M'}\right)_{J} \text{ gleiches Vorzeichen, dagegen} \\ \left(\dfrac{\partial J'}{\partial M}\right)_{M'} \text{ und } \left(\dfrac{\partial M}{\partial J'}\right)_{J} \text{ entgegengesetztes Vorzeichen haben.} \end{cases}$$

Durch diese qualitativen Beziehungen ist nun jener allgemeine Satz analytisch formulirt, um dessen begrifflich-anschauliche Aussprache man sich, wie erwähnt, verschiedentlich bemüht hat.

Am nächsten schliesst sich unserer Herleitung an die von Gouy[2]) gegebene Darstellungsweise. Gouy betrachtet ein im

---

1) Da also $1 - c c' r^2 < 1$, so folgt:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial J}\right)_{J'} > \left(\frac{\partial M}{\partial J}\right)_{M'},$$

d. h. z. B. die isothermische Compressibilität grösser als die adiabatische, die isothermisch gemessene Dielektricitätsconstante grösser als die adiabatisch gemessene, die thermische Capacität bei constantem Druck grösser als die bei constantem Volumen, etc. (allgemein formulirt von Cl. Maxwell, Theory of heat p. 131.

2) Gouy, Compt. rend. 108. p. 341. 1889; auch Journ. de Phys. (2) 8. p. 501. 1889.

stabilen Gleichgewichte befindliches System, auf das von aussen ein bestimmter *Einfluss* ausgeübt wird (action de l'opérateur), der in einer Aenderung des Volumens oder der Form, in einer Zuführung von Elektricität oder Wärme, d. h. nach unserer Ausdrucksweise: in der Aenderung einer bestimmten *Quantitäts*grösse M des Systems besteht. Die *Wirkungen* (effets) dieses Einflusses sind nun zweierlei Art, entweder *unbeständige*, wie Aenderungen der Temperatur, des Druckes, des elektrischen Potentials, d. h. allgemein einer fremden *Intensitäts*grösse J', oder *beständige*, zu denen er Aenderungen der Form, des Volumens, der chemischen Zusammensetzung etc. rechnet, d. h. Aenderungen einer fremden *Quantitäts*grösse M'.

Es ist diese Unterscheidung und Bezeichnung durchaus zutreffend, denn Aenderungen der Intensitäten können, da die gleichen Grössen der Umgebung als constant vorausgesetzt werden, nicht bestehen bleiben, sondern werden wieder zu verschwinden streben, was für Aenderungen der Quantitätsgrössen *nicht* gilt. Aus seinen unter Anwendung des Begriffs der „nutzbaren“ Energie durchgeführten Betrachtungen erschliesst nun Gouy folgenden Satz:

„Die unbeständigen Wirkungen widersetzen sich dem Einflusse des Experimentators, die beständigen Wirkungen begünstigen ihn.“

Wir können darin eine directe Aussprache unserer obigen Beziehungen sehen; denn denken wir uns die Wirkungen des äusseren Einflusses ∂M, d. h. die Aenderungen $\partial J'$ und $\partial M'$, selbst als Ursache von „Gegenwirkungen“ des Systems, von Rückwirkungen desselben auf die primär geänderte Grösse M, so besagen unsere Relationen: Die Rückwirkung ∂M hat das *entgegengesetzte* Vorzeichen wie der ursprüngliche Einfluss ∂M, wenn sie durch dessen „*unbeständige*“ Wirkung $\partial J'$, dagegen das *gleiche* Vorzeichen, wenn sie durch die „*beständige*“ Wirkung $\partial M'$ veranlasst ist — das ist genau der Inhalt des Gouy'schen Satzes.

Einige der bekanntesten Beispiele seien hier angeführt: Durch adiabatische Volumverminderung erwärmt sich ein Gas, d. h. $(\partial \vartheta / \partial v)_S < 0$, also muss gelten $(\partial v / \partial \vartheta)_p > 0$, d. h. das Gas dehnt sich bei isobarischer Temperatursteigerung aus. Andererseits: Die durch Steigerung der Concentration (M)

einer gesättigten Lösung bedingten Volumenänderungen (dM') sind immer derart, dass sie selbst ihrerseits eine verstärkte Auflösung bedingen würden; das Gleiche gilt für den begleitenden Wärmeaustausch mit der Umgebung (die Aenderung der thermischen Ladung S).

Die Herleitung unserer beiden Beziehungen (27) beruht wesentlich auf jener *einen* allgemeinen Reciprocitätsbedingung, die die beiden Zustandsgleichungen miteinander in Verbindung setzt und in der Einführung des beiden Gleichungen gemeinsamen Factors r ihren directen Ausdruck findet. Die bloss qualitative Folgerung aus jener quantitativen Festsetzung ist also auch schon in jeder *einzelnen* der beiden Beziehungen (27) enthalten, es lässt sich die andere dann mit Berücksichtigung unserer als selbstverständlich bezeichneten Annahmen über die Factoren c und c' ohne weiteres herleiten. Dem entsprechend kommt in der Form, in der Ostwald[1]) und Braun[2]) den allgemeinen Satz ausgesprochen haben, auch nur *eine* unserer Beziehungen (27), nämlich die zweite, zur unmittelbaren Wiedergabe: $\partial J' / \partial M_{M'}$ und $\partial M / \partial J'_J$ haben entgegengesetztes Vorzeichen.

Ostwald's Formulirung[1]) lautet:

„Die correlative Begleiterscheinung bei einer zwangsweisen Veränderung eines Systems wirkt diesem Zwange entgegen.“

Dabei muss man also, wenn als das primäre, der Zwang, die Aenderung einer *Quantitäts*grösse bezeichnet wird, unter der correlativen Begleiterscheinung die Aenderung einer fremden *Intensität* verstehen — und umgekehrt.

Braun stellt den Satz in folgender Fassung auf:

„Der Uebergang eines Systems in einen neuen Gleichgewichtszustand ist immer derart, dass diejenige willkürlich hervorgebrachte Aenderung der einen Variabeln, welche den Uebergang veranlasst, bei dem Uebergange von selber ihrem absoluten Betrage nach abnimmt. Ein stetig stabil veränderliches System ist also gleichzeitig ein sich selbst beruhigendes.“

Wenn es sich darum handelt, durch Beispiele, wie sie

1) W. Ostwald, Lehrbuch d. allg. Chemie **2.** p. 735. 1887.

2) F. Braun, Zeitschr. f. physik. Chem. **1.** p. 269. 1887; Wied. Ann. **33.** p. 337. 1888.

namentlich Braun in grösserer Zahl giebt, diese Sätze zu belegen und zu erläutern, so wird vielfach stillschweigend von unseren „selbstverständlichen" Voraussetzungen über die Grössen c Gebrauch gemacht, und der *specielle* Ausdruck des Satzes erscheint dann vielfach in einer Form, die sich direct als eine Anwendung unserer *ersten* Beziehung (27) erweist: $\partial M' / \partial M_{J'}$ und $\partial M / \partial M'_J$ haben gleiches Vorzeichen.

Schon bevor der hier behandelte Satz in seiner ganzen Allgemeinheit — zuerst von Ostwald — aufgestellt wurde, war er, darauf sei hier kurz hingewiesen, verschiedentlich für Einzelgebiete ausgesprochen worden. Lippmann[1]) hatte ihn in seiner Behandlung der Wechselwirkung zwischen *elektrischen* und andersartigen Vorgängen als Erweiterung des Lenz'schen Inductionsgesetzes formulirt, van't Hoff[2]), Le Chatelier[3]), Potier[4]) zeigten, wie speciell der Sinn umkehrbarer *chemischer Reactionen* unter Bezugnahme auf die damit verknüpften *thermischen* Erscheinungen durch solch ein allgemeines Gesetz bestimmt sei, das in gewissem Sinne an die Stelle des an sich unbegründeten Berthelot'schen „Princips der grössten Arbeit" treten kann.

Einen Punkt möchte ich schliesslich noch hervorheben: Der von uns behandelte Satz über das gegenseitige Verhältniss zweier Differentialquotienten von der Art $\partial M / \partial J'_J$ und $\partial J' / \partial M_{M'}$ lässt das Vorzeichen des einen bestimmen, *wenn* das des anderen bekannt ist. Eine andere Frage ist nun aber die, ob wir etwa von Haus aus über das Vorzeichen eines der beiden bestimmte Aussagen machen können. Nach dem Obigen, Gleichungen (26), kommt dies darauf hinaus, ob das Vorzeichen des Wechselwirkungsfactors r allgemein bestimmt, ob r z. B. als wesentlich positiv anzusehen ist so gut wie die c. In dem Eingangs benutzten Beispiele der thermisch-elastischen Vorgänge in einem Drahte ergiebt sich

$$r = -\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial l}\right)_S$$

1) G. Lippmann, Ann. de Chim. et de Phys. (5) **24**. p. 172. 1881.

2) J. H. van't Hoff, Études de dynamique chimique, p. 161. Amsterdam 1884; Vorles. über theoret. u. phys. Chem. **1**. p. 154. 1898.

3) H. Le Chatelier, Compt. rend. **99**. p. 786. 1884.

4) A. Potier, Journ. de Phys. (2) **5**. p. 56. 1886.

erfahrungsgemäss als positiv. Aber schon beim Kautschuk versagt die hier zu vermuthende Regel, insofern bei ihm *ɪ* mit wachsender Spannung sein Vorzeichen wechselt. Aehnlich finden wir auch in anderen Fällen das Vorzeichen des Wechselwirkungsfactors schwankend. Trotzdem glaube ich, dass man diese Frage im Auge behalten soll. Sie wird neues Interesse gewinnen, wenn wirklich gelingt, was ich oben als erstrebenswerth bezeichnete: die Grundgleichungen durch vollständige Berücksichtigung aller mit ins Spiel tretender Zustandsseiten so auszubauen, dass ihre Factoren als wirkliche *Constanten* des Körpers erscheinen.

Leipzig, Juli 1899.

(Eingegangen 15. Juli 1899.)

5. *Weitere Versuche an Becquerelstrahlen;*
von J. Elster und H. Geitel.

I. Bemühungen, die Energiequelle der Becquerelstrahlen zu finden.[1])

Im Folgenden erlauben wir uns über eine Reihe von Versuchen zu berichten, die das Ziel hatten, die Energiequelle der von Hrn. H. Becquerel entdeckten Strahlen zu finden. Diese Strahlen werden von dem Metalle *Uran* und allen seinen Verbindungen, ferner (nach den Untersuchungen von Hrn. und Frau Curie und Hrn. G. C. Schmidt) auch von allen *thor*haltigen Substanzen ausgesandt; kürzlich haben die erstgenannten französischen Physiker in Gemeinschaft mit Hrn. Bémont[2]) die Existenz zweier weiterer „radioactiver“ Stoffe als wahrscheinlich hingestellt, die aus dem Uranpecherz von Joachimsthal in Böhmen gewonnen werden können.

Die Becquerelstrahlen sind am einfachsten zu charakterisiren, indem man sie als Röntgenstrahlen geringer Intensität bezeichnet; wie diese wirken sie auf die photographische Platte, ertheilen der Luft ein elektrisches Leitungsvermögen und gehen durch Metallschichten, auch lassen sich Leuchterscheinungen an phosphorescirenden Körpern durch sie hervorrufen.

Soweit die bis jetzt gesammelten Erfahrungen reichen, bleibt die Intensität der Strahlung ohne erkennbare Energiezufuhr andauernd constant.

Unsere Versuche, die wir zumeist an einem elliptischen Stücke Joachimsthaler Pechblende von 300 g Gewicht und etwa 7 cm Länge, 5 cm Breite und 1,5 cm Dicke ausführten,

1) Mitgetheilt a. d. XI. Jahresber. d. Vereins f. Naturwissensch. in Braunschweig 1898/99. Sitzung vom 19. Januar 1899.

2) P. Curie, Mme. P. Curie et M. G. Bémont, Compt. rend. 127. p. 1215. 1898.

gingen darauf aus, eine Veränderung in der Intensität der Strahlen künstlich herbeizuführen. Trotz der negativen Ergebnisse dürften diese Bemühungen nicht ohne Interesse sein, da hierdurch das Eigenartige jener wunderbaren Erscheinung deutlich hervortritt.[1])

Da, wie bemerkt, die Becquerelstrahlen dem Wesen nach den Röntgen'schen gleichen, so liegt die Annahme nahe, dass sie wie diese durch Kathodenstrahlen erregt oder wenigstens zu grösserer Intensität entfacht werden könnten. Wie andere Substanzen, so senden auch die Uranverbindungen, solange sie von Kathodenstrahlen getroffen werden, Röntgenstrahlen aus; es kam nun darauf an, festzustellen, ob irgend eine Nachwirkung dieser Erregung erkennbar sei. Ein Stück Urankaliumsulfat wurde eine Zeit lang im Vacuum durch Kathodenstrahlen in lebhafte Phosphorescenz versetzt, dann herausgenommen und auf eine photographische Platte gelegt, die in lichtdichtes Papier gewickelt war. Zwischen der Platte und dem Uranpräparate befand sich eine durchlochte Scheibe aus dickem Stanniol, von deren Oeffnungen nach dem Entwickeln der Platte das Bild erschien. Indessen liess sich kein Unterschied in der Stärke des Bildes gegen ein anderes erkennen, das auf derselben Platte mit demselben Stücke Urankaliumsulfat in gleicher Zeit (24 Stunden) erhalten war, bevor das letztere den Kathodenstrahlen ausgesetzt wurde.

Man könnte gegen diese Versuchsanordnung den Einwand erheben, dass eine durch die Kathodenstrahlen hervorgerufene Erregung der Uransubstanz vielleicht sehr schnell abklingen könne, sodass sie schon nahezu unmerklich würde während der Zeit, die das Herausnehmen aus der Vacuumröhre erfordert. Um daher die Untersuchung möglichst bald nach Einwirkung der Kathodenstrahlen vornehmen zu können, construirten wir eine Vorrichtung nach der Art der von Hrn. Lenard angegebenen, durch die wir die Kathodenstrahlen — allerdings stark mit Röntgenstrahlen vermischt — im freie Luftraume erhielten. Ein cylindrisches Glasrohr von 54 cm

1) Auch Hr. H. Becquerel bemerkt am Schlusse einer inzwischen erschienenen Arbeit, dass es ihm nicht gelungen sei, durch physikalische Einflüsse eine merkbare Aenderung in der Intensität jener Strahlen hervorzurufen (vgl. Compt. rend. 128. p. 777. 1899).

Länge und 5 cm Durchmesser ist an beiden Enden durch aufgekittete Metallkappen verschlossen. Durch die eine ist ein Glasrohr geführt, in dem ein Draht entlang läuft, der im Innern des Rohres die Kathodenscheibe trägt, ein zweites stellt die Verbindung mit der Pumpe her. Die der Kathode gegenüber stehende Kappe hat eine kreisförmige Oeffnung von etwa 4 cm Weite, über diese ist ein Drahtnetz von $^1/_2$ bis 1 mm Maschenweite gespannt, das am Rande fest mit der Metallkappe verlöthet ist. Auf das Drahtnetz wird lose ein Stück Aluminiumfolie (Dicke 0,02 mm) von etwas grösserem Durchmesser gelegt, seine Ränder werden dann durch einen leichtflüssigen Kitt (Colophonium und Wachs) auf der Metallkappe luftdicht befestigt. Beim Auspumpen legt sich das Aluminiumblatt fest auf das darunter liegende Drahtnetz und wird von diesem vor dem Zerreissen bewahrt. Das Drahtnetz dient zugleich als Anode.

Man erkennt in dieser Vorrichtung das Lenard'sche Rohr wieder, nur mit der Modification, dass statt *eines* Fensters mehrere Hundert verwendet werden, allerdings ist zugleich die Dicke der Aluminiumfolie (da so grosse Flächen sonst schwerlich lochfrei zu haben sind) wesentlich stärker gewählt. Schliesst der Apparat luftdicht, so kann man mittels eines Inductors von etwa 15 cm Schlagweite für kurze Zeit sehr kräftige Strahlen ins Freie treten lassen, durch die phosphorescirende Körper zu einem intensiven Leuchten gebracht werden, das an Kathodoluminescenz im Vacuum erinnert. Wir maassen nun die durch das oben genannte Stück Pechblende hervorgerufene Elektricitätszerstreuung, und zwar zuerst, bevor wir dasselbe den Strahlen ausgesetzt hatten und dann unmittelbar nachher. Aber auch hier war ein Unterschied nicht erkennbar. Natürlich wurden diese Zerstreuungsversuche in einem anderen Raume angestellt, der gegen die Einwirkung des Inductors geschützt war.

Auch das Sonnenlicht erwies sich als ohne Einfluss auf die durch die Becquerelstrahlen verursachte Elektricitätszerstreuung[1]), dagegen stellte sich bei Beobachtungen im Freien

1) Uebereinstimmend mit unseren früheren Ergebnissen. Versuche über Hyperphosphorescenz (vgl. X. Jahresber. d. Vereins f. Naturwissensch. zu Braunschweig 1897).

heraus, dass durch Luftbewegung stets eine Verminderung dieser Zerstreuung bewirkt wird. Bei diesen Versuchen wurde das Uranerz entweder direct auf ein kleines, am Elektroskope befestigtes Metallschälchen oder auf die obere Fläche eines den Knopf des Elektroskops umschliessenden Drahtnetzes gelegt. Wie gross der Radius des von den Becquerelstrahlen leitend gemachten Luftvolumens ist, erkennt man daraus, dass ein Anblasen des Uranerzes durch ein Gebläse die Elektricitätszerstreuung viel weniger hindert, wie die gleichmässige, durch den Wind im Freien bewirkte Bewegung der gesammten umgebenden Luft. Im ersten Falle werden nur die leitenden Lufttheilchen in unmittelbarer Nähe des Uranerzes entfernt, während im zweiten auch die weiter abliegenden bei Seite getrieben werden. Erwähnenswerth ist noch, dass eine künstliche Elektrisirung der Zimmerluft (vermittelst einer isolirten, mit der eine Polstange einer thätigen Influenzmaschine verbundenen Flamme) in gleicher Weise diese Zerstreuung von dem geladenen Elektroskope zu dem umgebenden Drahtnetze vermindert. Es liegt hier offenbar die von den Herren J. J. Thomson und E. Rutherford beobachtete Erscheinung vor, dass die durch Röntgenstrahlen leitend gemachte Luft diese Fähigkeit eben dadurch wieder einbüsst, dass sie eine Elektricitätsübertragung vermittelt.

Ein Einfluss der Temperatur auf die Emission der Becquerelstrahlen liess sich mit Sicherheit nicht feststellen. Die experimentellen Schwierigkeiten sind in diesem Falle besonders gross, da bei der elektrischen Methode der Messung der Einfluss der Wärme auf die Elektricitätszerstreuung in Anrechnung zu bringen und bei der photographischen die Temperatur der Platte constant zu halten wäre.

In Betreff der von Hrn. und Frau Curie angekündigten neuen Elemente können wir bestätigen, dass in der That das nach den Angaben jener Forscher aus der Joachimsthaler Pechblende auf chemischem Wege abgeschiedene Wismuth Becquerelstrahlen von weit grösserer Intensität aussendet, als irgend eine Uranverbindung. Da das reine Wismuth keine Strahlen giebt, so muss die Wirkung einer noch unbekannten Beimengung zugeschrieben werden. Unter der Voraussetzung, dass sie von einem Elemente ausgeht, haben Hr. und Frau

Curie für diesen noch nicht isolirten Stoff bekanntlich den Namen *Polonium* vorgeschlagen.

Bei diesen chemischen Arbeiten fiel es uns auf, dass auch das aus demselben Uranerze (durch Fällen der salpetersauren Lösung mit Schwefelsäure) gewonnene Bleisulfat kräftige Strahlen aussandte, während reine Bleiverbindungen unwirksam sind. Durch Ammoniumtartrat lässt sich das inactive Bleisulfat ausziehen und ein Rückstand von sehr hohem Strahlungsvermögen gewinnen. Wie Hr. und Frau Curie und Hr. Bémont in der schon erwähnten, soeben erschienenen Arbeit mittheilen, haben sie aus der Pechblende einen zweiten „radioactiven“ Körper gewonnen, der in seinem chemischen Verhalten dem *Barium* nahe steht und für den sie den Namen *Radium* gewählt haben. Wir können daher nach unseren Erfahrungen die Existenz eines unlöslichen Sulfates bestätigen, das sehr intensive Becquerelstrahlen aussendet. Ob dieses einem neuen Elemente angehört, wird mit Sicherheit auf spectroskopischem Wege feststellbar sein. Sehr interessant ist daher die Angabe des Hrn. Demarçay[1]), dass er bei einer ihm von Hrn. und Frau Curie übersandten Substanzprobe neben den Spectrallinien des Baryums eine neue nicht mit anderen bekannten zu identificirende gefunden habe.

Hr. F. Giesel hat den Weg eingeschlagen, die Rückstände von der Urangewinnung auf solche radioactiven Bestandtheile zu verarbeiten. Es ist ihm gelungen, auf diese Weise geringe Mengen einer Substanz zu erhalten, die den Baryumplatincyanürschirm zu deutlichem Leuchten bringt, wie es auch die französischen Forscher an ihren Präparaten gefunden haben. Diese Lichtentwickelung ohne irgend eine bis jetzt bekannte Energiequelle ist sehr merkwürdig. Von weit geringerer Intensität, aber dem im Dunkeln vollständig ausgeruhten Auge deutlich sichtbar, ist das andauernde Leuchten eines mehrere Millimeter dicken Kuchens von Urankaliumsulfat. Vorherige Belichtung oder monatelanges Halten im Dunkeln ist anscheinend ohne jeden Einfluss auf diese schwache Lichtentwickelung, die demnach der Phosphorescenz des Urankaliumsulfats unter der Einwirkung der von derselben Substanz ausgesandten Becquerelstrahlen zuzuschreiben ist.

1) E. Demarçay, Compt. rend. 127. p. 1218. 1898.

Da die Eigenschaft, Becquerelstrahlen auszusenden, wie es scheint, allen chemischen Verbindungen eines wirksamen Elementes zukommt, so kann sie nicht wohl als Begleiterscheinung eines im eigentlichen Sinne chemischen Vorganges gedeutet werden, man wird vielmehr aus dem Atome des betreffenden Elementes selber die Energiequelle ableiten müssen. Der Gedanke liegt nicht fern, dass das Atom eines radioactiven Elementes nach Art des Molecüles einer instabilen Verbindung unter Energieabgabe in einen stabilen Zustand übergeht. Allerdings würde diese Vorstellung zu der Annahme einer allmählichen Umwandlung der activen Substanz zu einer inactiven nöthigen und zwar folgerichtiger Weise unter Aenderung ihrer elementaren Eigenschaften. Ob diese gewagte Annahme aufrecht erhalten werden kann, wird zunächst von dem Erfolge der Bemühungen abhängen, die Energie der Becquerelstrahlen auf eine bekannte Quelle zurückzuführen.

II. Ueber den Einfluss eines magnetischen Feldes auf die durch die Becquerelstrahlen bewirkte Leitfähigkeit der Luft.[1]

Es ist bekannt, dass der elektrische Widerstand einer Strecke verdünnten Gases durch die Erregung eines magnetischen Feldes beeinflusst wird, und zwar beobachtet man im allgemeinen eine Zunahme des Widerstandes, sofern nur nicht die Stromesrichtung mit der der magnetischen Kraftlinien zusammenfällt. Sehr deutlich zeigt sich diese Wirkung bei der durch Belichtung einer photoelektrisch empfindlichen Kathode oder vermittelst glühender Elektroden eingeleiteten Gasentladung, sobald der günstigste Druck (etwa 0,5—1,0 mm) hergestellt ist. Auch die gewöhnliche Elektricitätszerstreuung in einem verdünnten Gase wird, wie Hr. A. Righi gefunden hat, innerhalb eines magnetischen Feldes verzögert.

Es schien uns nun von Interesse festzustellen, ob auch die durch die Becquerelstrahlen einem Gase mitgetheilte Leitfähigkeit durch magnetische Kräfte verändert werden kann. Der Ausführung des Versuches steht die Schwierigkeit gegenüber, dass dies Leitvermögen bei so niedrigen Gasdrucken,

1) Aus den Verhandl. der Deutschen Physikal. Gesellsch., I. Jahrg. Nr. 7. 5. Mai 1899 mitgetheilt.

wie sie für den zu erwartenden magnetischen Effect erforderlich sind, ohnehin sehr gering wird. Es gelang uns daher auch nicht, mit den doch nur schwach wirkenden Uranpräparaten unzweideutige Ergebnisse zu erzielen. Dagegen versprach die weit intensiver strahlende Substanz, die man nach dem Verfahren von Hrn. und Frau Curie und Hrn. Bémont aus der Pechblende als Begleiter der Baryumverbindungen gewinnen kann, denen sie in äusserst geringer Menge anhaftet, viel eher einen Erfolg. Wir verdanken der Freundlichkeit des Hrn. Giesel in Braunschweig ein Präparat, das sich chemisch wie Chlorbaryum verhält, aber in Berührung mit der Luft wie eine Flamme diese leitend macht und selbst durch eine 4 mm starke Messingplatte hindurch noch eine entladende Wirkung äussert. Baryumplatincyanür sowie krystallisirtes Urankaliumsulfat werden in einigen Centimetern Entfernung, selbst bei Einschaltung eines metallenen Schirmes, zu deutlicher Phosphorescenz erregt.

Wir füllten mit diesem „radiumhaltigen" Salze ein kleines Aluminiumschälchen von etwa 10 mm Durchmesser und 2 mm Tiefe, das innerhalb eines Glasrecipienten von etwa 30 mm Weite von einem eingeschmolzenen Platindraht getragen wurde. Etwa 2 cm über der Substanz befand sich die zweite, durch eine aufgekittete Ebonitplatte geführte Elektrode. Wurde nun der Recipient auf etwa 1 mm Druck evacuirt, und das Schälchen durch eine Zamboni'sche Säule auf ein Potential von etwa 500 Volt geladen, während die darüber befindliche Elektrode mit einem Bohnenberger'schen Elektroskop in Verbindung stand, so liess sich, bei Aufhebung der Erdleitung des Elektroskops an der Bewegung des Blättchens dieses Instrumentes der infolge der kräftigen Strahlung sehr merkliche Elektricitätsübergang von der Schale zur Elektrode beobachten. Brachten wir nun einen Hufeisenelektromagneten so an, dass die Verbindungslinie seiner Pole senkrecht zu der von Schale und Elektrode verlief, so bewirkte seine Erregung sofort eine beträchtliche Verlangsamung in dem Gange des Blättchens, die mit dem Erlöschen des Magnetfeldes verschwand.

Indessen ist hierbei die Möglichheit nicht ausgeschlossen, dass die von dem Salze ausgehenden Becquerelstrahlen selbst in dem verdünnten Gase durch das Magnetfeld eine Ablenkung

erlitten hätten, der zufolge sie vielleicht aus dem Raume zwischen Elektrode und Schale herausgedrängt wären. Auch so konnte eine Verminderung der Entladungsgeschwindigkeit zu Stande kommen, indem nun das Gas vorzugsweise an solchen Stellen leitend gemacht wäre, wo das elektrische Potentialgefälle verhältnissmässig gering war.

Um die hier hervortretende, ganz abgesehen von der vorliegenden Untersuchung bedeutungsvolle Frage zu entscheiden, ob die Becquerelstrahlen eine Ablenkung durch magnetische Kräfte erfahren, benutzten wir die Phosphorescenz des Baryumplatincyanürs. Wir brachten wiederum die Substanz in das erwähnte Schälchen, schlossen nun aber den Recipienten in etwa 15 mm Höhe über diesem durch eine 0,1 mm starke Aluminiumplatte, durch die wir die Strahlen ins Freie treten liessen, luftdicht ab, und stellten durch Evacuiren den gleichen Druck, wie bei dem oben beschriebenen Versuch her. Legten wir nun auf die Aluminiumplatte einen kleinen Leuchtschirm aus Baryumplatincyanür, so war auf diesem im völlig dunkelen Zimmer ein Lichtfleck, herrührend von der Strahlung des Inhaltes der Schale, deutlich sichtbar. Bei Erregung des Magnetfeldes behielt er seine Lage unverändert bei, auch wenn wir den Gasdruck soweit erniedrigten, dass in einem zugleich an die Pumpe angeschlossenen Geissler'schen Rohre durch die Entladung eines Inductoriums lebhafte Kathodenstrahlen entwickelt wurden.

Die Becquerelstrahlen erfahren demnach keine Ablenkung durch magnetische Kräfte, die mit der der Kathodenstrahlen vergleichbar wäre, stimmen also auch in dieser Beziehung — wie in allen übrigen bis jetzt bekannten Eigenschaften — mit den Röntgenstrahlen überein.

Die durch sie bewirkte Leitfähigkeit der Luft wird, wie in anderen Fällen der Entladung durch verdünnte Gase, bei einem Druck von etwa 1 mm durch Erregung eines magnetischen Feldes vermindert.

(Eingegangen den 5. August 1899.)

— — ———

6. *Einiges über das Verhalten des radioactiven Baryts und über Polonium; von F. Giesel.*

Im Anschlusse an die vorstehende Veröffentlichung von Elster und Geitel halte ich es für angezeigt, einige Beobachtungen, welche ich bei Darstellung radioactiver Präparate aus Uranerzen gemacht habe, anzufügen, weil mir dieselben unsere Kenntniss der Becquerelstrahlen wesentlich zu erweitern scheinen.

Ich hatte zu gleicher Zeit und unabhängig von P. und S. Curie aus Producten der Uransalzfabrikation, die ich der Freundlichkeit des Hrn. de Haën (chemische Fabrik in Hannover) verdankte, einen wesentlich aus schwefelsaurem Baryt bestehenden Körper isolirt, der stark Becquerelstrahlen ausgab und den Baryumplatincyanürschirm zum Leuchten brachte. Der Körper erwies sich als identisch mit der von Curie dargestellten, das sogenannte Radium enthaltenden Substanz, obwohl nicht Pechblende, sondern andere Uranerze das Ausgangsmaterial bildeten. Das gereinigte Chlorid ergab ein sehr wirksames Präparat, welches Elster und Geitel benutzten und welches auch der Deutschen Physikalischen Gesellschaft vorgelegen hat.

Da es nicht ausgeschlossen schien, dass eine noch weiter gehende Anreicherung der activen Substanz unter Verwendung grösserer Mengen, als mir darzustellen möglich war, zu erreichen sein würde, veranlasste ich die genannte Fabrik, grosse Erzquantitäten auf diesen Stoff zu verarbeiten. Ich erlangte auf diese Weise soviel der nur in äusserst geringen Mengen in den Uranerzen vorkommenden Substanz, dass ich bereits etwas eingehender die Eigenschaften studiren konnte.

Folgende Thatsachen sind bis jetzt von mir beobachtet worden:

1. Die radioactiven Barytsalze (also die radiumhaltigen) zeigen, frisch aus Wasser krystallisirt, anfangs nur ganz geringe Activität. Dieselbe nimmt aber im Laufe einiger Tage bis Wochen immer mehr zu, bis ein Maximum der Wirkung erreicht ist, um dann constant zu bleiben.

2. Eine concentrirte Lösung des activen Chlorids in Wasser giebt anfangs fast dieselbe Strahlung wie das feste Salz. Nach einiger Zeit aber nimmt die Activität immer mehr ab und verschwindet fast vollständig. Die aus der Lösung abgeschiedenen Krystalle gewinnen, gerade wie es unter 1. geschildert ist, ihre Activität allmählich wieder.

3. Alle radioactiven Barytsalze, die ich untersucht habe (etwa ein Dutzend), besitzen in den ersten Krystallisationen die stärkste Wirkung, während aus der Mutterlauge successive immer weniger wirksame Präparate erhalten werden.

Je concentrirtere Laugen hergestellt werden können, um so schneller und vollständiger ist der gewünschte Effect zu erreichen.

4. Das Chlorid, besonders aber das Bromid (auch das Jodid) zeigt eine von einer etwaigen Vorbelichtung unabhängige Phosphorescenz in den eigenen Strahlen, die besonders stark bei den (durch Erhitzen der Krystalle) entwässerten Salzen hervortritt. Das wasserfreie Bromid phosphorescirt sehr kräftig in blaugrünlichem Lichte. An feuchter Luft zieht es Wasser an und die Phosphorescenz wird geringer, lässt sich aber beliebig oft durch erneutes Erhitzen zur gleichen Intensität bringen. Die Phosphorescenz verschwindet in der Hitze und tritt nur in der Kälte hervor.

Diese Eigenphosphorescenz des Bromids tritt nach dem Entwässern sofort in voller Stärke auf, noch bevor sich die Becquerelstrahlung desselben voll entwickelt hat. Je stärker die Phosphorescenz an ein und demselben Präparate ist, desto geringer scheint die Becquerelstrahlung zu sein.

5. Das aus activem Baryumchlorid und Kaliumplatincyanür unter Zusatz von wenig Cyankalium dargestellte grüne Doppelsalz von Baryumplatincyanür phosphorescirt, wie zu erwarten war, sehr stark von selbst. Das Leuchten wird aber mit der Zeit schwächer, weil allmählich durch die fortgesetzte Einwirkung der eigenen Strahlen das grüne Salz zunächst in

das weniger empfindliche gelbe und schliesslich in das *braune* übergeht, analog dem Verhalten des gewöhnlichen Baryumplatincyanürs bei andauernd intensiver Einwirkung von Röntgenstrahlen. Durch Auflösung des braunen Salzes und erneute Krystallisation ist das grüne Salz wieder darstellbar.

6. Ein sehr stark wirksames Chlorbaryum, welches anfangs farblos war, färbte sich mit zunehmender Activität mit einem Stich ins Gelbliche. —

Die Hauptfrage, wie weit die Radioactivität überhaupt gesteigert werden kann und ob eventuell der eigentlich active Stoff vom Baryum getrennt und isolirt werden kann, ist noch nicht erledigt. Nur soviel scheint sicher zu sein, dass durch fractionirte Krystallisation allein, auch bei der jetzt möglichen Verwendung weit grösserer Quantitäten, als früher, eine noch weiter gehende Verbesserung der Präparate, als im Anfange schon erreicht worden ist, nicht möglich ist.

Mit der Untersuchung der neben Radium gleichzeitig, aber in geringeren Mengen gewonnenen, stark activen, poloniumhaltigen Stoffe bin ich noch beschäftigt. Ich habe aber aus ihnen durch Schwefelwasserstoff einen Niederschlag erhalten, der an Wirksamkeit das beste Baryumpräparat noch übertrifft. Ebenso wirksam ist das aus dieser Schwefelverbindung dargestellte Chlorid, sowie das aus der Lösung des letzteren durch metallisches Zink oder den galvanischen Strom sich abscheidende freie Metall.

Ein auffallender Unterschied tritt bezüglich des Durchdringungsvermögens der von den beiden chemisch sich unterscheidenden radioactiven Körpern ausgesandten Strahlen hervor. Während die Strahlen des Radiums z. B. einen Silberthaler noch ziemlich durchdringen, werden die Strahlen des Poloniums, obgleich dieselben intensiver sind, schon von erheblich dünneren Metallplatten vollständig zurückgehalten. Das Schattenbild der Hand, eines Metallgegenstandes etc. erscheint daher durch Poloniumstrahlen weit intensiver und contrastreicher auf dem Schirme, als durch Radiumstrahlen.

Ueber etwaige, den Radiumpräparaten ähnliche Veränderungen der Activität sind bei den Poloniumpräparaten nur wenige Versuche angestellt und will ich nur erwähnen, dass zwei vor einigen Monaten erhaltene geringe Mengen von gut

wirksamen Schwefelwasserstofffällungen gegenwärtig ihre Activität vollkommen verloren haben. Dieselbe liess sich durch erneutes Lösen der Substanz und Fällen mit Schwefelwasserstoff nicht wieder regeneriren.

Im Uebrigen habe ich die Angaben der französischen Forscher über Polonium und Radium bestätigen können.

Braunschweig, August 1899.

(Eingegangen 5. August 1899.)

---

7. *Ueber die diffuse Zerstreuung der Kathodenstrahlen in verschiedenen Gasen; von W. Kaufmann.*

(Göttinger Habilitationsschrift.)

---

1. Einleitung.

Von Hrn. Ph. Lenard[1]) ist gezeigt worden, dass Kathodenstrahlen, welche ein Gas durchsetzen, in diesem *theils* absorbirt, *theils* diffus zerstreut werden, und zwar so, dass einer grösseren Absorption auch stets eine grössere Zerstreuung entspricht.

Ferner hat Hr. E. Goldstein[2]) in einer neueren Arbeit dargelegt, dass das Licht der dritten Kathodenschicht, auch Glimmlichtstrahlen genannt, von dem Zusammentreffen der Kathodenstrahlen mit den Gastheilchen herrühre und dass jedes Volumenelement des Gases der Ausgangspunkt eines nach allen Seiten sich ausbreitenden secundären Strahlenbündels sei, das seinerseits auch wieder längs seiner Bahn Glimmlicht erzeuge. Hr. Goldstein lässt es hierbei vorläufig unentschieden, ob die secundären Strahlen qualitativ mit den eigentlichen Kathodenstrahlen identisch sind oder nicht. Doch macht die magnetische Ablenkbarkeit, sowie die sonstigen Eigenschaften der secundären Strahlen die erstere Annahme mindestens recht wahrscheinlich, wobei natürlich eine etwaige Aenderung dieser Eigenschaften in quantitativer Hinsicht nicht ausgeschlossen ist. Man kann also wohl mit Recht von einer diffusen Zerstreuung der Kathodenstrahlen an den Gastheilchen sprechen.

Zweck der vorliegenden Untersuchung ist, die erwähnte Erscheinung in einigen Gasen quantitativ zu untersuchen und daraus eventuell Schlüsse auf ihren Mechanismus zu ziehen.

2. Methode der Untersuchung.

Es boten sich zwei principiell verschiedene Wege zu einer Messung der Zerstreuung. Die erste Methode ist eine optische

---

1) Ph. Lenard, Wied. Ann. 56. p. 255. 1895.

2) E. Goldstein, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 40. p. 905. 1897.

und würde der von Hrn. Lenard angewandten durchaus entsprechen; sie besteht darin, dass man von dem diffus zerstreuten Strahlencomplexe durch Diaphragmen ein enges Bündel herausschneidet und dessen Intensität mit Hülfe eines fluorescirenden Schirmes photometrisch bestimmt.

Als zweite Methode bietet sich die von Hrn. Perrin[1]) zuerst angegebene Anordnung, die Menge der Kathodenstrahlen durch Messung der mitgeführten Elektricitätsmenge zu bestimmen.[2])

Es ist von vornherein klar, dass beide Methoden nicht zu demselben Resultate zu führen brauchen. Denkt man sich nämlich zwei Kathodenstrahlenbündel von gleichem Querschnitte, welche zwar elektrisch gemessen gleich stark, aber bei verschiedenem Entladungspotential erzeugt sind, so entspricht dem höheren Entladungspotential stets eine grössere Fluorescenzhelligkeit. Man kann also nur dann nach beiden Methoden dasselbe Resultat erhalten, wenn sämmtliche Eigenschaften der Strahlen bei der Zerstreuung unverändert bleiben; dass letzteres aber nicht der Fall ist, folgt aus den Versuchen Lenard's, welcher nicht nur eine diffuse Zerstreuung, sondern auch eine Absorption der Kathodenstrahlen in Gasen feststellte (vgl. p. 115).

Ich habe schon der viel grösseren erreichbaren Genauigkeit wegen die elektrische Methode vorgezogen.

Das Princip derselben ist folgendes: Ein durch geeignete Diaphragmen abgeblendetes Kathodenstrahlenbündel durchsetzt einen Metallcylinder, der durch ein Galvanometer zur Erde geleitet ist, und zwar ohne die Wände des Cylinders zu treffen; das Bündel trifft jenseits des Cylinders auf einen ebenfalls durch ein Galvanometer zur Erde geleiteten Metallschirm. Beobachtet man nun, dass von dem Cylinder aus ein negativer Strom zur Erde fliesst, so kann dieser nur von Kathodenstrahlen herrühren, die entweder diffus zerstreut oder innerhalb des Cylinders von dem Gase absorbirt sind. Nach dem Gesetze der Erhaltung der elektrischen Quantität kann

1) J. Perrin, Ann. de Chim. et de Phys. (7) 11. p. 496. 1897.

2) Ueber quantitative Messungen mittels dieser Methode vgl. die Arbeiten von J. J. Thomson, Phil. Mag. 44. p. 293. 1897; H. Starke, Wied. Ann. 66. p. 49. 1898.

unter Absorption der Kathodenstrahlen nur eine Vernichtung ihrer Energie verstanden werden, während die mitgeführten Elektricitätsmengen, da sie sich nicht bis zu beliebiger Dichte anhäufen können, auf irgend einem Wege, sei es durch Leitung, sei es durch Convection, die Wand des Cylinders erreichen müssen.

Man misst also auf diese Weise die diffuse Zerstreuung und Absorption der Kathodenstrahlen zusammen. Nimmt man für die letztere die von Lenard angegebenen Zahlen als richtig an, so sieht man aus den weiter unten folgenden Beobachtungsresultaten leicht, dass nur ein minimaler Bruchtheil des beobachteten Stromes von Absorption herrühren kann; ich werde daher im Folgenden stets nur von der Zerstreuung der Kathodenstrahlen sprechen.

3. Beschreibung des Apparates.

Nachdem durch eine Reihe von Vorversuchen, über welche weiter unten noch kurz berichtet werden soll, über die nöthigen Dimensionen des Apparates Klarheit erlangt war, wurde folgende, zu den definitiven Messungen benutzte Anordnung getroffen (Fig. 1).

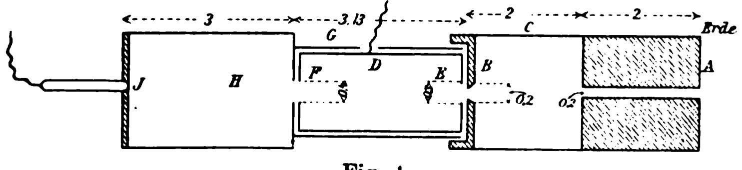


Fig. 1.

Das von einer in der Figur nicht gezeigten Aluminiumkathode ausgehende Kathodenstrahlenbündel passirte zuerst einen 2 cm langen, 0,2 cm breiten Canal in dem Messingklotze *A*, welcher zur Erde geleitet war und als Anode diente. Der enge Canal hat hauptsächlich den Zweck, die Kraftlinien des eigentlichen Entladungsraumes abzufangen, sodass man jenseits des Canals wirklich „reine" Kathodenstrahlen hat, ohne Ueberlagerung eines Leitungsstromes.[1])

1) Ich verdanke diese Anordnung einer liebenswürdigen Mittheilung meines Collegen, des Hrn. H. Starke.

Da das Bündel, infolge mehrfacher diffuser Reflexionen an den Wänden des Canals, diesen sehr stark diffus verlässt, so ist in 2 cm Entfernung ein 0,2 cm weites Diaphragma *B* angebracht, welches mit *A* durch das Rohr *C* metallisch verbunden ist. Jenseits dieses Diaphragmas gelangen die Strahlen in den eigentlichen, zur Messung der Zerstreuung dienenden Apparat. Derselbe besteht aus einem Messingcylinder *D* mit den axialen Oeffnungen *E* und *F*; die Dimensionen dieser Oeffnungen ($E = 0{,}3$ cm, $F = 0{,}4$ cm Durchmesser) sind so gewählt, dass das sie durchsetzende Strahlenbündel ihre Ränder keinesfalls treffen kann. Schliesslich gelangen die Strahlen in den Hohlraum *H*, wo sie von der Verschlussplatte *J* aufgefangen werden; letztere ist aus Aluminium hergestellt behufs möglichster Verminderung der Reflexion (vgl. weiter unten). Mit *H* metallisch verbunden ist noch ein Cylinder *G*, welcher den Cylinder *D* concentrisch umgiebt und von ihm durch ein dünnes Glimmerblatt isolirt ist; er dient nur als Stütze für *D*. Ebenfalls durch Glimmer ist die Isolation zwischen *D* bez. *G* und *B* hergestellt, und zwar ist das Blatt zwischen den beiden Diaphragmen *E* und *B* so dünn gewählt als irgend möglich. Die Blechdicke sämmtlicher Cylinder betrug etwa 0,5 mm.

Der ganze Apparat war in eine ihn eng umschliessende Glasröhre eingeschlossen, welche ausserdem noch eine Aluminiumkathode von etwa 1 cm Durchmesser enthielt.

Da es schwer ist, die Kathode so genau zu centriren, dass das Strahlenbündel genau axial verläuft, so wurde das letztere mit Hülfe eines Magneten in die richtige Lage gebracht.

Ausser dem soeben beschriebenen wurde noch ein anderer Apparat benutzt, der sich von dem obigen hauptsächlich durch die grössere Länge des inneren Cylinders (9,65 cm) unterschied. Ausserdem hatte bei diesem, nur zu den Vorversuchen benutzten Apparate der innere Cylinder keine Endplatten; es ging infolge dessen ein nicht unbeträchtlicher Theil der zerstreuten Strahlen dadurch wieder verloren, dass dieselben an den Wänden des Cylinders reflectirt wurden und durch die Endöffnungen nach aussen gelangten. Man erhielt deshalb mit diesem Apparate zu kleine Werthe, und zwar be-

trug die Abweichung gegenüber den definitiven Zahlen bei Stickstoff etwa 16 Procent.

Die elektrische Anordnung zeigt Fig. 2. Von den Polen (*P*, *P*) einer 20plattigen Influenzmaschine, die durch einen Elektromotor angetrieben wurde, ist der positive zur Erde geleitet, der negative ist mit dem Braun'schen Elektrometer (*E*)[1]), einem Jodkadmiumwiderstand (*R*) und durch einen Ausschalter (*A*) mit der Kathode (*K*) verbunden. Die punktirten Linien stellen eine zur Erde abgeleitete Schutzhülle dar, welche sämmtliche Hochspannungsleitungen, sowie die Maschine selbst umgiebt. Diese Vorsichtsmaassregel ist zur Erzielung zuverlässiger Resultate unbedingt erforderlich, weil ohne dieselbe infolge von Spitzenausströmungen leicht Elektricität durch die Luft in die weiter unten zu beschreibende Galvanometerleitung übertritt und auf diese Weise falsche Ausschläge des Galvanometers hervorruft.

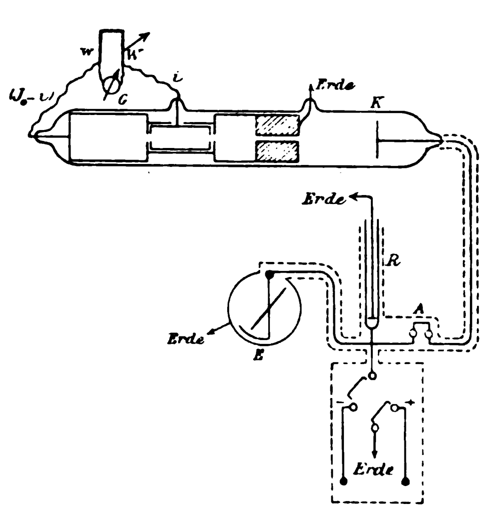


Fig. 2.

Zur Messung der Zerstreuung diente folgende Einrichtung: Von dem inneren Cylinder (*D*, Fig. 1) und von der Endplatte (*J*, Fig. 1) führt je eine Leitung durch die Stöpselwiderstände *W* bez. *w* zur Erde; die dem Apparate zugewandten Enden der Widerstände sind durch ein d'Arsonval-Galvanometer (*G*) miteinander verbunden. Ist J_0 der gesammte Kathodenstrom, der in den Cylinder eindringt, *i* der durch Zerstreuung

1) Das Braun'sche Elektrometer war, abweichend von der gewöhnlichen Form, mit einer Gradtheilung versehen; es ist von Hrn. A. Orgler gelegentlich einer von ihm im hiesigen Institut ausgeführten Arbeit mittels einer Hochspannungsbatterie und einer elektrostatischen Waage geaicht worden.

an den Cylinder gelangende Theil, so trifft auf die Endplatte noch der Strom $(J_0 - i)$; wie leicht einzusehen, bleibt das Galvanometer in Ruhe, wenn $i / (J_0 - i) = w / W$.

Von den beiden Widerständen betrug der eine, W, constant 10000 Ohm, während w variirt wurde. Das Galvanometer[1]) war von Siemens & Halske gebaut und hatte eine Empfindlichkeit von $5 . 10^{-10}$ Amp. pro Scalentheil bei einem Widerstande von ca. 10000 Ohm.

Die Stärke des in den Cylinder gelangenden Kathodenstromes betrug 10^{-6} bis 10^{-7} Amp. Da bei der vorzüglichen Ruhelage des Instrumentes Ausschläge von $^1/_{20}$ Scalentheil noch sicher bemerkt wurden, so war die Einstellung bei starken Entladungen auf etwa 1—2 Proc., bei schwächeren auf etwa 3—5 Proc. sicher.

Der Flüssigkeitswiderstand R bestand aus einer 10 proc. Lösung von Jodcadmium in Amylalkohol, die durch Zusatz von Benzol in geeigneter Weise verdünnt worden war. Durch Verschieben der mit der Erde verbundenen beweglichen Elektroden konnte das Potential der Kathode in beliebigen Grenzen variirt werden.

Evacuirt wurde mittels einer automatischen Pumpe vom Sprengel'schen Typus; zur Druckmessung diente ein Mac Leod'sches Manometer. Sämmtliche Glastheile waren entweder miteinander verblasen oder durch gute Schliffe verbunden; die Dichtigkeit des Apparates konnte als eine absolute bezeichnet werden. Wegen der grossen Länge der Glasleitungen wurde das Trockengefäss an der Luftpumpe für nicht ausreichend gehalten und in unmittelbarer Nähe des Manometers ein zweites mit P_2O_5 gefülltes Gefäss angebracht. Ohne diese Vorsicht kann man unter Umständen sehr falsche Angaben des Manometers erhalten.

Zur Einfüllung der untersuchten Gase diente ein Barometerrohr, in welches eine in eine feine Spitze ausgezogene Glasröhre von unten eingeführt wurde; die vorher gereinigten und getrockneten Gase stiegen aus der Spitze in einzelnen Blasen durch das Quecksilber auf.

1) Nach d'Arsonval.

4. Berechnung des Zerstreuungscoefficienten.

In Fig. 3 ist der innere Cylinder noch einmal schematisch dargestellt. Derselbe werde durchsetzt von einem unendlich dünnen Strahlenbündel, dessen elektrisch gemessene Intensität beim Eintritt gleich J_0 sei; von diesem Bündel werde längs

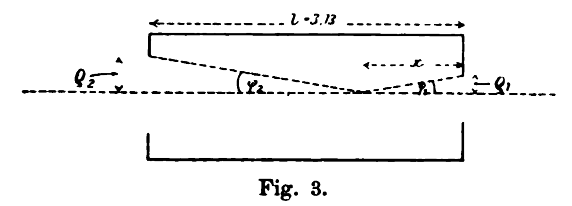


Fig. 3.

des Wegstückes dx der Betrag $J b\,dx$ zerstreut, wobei J die Intensität im Punkte x und b den „*Zerstreuungscoefficienten*“ darstellt, welch letzterer abhängig ist von der Natur und dem Drucke des Gases, sowie von dem Entladungspotential, bei welchem die Strahlen erzeugt werden. Es ist also

(1) $$\frac{dJ}{dx} = -Jb$$

oder

(2) $$J = J_0\, e^{-bx},$$

folglich wird die auf der Strecke dx zerstreute Menge gleich

$$J_0\, b\, e^{-bx}\, dx\,.$$

Nimmt man die Oeffnungen des Cylinders als unendlich klein an, so gelangt die ganze zerstreute Menge an die Cylinderwandung und es ist

$$i = \int_0^l J_0\, b\, e^{-bx}\, dx = J_0 (1 - e^{-bl})\,.$$

(2a) $$\frac{i}{J_0} = (1 - e^{-bl})\,.$$

Thatsächlich gelangt ein Theil der zerstreuten Strahlen durch die Oeffnungen nach aussen und zwar namentlich von den nahe den Enden gelegenen Punkten aus. Dieser Verlust wird jedoch dadurch compensirt, dass für jede von irgend einem Punkte nach aussen gelangende Menge eine fast genau gleiche von dem symmetrisch gelegenen Punkte jenseits der Oeffnung

nach innen gelangt. Diese Compensation wird erst dann unvollkommen, wenn die Zerstreuung so stark ist, dass das directe Strahlenbündel auf dem Wege von dem inneren zum äusseren Punkte (oder umgekehrt) bereits merklich geschwächt ist.

Zum genaueren Nachweis des Gesagten soll im Folgenden die Rechnung für die thatsächlich vorhandenen Dimensionen der Oeffnungen durchgeführt werden. Zu diesem Zwecke werde die Annahme gemacht, dass die Zerstreuung von jedem Punkte nach allen Seiten gleichmässig erfolgt.

Bezeichnet man den körperlichen Winkel, unter dem vom Punkte x aus die Cylinderwandung erscheint, mit ω_x, so ist demnach die gesammte, an den Cylinder gelangende Strahlenmenge:

$$i = J_0 \frac{b}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \omega_x e^{-bx} dx \,. \tag{3}$$

Es erübrigt noch die Grenzen des Integrals festzustellen; der äusserste Punkt (x_0) auf der nach der Kathode zu gelegenen Seite, von dem aus noch die Innenwand des Cylinders gesehen werden kann, ist durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{-x_0}{\varrho_1} = \frac{-x_0 + l}{\varrho_2}\,; \tag{4}$$

nun ist für die rückwärts gelegenen Punkte, wie leicht zu sehen, für ϱ_1 nicht der Radius der Cylinderöffnung selbst, sondern der des Diaphragmas B (Fig. 1) einzuführen, d. h. $\varrho_1 = 0{,}1$; ϱ_2 ist $= 0{,}2$, sodass $x_0 = -l = -3{,}13$. Die obere Grenze ist die Entfernung der Endplatte vom Eintrittspunkte, also gleich $l + 3 = 6{,}13$.

Es ist also:

$$i = J_0 \frac{b}{4\pi} \int_{-3,13}^{6,13} \omega_x e^{-bx} dx \,. \tag{5}$$

Nun ist:

$$\omega_x = 2\pi \left[\frac{x}{\sqrt{\varrho_1^2 + x^2}} + \frac{(l-x)}{\sqrt{\varrho_2^2 + (l-x)^2}} \right]. \tag{6}$$

sodass:

$$\frac{i}{J_0} = \frac{b}{2} \int_{-3,13}^{6,13} \left(\frac{x}{\sqrt{\varrho_1^2 + x^2}} + \frac{(l-x)}{\sqrt{\varrho_2^2 + (l=x)^2}} \right) e^{-bx} dx \,. \tag{7}$$

Es werde dieses Integral in drei Theile zerlegt zwischen den Grenzen:

$$
\begin{array}{lll}
-3{,}13 & \text{bis } 0 & [S_1] \\
0 & \text{bis } 3{,}13 & [S_2] \\
3{,}13 & \text{bis } 6{,}13 & [S_3]
\end{array}
$$

sodass:

$$(8) \qquad \frac{2}{b}\frac{i}{J_0} = S_1 + S_2 + S_3 \,.$$

Von diesen drei Intergralen ist S_2 das bei weitem grösste, während die beiden anderen nur Correctionsglieder darstellen.

Da eine genaue Berechnung nur mittels einer höchst unbequemen Reihenentwickelung möglich ist, so soll im Folgenden eine angenäherte Berechnung unter Berücksichtigung der durch Vorversuche ermittelten thatsächlichen Werthe von b ausgeführt werden:

Es werde für die Rechnung eine Genauigkeit von 2 Proc. verlangt.

Dann kann man für $x \geqq 1$ bez. $(l - x) \geqq 1$ setzen:

$$\frac{x}{\sqrt{\varrho_1^2 + x^2}} = \frac{(l - x)}{\sqrt{\varrho_2^2 + (l - x)^2}} = 1$$

mit einem Fehler von 1 Proc. bez. 2 Proc.

Ferner kann man, da nach den Vorversuchen b den Werth 0,1 im allgemeinen nicht übersteigt, für $x \leqq 1$ bez. $(l - x) \leqq 1$ setzen

$$e^{-bx} = 1 - b\,x$$

und

$$e^{-b(l-x)} = 1 - b(l - x)$$

mit einem maximalen Fehler von 0,5 Proc.

Auf Grund dieser Betrachtungen können die Integrale in folgender Weise berechnet werden:

Es ist:

$$(9) \qquad S_2 = \int_0^l \frac{x}{\sqrt{\varrho_1^2 + x^2}}\, e^{-bx}\,d\,x + \int_0^l \frac{l - x}{\sqrt{\varrho_2^2 + (l - x)^2}}\, e^{-bx}\,d\,x\,.$$

Setzt man in dem zweiten Theile von S_2:

$$(l - x) = u\,,$$

so erhält man:

$$(10)\quad S_2 = \int_0^l \frac{x}{\sqrt{\varrho_1^2 + x^2}} e^{-bx} dx + e^{-bl} \int_0^l \frac{u}{\sqrt{\varrho_2^2 + u^2}} e^{bu} du .$$

Beide Integrale werden auf Grund der obigen numeris Ausführungen nochmals zerlegt in je eines von 0 bis 1 eines von 1 bis l, wobei im ersten Theil $e^{-bx} = 1 - bx$ $= 1 + bu$ zu setzen, im zweiten Theile der Bruch glei zu setzen ist. Es ist demnach:

$$(11)\left\{\begin{aligned} S_2 = & \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{\varrho_1^2 + x^2}} - b \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\varrho_1^2 + x^2}} + e^{-bl} \int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{\varrho_2^2 + u^2}} + e^{-bl} b \int_0^1 \\ & + \int_1^l e^{-bx} dx + e^{-bl} \int_1^l e^{bu} du . \end{aligned}\right.$$

Die Integration bietet keine weiteren Schwierigke setzt man noch:

$$e^{\pm bl} = 1 \pm bl + \frac{b^2 l^2}{2},$$

so erhält man unter Vernachlässigung der höheren Glied

$$(12)\qquad \frac{b}{2} S_2 = 2{,}97\, b - 4{,}60\, b^2 + 1{,}24\, b^3 .$$

Auf ganz ähnliche Weise erhält man

$$(13)\qquad \frac{b}{2} S_1 = 0{,}06\, b - 0{,}0035\, b^2 ,$$

$$(14)\qquad \frac{b}{2} S_3 = 0{,}10\, b - 0{,}345\, b^2 + 7{,}45\, b^3$$

und durch Addition der drei Gleichungen:

$$(15)\qquad \frac{i}{J_0} = 3{,}13\, b - 4{,}95\, b^2 + 8{,}7\, b^2 .$$

Wären die Oeffnungen im Cylinder nicht vorhanden, s alle zerstreuten Strahlen aufgefangen würden, so hätte erhalten (vgl. Gleichung 2a):

$$\frac{i}{J_0} = (1 - e^{-bl}),$$

oder unter Vernachlässigung der höheren Glieder:

$$(16)\qquad \frac{i}{J_0} = 3{,}13\, b - 4{,}90\, b^2 + 5{,}1\, b^3 .$$

Beide Grössen unterscheiden sich selbst für $b = 0{,}1$ — grössere Werthe wurden nur wenige beobachtet — nur um etwa 1,5 Proc., man kann also für die Verwerthung der Beobachtungen thatsächlich die Gleichung (2a) benutzen.

Bei den Beobachtungen wird nicht i/J_0 bestimmt, sondern, wie bereits erwähnt, eine im Folgenden mit A bezeichnete Grösse:

$$A = \frac{i}{J_0 - i}.$$

Aus Gleichung (2a) folgt:

$$b\,l = \log_{\text{nat}}(1 + A),$$

oder:

(17) $$b\,l = 2{,}303 \log_{10}(1 + A),$$

und da $l = 3{,}13$ ist:

(18) $$b = 0{,}737 \,.\, \log_{10}(1 + A).$$

Es ist noch zu untersuchen, inwieweit das Resultat durch die Reflexion der Strahlen an den Wänden des Cylinders bez. an der Auffangeplatte beeinflusst werden kann. Nach den Versuchen von Starke[1]) beträgt die Reflexion an Messing etwa 40 Proc. Von diesen reflectirten Strahlen gelangt ein kleiner Theil durch die Cylinderöffnungen nach aussen. Eine ungefähre Berechnung zeigt, dass selbst von den am ungünstigsten gelegenen Punkten der Cylinderwandung höchstens 1 Proc. der auftreffenden Strahlung nach aussen gelangen kann, der Gesammtfehler beträgt also weit unter 1 Proc. Ebenso ergiebt sich, dass die von dem Aluminiumblech in den Cylinder zurückreflectirten Strahlen selbst bei den schwächsten beobachteten Zerstreuungen höchstens 1 Proc. Fehler verursachen können.

5. Ausführung der Versuche.

Als wesentlichste Fehlerquelle bei der Ausführung der Versuche erwies sich die durch den Strom bewirkte Lösung occludirter Gase aus den Metalltheilen des Apparates. Eine völlige Beendigung dieser Gasentwickelung (das entwickelte Gas bestand grossentheils aus Wasserstoff, wie sich durch spectroskopische Untersuchung ergab) konnte selbst nach etwa sechstägigem, fast ununterbrochenem Betriebe der Röhre und mehrmaligem gänzlichen Evacuiren nicht erreicht werden. Es blieb deshalb nichts übrig, als ihre Einwirkung auf das Re-

1) H. Starke, l. c.

sultat dadurch möglichst zu beseitigen, dass der Strom imme nur ganz kurze Zeit, etwa 10—20 Secunden, geschlosse wurde und nach je zwei bis drei Messungen durch Aus pumpen bis auf etwa $^1/_{2000}$ mm und Einfüllen neuen Gase bis auf etwa 1 mm der Gasinhalt gereinigt wurde. Da da auszupumpende Volumen etwa 600 ccm betrug und die Pump nur mässig schnell arbeitete, so erforderte auf diese Weis jede einzelne Messungsreihe bei einem bestimmten Druc einen Zeitaufwand von etwa $^1/_2$ bis $^3/_4$ Stunde.

Es war ursprünglich meine Absicht, eine möglichst gross Zahl von Gasen zu untersuchen, doch wurde ich durch äusser Gründe daran verhindert, sodass ich im Folgenden nur die a folgenden fünf Gasen gewonnenen Resultate mittheilen kan

Es wurden untersucht: Stickstoff, Kohlendioxyd, Kohlen oxyd, Wasserstoff, Stickoxydul, und zwar wurde Stickstoff i beiden — eingangs beschriebenen — Apparaten untersuch Kohlendioxyd, Kohlenoxyd und Stickoxydul nur in dem defin tiven Apparate, Wasserstoff nur in dem zu den Vorversuche geltenden. Eine Wiederholung der Wasserstoffversuche m dem Hauptapparate unterblieb hauptsächlich wegen der völlige Unmöglichkeit, den occludirten Wasserstoff auch nur einige maassen wieder zu entfernen. Es hätte wochenlangen ununte brochenen Betriebes der Röhre bedurft, um dieselbe für ander Gase wieder brauchbar zu machen.

6. Versuchsresultate.

a) Stickstoff.

(N_2 wurde bereitet durch Erhitzen einer Lösung vo $(NH_4)_2SO_4$ und $2(NaNO_2)$; getrocknet wurde vor dem Einfülle durch H_2SO_4.)

Um die Abhängigkeit der Zerstreuung vom Drucke un vom Potential einzeln zu untersuchen, war es nöthig, bei con stantem Druck das Potential zu variiren. Dies gelingt nu innerhalb ziemlich enger Grenzen (durch Aenderung de Flüssigkeitswiderstandes), denn unterhalb eines gewissen Werthe hört die Entladung überhaupt auf, über eine gewisse Grenz steigt das Potential selbst bei den stärksten Strömen nicht a

In den Tabellen bedeutet V das Entladungspotential i Volt, A die p. 105 definirte Grösse, b den daraus berechnete Zerstreuungscoefficienten, p den Gasdruck in mm Hg.

Tabelle I.

Stickstoff.

V	A	b	$p \cdot 10^3$	$\frac{bV}{p}$	δ Proc.
4700	0,120	0,0362		5065	− 10
4600	0,128	0,0386	33,6	5280	− 6,6
4350	0,143	0,0428		5540	− 2,0
2550	0,40	0,1072	43,0	6360	+12,6
2530	0,38	0,1028	39,8	6530	+15,6
2800	0,325	0,0898		6310	+11,7
2930	0,27	0,0768	38,4	5860	+ 3,7
3200	0,245	0,0700		5830	+ 3,2
3130	0,235	0,0673	36,2	5830	+ 3,2
3400	0,220	0,0634		5950	+ 5,3
4600	0,130	0,0390	32,4	5540	− 2,0
3550	0,185	0,0541		5930	+ 5,0
3000	0,255	0,0725	38,0	5730	+ 1,4
3300	0,230	0,0660		5730	+ 1,4
5900	0,092	0,0281		5300	− 6,2
4100	0,137	0,0409	31,3	5350	− 5,3
5650	0.099	0,0301		5430	− 3,9
5200	0,110	0,0333		5270	− 6,7
5270	0,110	0,0333	32,9	5340	− 5,5
3430	0,180	0,0528		5500	− 2,7
4400	0,125	0,0376	31,3	5290	− 6,4
5970	0,091	0,0278		5300	− 6,2
6970	0,072	0,0222	29,7	5210	− 7,8
7450	0,069	0,0213		5340	− 5,5
3950	0,164	0,0485	36,3	5280	− 6,6
3700	0,177	0,0521		5310	− 5,5
3300	0,22	0,0635	35,5	5900	+ 4,4
2600	0,395	0,1062	43,6	6330	+12,0
6120	0,088	0,0269	28,3	5820	+ 3,0
6120	0,091	0,0278		6010	+ 6,4
7200	0,068	0,0210	26,1	5790	+ 2,5
			Mittel:	5650	

Eine Betrachtung der fünften Spalte zeigt, dass
Grösse $b\,V/p$ annähernd constant ist; doch bemerkt man
einer Ordnung der Tabelle nach steigendem b einen deutlich
Gang, in dem den grössten b auch die grössten $b\,V/p$ entsprech

Dieser Gang dürfte jedoch zum Theil davon herrühren, d
bei den zu den grössten b gehörigen grossen Drucken der Leitun
strom trotz der Diaphragmen noch nicht ganz beseitigt war

Von etwa 3500 Volt an aufwärts ist der Gang nur nc
unbedeutend, sodass man das empirische Resultat der obig
Tabelle wohl in der folgenden Gleichung aussprechen kann:

$$\frac{b\,V}{p} = \beta = \text{const.} \tag{19}$$

Der Werth von β hängt hierbei noch von der Natur des Gases

(Eine mit dem provisorischen Apparate gemachte Versuc
reihe ergab ein ganz ähnliches Resultat, doch war, wie sch
eingangs erwähnt, der Werth von β um etwa 16 Proc. kleine

b) Kohlendioxyd.

(CO_2 wurde bereitet aus Marmor und reiner HCl
Kipp'schen Apparate. Trocknung durch H_2SO_4.)

Tabelle II.

Kohlendioxyd.

V	A	b	$p\,.\,10^8$	$\frac{b\,V}{p}$	δ Proc.
2650	0,27	0,0763	27,5	7350	+ 7,6
4100	0,155	0,0460		6850	+ 0,3
2100	0,425	0,113	31,8	7470	+ 9,4
2550	0,250	0,0712	26,1	6960	+ 1,9
2950	0,205	0,0595		6770	− 0,9
4060	0,146	0,0435		6770	− 0,9
4400	0,115	0,0348	23,9	6410	− 6,2
6130	0,087	0,0266		6830	± 0,0
2550	0,34	0,0935	34,2	6970	+ 2,1
3100	0,265	0,0751		6810	− 0,3
6200	0,097	0,0295	25,9	7060	+ 3,4
5050	0,103	0,0313	24,8	6370	− 6,7
5300	0,099	0,0301		6430	− 5,9
7800	0,057	0,0177	21,1	6540	− 4,3
8270	0,056	0,0173		6790	− 0,6
			Mittel:	6830	

Das Resultat ist dem für Stickstoff erhaltenen ganz analog; auch hier liegen die grössten positiven Abweichungen bei den grössten Werthen von b bez. den niedrigsten von V; doch ist der Gang viel weniger ausgeprägt als bei Stickstoff.

c) Kohlenoxyd.

(CO wurde dargestellt durch Erhitzen von $K_4Fe(CN)_6$ in der zehnfachen Menge concentrirter H_2SO_4. Reinigung durch NaHO und Trocknung durch H_2SO_4.)

Tabelle III.

Kohlenoxyd.

V	A	b	$p \cdot 10^8$	$\frac{bV}{p}$	δ Proc.
2530	0,44	0,1165	45,4	6500	+ 1,9
4030	0,155	0,0460	31,3	5940	− 6,9
2420	0,425	0,113	40,3	6780	+ 6,3
4150	0,162	0,0480	32,5	6130	− 3,9
3370	0,222	0,0640	34,1	6330	− 0,8
5870	0,092	0,0281	26,3	6270	− 1,7
4800	0,116	0,0350	27,4	6130	− 3,9
3550	0,197	0,0574	30,9	6600	+ 3,4
5270	0,105	0,0319	26.7	6300	− 1,3
2330	0,44	0,1164	42,0	6470	+ 1,4
7380	0,065	0,0201	22,1	6710	+ 5,2
			Mittel:	**6380**	

d) Wasserstoff.

(H_2 wurde dargestellt aus chemisch reinem Zink und HCl, getrocknet durch H_2SO_4.)

Die Versuche mit Wasserstoff wurden, wie bereits oben erwähnt, nur mit dem provisorischen Apparate ausgeführt; es ist anzunehmen, dass der erhaltene Werth von bV/p in demselben Maasse zu klein ist wie der für Stickstoff gefundene; demnach wäre die gefundene Zahl mit 1,16 zu multipliciren.

Man erhält dann als wahrscheinlichen Mittelwerth:

$$\frac{bV}{p} = 730.$$

Ich führe diese Zahl hier in Ermangelung einer besseren vorläufig mit an, doch schätze ich ihre Genauigkeit nicht besonders hoch.

e) Stickoxydul.

(N_2O wurde dargestellt durch Erhitzen von geschmolzenem $(NH_4)NO_3$. Reinigung durch $FeSO_4$ und NaHO, Trocknung durch H_2SO_4.)

Die mit diesem Gase erhaltenen Zahlen waren ausserordentlich schwankend, ohne dass es mir gelungen wäre, den Grund hierfür aufzufinden. Vielleicht wird das Gas durch den Strom zersetzt. Der Mittelwerth von bV/p liegt in der Nähe von **6900.**

6. Vergleich der mit verschiedenen Gasen erhaltenen Resultate.

Die für die ersten drei Gase erhaltenen bez. Mittelwerthe sind:

	$\beta = \frac{bV}{p}$	Mol.-Gew. = M_0
N_2	5650	28
CO_2	6830	44
CO	6380	28

Wie man sieht, ist das „specifische Zerstreuungsvermögen" (β) weder der Dichte des Gases proportional, noch auch entspricht gleicher Dichte (N_2 und CO) ein gleiches β, doch kommen Abweichungen von gleichem Betrage auch bei Lenard (l. c.) vor, wie dort ausdrücklich bemerkt.

Bezeichnet man mit ϱ den Radius der Wirkungssphäre des betreffenden Gasmolecüls, so erhält man für die drei genau beobachteten Gase die einfache Beziehung:

$$\frac{\beta}{M_0 \varrho} = \text{const.}, \tag{20}$$

wie aus folgender Tabelle hervorgeht:

Gas	β	M_0	$2.\varrho.10^9$	$\frac{\beta}{2.M_0\varrho.10^9}$
N_2	5650	28	17	11,85
CO_2	6830	44	13	11,95
CO	6380	28	19	11,60

Die Uebereinstimmung der letzten Columne ist besser, als sie bei der Unsicherheit der ϱ-Werthe eigentlich sein dürfte. Die Angaben der einzelnen Autoren in Betreff der Molecularradien schwanken um mehr als 50 Proc. Ich habe, um wenig-

stens Willkürlichkeiten nach Möglichkeit auszuschliessen, die O. E. Meyer'schen Zahlen bei allen drei Gasen benutzt, wie sie in den Tabellen von Landolt und Börnstein (1894) angegeben sind.

7. Versuch einer Erklärung der beobachteten Erscheinungen auf Grund der Emissionstheorie.

Ich habe bisher absichtlich mich mit der blossen Beschreibung der Versuchsergebnisse begnügt, ohne Bezugnahme auf irgend welche Hypothesen über den Mechanismus der beobachteten Zerstreuung.

Die ausserordentlich günstigen Erfolge, welche die Anwendung der Emissionstheorie zur Erklärung der Eigenschaften der Kathodenstrahlen gezeitigt hat, legen es nahe, auch die oben beschriebenen Erscheinungen von diesem Standpunkte aus zu erörtern, obgleich, wie ich gleich vorweg bemerken will, die folgenden Betrachtungen zu keineswegs widerspruchsfreien Resultaten führen. Immerhin dürften die aus einer consequenten Durchführung molecularer Vorstellungen gewonnenen Folgerungen nicht ganz ohne Interesse sein.

Denkt man sich das Gas entsprechend den Anschauungen der kinetischen Gastheorie aus einzelnen Molecülen bestehend, so ergiebt sich unmittelbar, dass ein Theil der Kathodenstrahltheilchen mit den Molecülen zusammenprallen muss. Man kann demnach die Zerstreuung durch directe Zusammenstösse mit den Gasmolecülen erklären. Da bei einem derartigen Zusammenstosse nothwendigerweise ein Theil der Energie des Theilchens an das Molecül abgegeben werden muss, so erklärt sich die sog. „Absorption“ gleichzeitig. Aus dieser Anschauung folgt weiter, dass ein anfangs homogenes Strahlenbündel, d h. ein solches, in welchem alle Theilchen dieselbe Geschwindigkeit haben, wenn es irgend einen Körper passirt, nothwendigerweise inhomogen werden muss, da ja keinesfalls alle austretenden Theilchen dieselbe Anzahl Zusammenstösse erlitten haben. Dies würde durchaus den Beobachtungen Lenard's[1]) entsprechen, welcher fand, dass bei der magnetischen Ablenkung eines Strahlenbündels, das ein Metallhäutchen

1) F. Lenard, Wied. Ann. 52. p. 23. 1894.

passirt hat, dasselbe in ein breites Band auseinander gezogen wird, und zwar scheint nach den Ausführungen Lenard's diese Dispersion viel grösser zu sein, als die auch innerhalb der Röhre zu beobachtende, welche von den Partialentladungen des Inductoriums herrührt. Genauere Beobachtungen über diesen Punkt wären sehr wünschenswerth.

Die nächste zu beantwortende Frage ist die, woher die Abhängigkeit der Zerstreuung vom Entladungspotential, d. h. von der Geschwindigkeit der Strahlen stammt.

Es ist von vornherein klar, dass man hier die Translationsgeschwindigkeit der Gasmolecüle ganz ausser Acht lassen

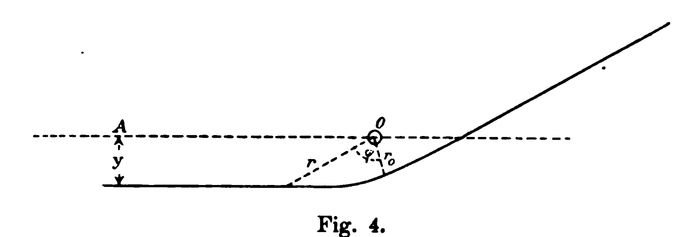


Fig. 4.

kann, da dieselbe nur einige hundert Meter beträgt, während die Strahlen eine Geschwindigkeit von etwa 50 000 km besitzen. Man kann also die Molecüle einfach als ruhend betrachten.

Wenn nun keinerlei Fernwirkung zwischen den Strahlen und den Molecülen bestände, so wäre der Zerstreuungscoefficient offenbar gleich dem Gesammtquerschnitt der in einem Cubikcentimeter enthaltenen Molecüle unabhängig von der Geschwindigkeit der Strahlen.

Ich mache deshalb die Annahme, dass zwischen den Strahltheilchen und den Molecülen eine Attraction stattfindet, welche proportional ist der Masse des Molecüls und irgend einer Function $f(r)$ der Entfernung r zwischen dem Strahltheilchen und dem Molecül. Dann wird offenbar jedes Theilchen in der Nähe eines Molecüls aus seiner Bahn abgelenkt werden, und zwar umsomehr, je langsamer es sich bewegt. Es wird sich in einer hyperbolischen Bahn um das Molecül herumbewegen und wird mit demselben zusammenstossen, wenn sein kürzester Abstand vom Mittelpunkt des Molecüls

— dem Perihel eines Kometen entsprechend — kleiner oder gleich dem Radius des Molecüls ist.

Es befinde sich bei O (Fig. 4) ein Molecül mit der Masse M, die Curve stelle die Bahn des Strahltheilchens dar. Es sei ferner AO eine der anfänglichen Bahn parallele Gerade und y die Entfernung derselben von der anfänglichen Bahn, welch letztere mit einer Asymptote der Hyperbel zusammenfällt.

Bezeichnet man mit r den Radiusvector, mit φ den Winkel zwischen diesem nnd dem Perihel, mit v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Theilchens, mit m seine Masse, so ist nach dem Flächensatze:

$$\frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0 y}{2}. \tag{21}$$

Die anziehende Kraft sei gegeben durch den Ausdruck: $h\, m\, M f(r)$, wobei h eine Constante (analog der Gravitationsconstante) darstellt.

Dann wird das Energiegesetz ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = h\, m\, M \int_\infty^r f(r)\, dr. \tag{22}$$

Im Perihel $[r = r_0]$ ist

$$v = r_0 \frac{d\varphi}{dt},$$

sodass man durch Combination von (21) und (22) und Elimination von $d\varphi/dt$ erhält:

$$y^2 = r_0^2 + 2\frac{hM}{v_0^2} r_0^2 \int_\infty^{r_0} f(r)\, dr. \tag{23}$$

Ist ϱ der Radius eines Molecüls, so findet ein Zusammenstoss statt, wenn

$$r_0 \leqq \varrho$$

oder

$$y^2 \leqq \varrho^2 + 2\frac{hM}{v_0^2}\varrho^2 \int_\infty^{\varrho} f(r)\, dr. \tag{24}$$

Bezeichnet man den durch Gleichung (24) gegebenen Grenzwerth von y mit y_0, so werden alle Strahlen, die ursprünglich innerhalb eines um AO als Axe gelegten Cylinders vom Ra-

dius y_0 gelegen sind, mit dem Molecül zusammenprallen. Ist also N die Zahl der im Cubikcentimeter vorhandenen Molecüle. so ist $N\pi y_0^2 = b$ der „*Zerstreuungscoefficient*"; also:

$$b = N\pi\varrho^2 + 2\pi h \frac{NM}{v_0^2}\varrho^2\int_\infty^\varrho f(r)\,dr. \tag{25}$$

Nun ist $NM = D$, wenn unter D die Dichte des Gases verstanden wird, und ferner, nach der Emissionstheorie:

$$v_0^2 = 2\frac{\varepsilon}{m}V, \tag{26}$$

folglich:

$$b = N\pi\varrho^2 + \pi\frac{hD}{V}\frac{m}{\varepsilon}\varrho^2\int_\infty^\varrho f(r)\,dr. \tag{27}$$

Bezeichnet man, wie früher, mit M_0 das Moleculargewicht, mit p den Druck des Gases in Millimetern Hg, so ist:

$$D = \frac{M_0}{2}\frac{p}{760}895.10^{-7}. \tag{28}$$

Folglich:

$$b = N\pi\varrho^2 + \pi\frac{m}{\varepsilon}\frac{h.895.10^{-7}}{2.760}\frac{M_0 p}{V}\varrho^2\int_\infty^\varrho f(r)\,dr. \tag{29}$$

Empirisch war dagegen gefunden (vgl. Gleichung (20):

$$b = \text{const.} \times \frac{M_0 p}{V}\varrho.$$

Es würde also, um Uebereinstimmung zwischen dem empirischen Resultat und Gleichung (29) zu erzielen,

1. das erste Glied in (29) zu vernachlässigen sein.

2. $$\varrho^2\int_\infty^\varrho f(r)\,dr = \varrho \quad \text{oder} \quad f(r) = \frac{1}{r^2}$$

sein. Was die erste Forderung anbetrifft, so ist nach der kinetischen Gastheorie für *Stickstoff*: $\varrho = 8{,}5.10^{-9}$ und N bei 1000 mm Druck etwa 10^{20}, also bei 30.10^{-3} mm Druck $N = 3.10^{15}$, folglich

$$N\pi\varrho^2 = 0{,}68,$$

d. h. viel grösser als die grössten beobachteten Werthe von b; man müsste also annehmen, dass die Grösse, welche wir als Radius des Molecüls bezeichnen, für die Wechselwirkung zwischen Strahltheilchen und Molecül einen kleineren Werth hat, als für die gegenseitige Einwirkung zwischen den Molecülen selbst.

Die Bedingung $f(r) = 1/r^2$ dagegen ist von etwas zweifelhaftem Werthe; denn wenn überhaupt ϱ nicht identisch ist mit dem aus der kinetischen Gastheorie berechneten Werthe, so braucht es auch nicht mit demselben proportional zu sein, und es kann die für die drei Gase gefundene Uebereinstimmung, wie bereits oben angedeutet, eine zufällige sein; es bliebe dann immer noch die Beziehung zu p und V, sowie die *angenäherte* (etwas anderes behauptet auch Lenard bezüglich der Absorption nicht) Proportionalität mit der Masse, wenn man ϱ bei den einzelnen Gasen als nur wenig verschieden betrachtet.

(Setzt man versuchsweise $f(r) = 1/r^2$, nimmt man ferner an, dass ε gleich der Ladung eines elektrolytischen Ions, also m ungefähr 1800 mal kleiner als die Masse eines Wasserstoffatoms sei, und setzt ϱ etwa gleich 10^{-10}, um Forderung I zu erfüllen, so erhält man für h eine Zahl von der Ordnung 10^{26}, während die Newton'sche Gravitationsconstante nur $6{,}5 \,.\, 10^{-8}$ beträgt.)

Es erübrigt noch, sich eine Vorstellung von dem Mechanismus der sogenannten „*Absorption*" der Kathodenstrahlen zu machen. Dieselbe ist quantitativ nur von Lenard[1]) untersucht worden, und zwar auf photometrischem Wege. Vom Standpunkte der Emissionstheorie kann unter der „*Absorption*" consequenterweise nichts anderes verstanden werden als eine Energieverminderung der Strahlen durch die Zusammenstösse mit den Molecülen. In der That, betrachtet man ein Strahlenbüschel, das von einem Lenard'schen Fenster allseitig ausstrahlt, so kann dasselbe durch die Zerstreuung allein nicht geschwächt werden, da jeder Punkt das, was ihm an directen Strahlen verloren geht, durch zerstreute ersetzt bekommt. Nimmt man dagegen an, dass bei jedem Stosse ein gewisser

1) F. Lenard, l. c.

Bruchtheil an Energie verloren geht, so muss man einen Absorptionscoefficienten erhalten, der bei einem bestimmten Gase dem jeweiligen Zerstreuungscoefficienten proportional ist.

Es stelle in Fig. 5 M ein Gastheilchen, m ein Strahltheilchen dar mit den Massen M bez. m, wobei *M sehr gross* gegen m angenommen werde; die Verbindungslinie der Mittelpunkte im Momente des Stosses bilde mit der ursprünglichen Bewegungsrichtung den Winkel φ; dann wird nach dem Stosse nur die normale Componente der Geschwindigkeit eine Abnahme erfahren haben, die tangentiale Componente dagegen unverändert sein. Bezeichnet man die Bewegungsenergie des Theilchens mit E, so ist

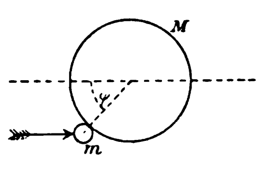


Fig. 5.

(30)
$$E = \frac{m}{2} v^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = E_n + E_t .$$

Nach dem Stosse hat E_n abgenommen und zwar nach den Gesetzen des elastischen Stosses um

$$4 E_n \frac{m}{M} = 4 \frac{m}{M} E \cos^2 \varphi .$$

Es mögen auf eine zur Bewegungsrichtung der Strahlen senkrechte Flächeneinheit n-Theilchen auftreffen, dann treffen auf einen Ring von der Breite $\varrho\, d\varphi$ und dem Radius $\varrho \sin \varphi$:

$$2 \pi n \varrho^2 \sin \varphi \cos \varphi \, d \varphi$$

Theilchen; es ist also der gesammte Energieverlust sämmtlicher das Molecül treffenden $n \pi \varrho^2$-Theilchen:

(31)
$$\Delta E = 8 \frac{m}{M} E n \pi \varrho^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d \varphi$$

und der *mittlere relative Energieverlust eines Theilchens:*

(32)
$$\eta = \frac{\Delta E}{E} \cdot \frac{1}{n \pi \varrho^2} = 2 \frac{m}{M} .$$

Die relative Zahl der Zusammenstösse pro Centimeter

Weglänge ist gleich dem Zerstreuungscoefficienten b, sodass der *Absorptionscoefficient*

(33) $$a = 2\,b\,\frac{m}{M}$$

wird, oder

(34) $$\frac{m}{M} = \frac{a}{2\,b}.$$

Setzt man nun sowohl b wie M proportional dem Moleculargewichte, so würde sich a unabhängig von demselben ergeben, was den Beobachtungen Lenard's widerspricht; man muss vielmehr, um mit der Erfahrung im Einklang zu bleiben, M constant setzen. Der absolute Werth von M folgt aus Gleichung (34) unter der schon oben gemachten Annahme, dass die Ladung des Strahltheilchens gleich der eines Ions sei, also:

(35) $$m = \frac{\varepsilon}{1{,}8\,.\,10^7}$$

und, da für Stickstoff

$$\varepsilon = \frac{9650}{14}\,M_N \quad (M_N = \text{absol. Masse eines N-Atoms}),$$

(36) $$\frac{m}{M_N} = \frac{9650}{1{,}8\,.\,10^7\,.\,14} = 3{,}8\,.\,10^{-5}.$$

Andererseits erhält man aus Gleichung (32) unter Zugrundelegung der von Lenard bei etwa 40000 Volt gefundenen Werthe von a, und der von mir angegebenen Werthe von b:

(37) $$\frac{m}{M} = 14\,.\,10^{-3},$$

woraus folgt:

(38) $$\frac{M}{M_N} = 2{,}7\,.\,10^{-3}.$$

Es liegt nahe, die Masse M als diejenige eines „Uratoms" anzusehen, aus welchen nach der Prout'schen Hypothese die chemischen Atome zusammengesetzt sein sollen; es würde dann die beim Zusammenstosse von dem Strahltheilchen abgegebene Energie sich nur zum Theil in fortschreitende Energie der Gasmolecüle (Temperaturerhöhung des Gases), zum anderen Theil in Schwingungsenergie der „*Uratome*" verwandeln, was mit der Annahme Goldstein's[1]) durchaus im Einklang ist, dass das

1) E. Goldstein, l. c.

negative Glimmlicht durch Absorption der Kathodenstrahlen entstehe.

(Zu einer ähnlichen Auffassung ist, wenn auch auf etwas anderem Wege, auch schon J. J. Thomson[1]) gelangt.)

Es beträgt nach den Gleichungen (37) und (38), bezogen auf die Masse des H-Atoms als Einheit:

1. die Masse eines Uratoms $M = 0{,}038$:

2. die Masse eines Strahltheilchens $m = 0{,}00053$.

Ein H-Atom würde demnach aus etwa 26 Uratomen zusammengesetzt sein.

Berlin, Physikal. Institut, Juni 1899.

---

1) J. J. Thomson, l. c.

(Eingegangen 19. Juli 1899.)

8. *Ueber den in Radiometern auftretenden Druck; von Eduard Riecke.*

(Aus den Nachr. d. Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen p. 166. 1899. mit einigen Aenderungen abgedruckt.)

In einer Arbeit, welche ich am 15. August 1877 der Kgl. Ges. d. Wissensch. vorgelegt hatte[1]), habe ich eine Methode beschrieben, mit deren Hülfe der in Radiometern auf die Flügel des Rädchens ausgeübte Druck in verhältnissmässig sehr einfacher Weise bestimmt werden kann. Ich habe in der Arbeit hervorgeboben, dass die von mir angegebenen Zahlenwerthe nur die Grössenordnung jenes Druckes wiedergeben; zu einer wirklichen Berechnung des Druckes ist die Kenntniss des Trägheitsmomentes nöthig, welches das Flügelrädchen besitzt; dieses aber hatte ich nur geschätzt und nicht gemessen. Ich bin an diese weit zurück liegenden Beobachtungen durch eine neue Arbeit von Donle[2]) erinnert worden. Donle hat mit Hülfe von Bifilarwaagen Druckmessungen ausgeführt, welche unter sich eine recht gute Uebereinstimmung zeigen. Aus dem Vergleiche seiner Zahlen mit den von mir früher angegebenen zieht er den Schluss, dass meine Werthe 40—60 mal grösser seien als die seinigen. Aus einem Fehler der Schätzung konnte ich mir eine so grosse Differenz nicht erklären; ich musste also fürchten, dass meiner Methode ein principieller Fehler anhafte. Nun hatte ich dieselbe Methode benutzt, um den Reactionsdruck der Kathodenstrahlen zu bestimmen; es lag mir also daran, den Grund der Differenz aufzuklären. Zunächst ergab sich nun, dass bei der Reduction der von mir seiner Zeit benutzten Maasse auf cm g sec ein Versehen gemacht worden war. Die von mir gefundenen Werthe sind thatsächlich nur 4—6 mal grösser als die Werthe Donle's.

---

1) E. Riecke, Göttinger Nachr. p. 500. 1877.

2) W. Donle, Wied. Ann. 68. p. 306. 1899.

Eine solche Differenz aber konnte immerhin durch Fehler in meiner Schätzung erklärt werden. Ich habe daher nachträglich die Trägheitsmomente der bei den Beobachtungen benutzten Radiometerkreuze gemessen; die damit berechneten Werthe der Drucke stimmen mit den von Donle gefundenen recht wohl überein, wie sich aus dem Folgenden ergiebt.

In der angeführten Arbeit habe ich für den Drehungswinkel φ des Flügelrädchens in seiner Abhängigkeit von der Zeit den folgenden Ausdruck abgeleitet:

$$\varphi = \alpha t - \alpha \tau (1 - e^{-t/\tau}).$$

Der Anfangspunkt der Zeit fällt zusammen mit dem Momente, in dem das Licht auf das Radiometer zu wirken beginnt; α ist der constante Endwerth der Winkelgeschwindigkeit; die Bedeutung von τ ergiebt sich aus der Bemerkung, dass für grosse Werthe der Zeit t an Stelle der obigen Gleichung die einfachere gesetzt werden kann:

$$\varphi = \alpha (t - \tau).$$

Bezeichnen wir ausserdem das Trägheitsmoment des Radiometers durch K, die Gesammtfläche der Flügel durch Q, den Abstand zwischen der Drehungsaxe und der Mitte der Flügel durch l, so ergiebt sich zur Berechnung des auf die Flügel ausgeübten Druckes die Gleichung:

$$p = \frac{\alpha K}{Q l \tau}.$$

Die Bestimmung der Trägheitsmomente K erfolgte nach der Gauss'schen Methode. Es wurde dabei als Träger der Radiometerkreuze ein bifilar aufgehängter Aluminiumcylinder benutzt, dessen Trägheitsmoment K_0 aus den Dimensionen und aus dem Gewichte berechnet werden konnte. Es ergab sich $K_0 = 0{,}335$. Das Gewicht des Aluminiumcylinders betrug 1,847 g.

Radiometer I.

Für dieses Radiometer war $Q = 6{,}20$ qcm., $l = 1{,}87$ cm. Die Masse des Kreuzes betrug 0,108 g. Um das Trägheitsmoment zu finden, wurde zuerst die Schwingungsdauer T_0 des

Aluminiumcylinders zweimal gemessen. Bei aufgelegtem Flügelrädchen wurden die Schwingungen stark gedämpft und die Genauigkeit der Beobachtungen wurde dadurch erheblich vermindert. Bei aufgelegtem Rädchen wurden daher 10 Messungen der Schwingungsdauer T ausgeführt. Zum Schluss wurde noch zweimal die Schwingungsdauer des Aluminiumcylinders allein beobachtet. Die Resultate der Beobachtungen sind im Folgenden zusammengestellt.

Schwingungsdauer des Aluminiumcylinders:

2,644	2,664	2,667	2,674

Im Mittel:

$$T_0 = 2,662.$$

Bei aufgelegtem Kreuze ergaben sich die Schwingungsdauern:

3,533	3,500	3,500	3,442	3,500
3,448	3,448	3,500	3,500	3,517

Im Mittel:

$$T = 3,489.$$

Bei diesen Schwingungen ist aber die Directionskraft nur zu einem Theile durch die Bifilarsuspension, zu einem anderen Theile durch die Torsion der Coconfäden gegeben. Um den letzteren Antheil berechnen zu können, wurde der Aluminiumcylinder schliesslich noch an einem einzelnen Coconfaden aufgehängt, welcher dieselbe Länge besass, wie die bei der Bifilarsuspension benutzten. Es ergaben sich jetzt die folgenden Schwingungsdauern:

7,22	7,28	7,23	7,24

Im Mittel:

$$\mathrm{T} = 7,242 \text{ sec.}$$

Wir bezeichnen die Directionskraft der Bifilarsuspension durch D_0, wenn sie nur durch den Aluminiumcylinder, durch D, wenn sie ausserdem durch das Flügelrädchen belastet ist; ferner verstehen wir unter Δ die Directionskraft, welche der Torsion eines Coconfadens entspricht, unter m_0 das Gewicht des Aluminiumcylinders, unter m das Gewicht des Rädchens. Wir haben dann die Gleichungen:

$$\frac{T_0^2}{\pi^2} = \frac{K_0}{D_0 + 2\Delta}, \quad \frac{T^2}{\pi^2} = \frac{K_0 + K}{D + 2\Delta}, \quad \frac{\mathrm{T}^2}{\pi^2} = \frac{K_0}{\Delta},$$

$$D m_0 = D_0 (m_0 + m).$$

Daraus ergiebt sich:

$$\frac{K}{K_0} + 1 = \frac{T^2}{T_0^2} \cdot \frac{m_0 + m}{m_0} \cdot \frac{1 + 2\frac{\Delta}{D_0} \cdot \frac{m_0}{m_0 + m}}{1 + 2\frac{\Delta}{D_0}}, \quad \frac{D_0}{\Delta} = \frac{\mathrm{T}^2}{T_0^2} - 2.$$

Setzt man in diesen Gleichungen die früher angegebenen numerischen Werthe ein, so findet man:

$$K = 0{,}265.$$

Mit Hülfe dieses Werthes ergiebt sich aus den in der früheren Arbeit mitgetheilten Beobachtungsreihen die folgende Zusammenstellung:

Abstand der Flamme von dem Radiometer	α	τ	p
80 cm	0,203	11,2	0,000 417
70 cm	0,303	11,8	0,000 586

Als Lichtquelle diente eine voll brennende Argandlampe. Bezeichnen wir den Abstand der Lichtquelle von dem Radiometer mit e, so ergiebt sich aus der ersten Beobachtungsreihe:

$$p e^2 = 2{,}67,$$

aus der zweiten

$$p e^2 = 2{,}87.$$

Im Mittel wird

$$p e^2 = 2{,}77.$$

In einer Entfernung von 50 cm wird daher der Druck der Lichtstrahlen auf die Radiometerflächen gleich

$$0{,}00111 \quad \mathrm{g\,.\,cm^{-1}\,.\,sec^{-2}}.$$

Dieses Resultat stimmt mit den von W. Donle gegebenen Werthen von 0,0007—0,0008 Dynen pro Quadratcentimeter so weit überein, als es bei der Verschiedenheit der Versuche erwartet werden kann.

Radiometer II.

Bei diesem Radiometer war $Q = 6,76$ qcm, $l = 1,67$ cm. Die Masse des Kreuzes betrug 0,106 g. Für die zur Berechnung des Trägheitsmomentes nöthigen Schwingungsdauern wurde mit Benützung einer etwas anderen Suspension gefunden:

$$T_0 = 2,737 \text{ und } T = 3,352.$$

Die Schwingungsdauer T war wie zuvor gleich 7,242 Sec.

Daraus ergab sich für das Trägheitsmoment der Werth $K = 0,188$. Die Normalen der Flügelflächen waren gegen die Horizontale geneigt; für die Neigungswinkel ergaben sich die Werthe: 40°, 23°, 21° und 36°. Bezeichnet man diese Winkel mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, so erhält man zur Berechnung des auf die Flügel ausgeübten Druckes die Formel:

$$p = \frac{\alpha K}{Q l \tau} \cdot \frac{4}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 + \cos\varphi_4}.$$

Auf Grund der früher mitgetheilten Beobachtungen ergiebt sich nun die folgende Zusammenstellung:

Abstand der Flamme von dem Radiometer	α	τ	p
40 cm	0,455	28,6	0,000 308
40	0,494	28,9	0,000 332
40	0,523	25,0	0,000 406
37	0,720	23,3	0,000 600
37	0,690	17,9	0,000 747
37	0,770	18,7	0,000 800

Zu einem Vergleiche mit anderen Messungen sind die mit dem zweiten Radiometer angestellten Beobachtungen wenig geeignet. Bei den verhältnissmässig kleinen Abständen zwischen Lampe und Radiometer musste die Lampe kurz geschraubt werden, um die Rotationsgeschwindigkeit in schicklichen Grenzen zu halten. Daher wechselte die Intensität der Lichtquelle von Versuch zu Versuch in einer nicht weiter zu bestimmenden Weise. Aber auch das Radiometer selbst genügte nicht den bei der Ableitung der Formel gemachten Voraussetzungen, sofern die Reibung des Rädchens auf der Spitze

mit der Rotationsgeschwindigkeit zunahm. Nimmt man an, dass die radiometrische Wirkung dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional sei, so ergeben sich für einen Abstand von 50 cm die folgenden Drucke auf die Flügel des zweiten Radiometers:

0,000 197	0,000 212	0,000 264
0,000 329	0,000 409	0,000 437

Sie liegen zwischen den Drucken, welche Donle für eine Stearinkerze und für einen Auerbrenner bei 50 cm Abstand gefunden hat.

(Eingegangen 10. August 1899.)

. ***Dielektrische Untersuchungen und elektrische Drahtwellen; von W. D. Coolidge.***

Einleitung.

Im Folgenden ist eine Methode zur Untersuchung kleiner ıbstanzmengen vermittels elektrischer Drahtwellen beschrieben, ılche eine grosse Genauigkeit in der Bestimmung der Di- ktricitätconstanten und der elektrischen Absorption erreichen st. Diese Methode ist eine Modification des von Drude [1]) ;ewandten Verfahrens, nach welchem die Resonanzlänge es Drahtsystemes aufgesucht wird, welches einen kleinen t der zu untersuchenden Substanz gefüllten Condensator hält. Hier dagegen wird dieser Condensator in das Erreger- tem eingeschaltet und die dadurch herbeigeführte Aende- ıg der Wellenlänge bez. der Dämpfung bestimmt. Dadurch d die Genauigkeit erheblich gesteigert und es lassen sich ch viel schwächere Absorptionen noch deutlich constatiren.

Experimenteller Theil.

I. Benutzung der Blondlot'schen Wellenerregung.

1. Die Versuchsanordnung.

Die specielle Anordnung des Apparates war folgende ;l. Fig. 1). Die 2 mm dicken Erregerdrähte E, E des

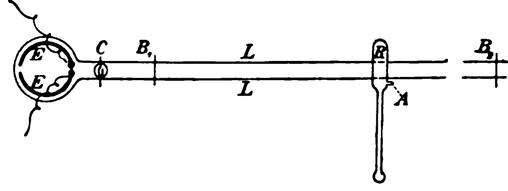


Fig. 1.

ondlot'schen Erregers umschlossen einen Kreis von 5 cm ırchmesser. Die Empfängerdrähte waren von Kupfer und

---

1) P. Drude, Zeitschr. f. physik. Chem. **23.** p. 282. 1897; Wied. n. **61.** p. 466. 1897.

hatten einen Durchmesser von 1 mm und eine gegenseitige Entfernung von 1,9 cm. *C* war ein kleiner mit Platinelektroden versehener Glaskolben, welcher mit der zu untersuchenden Substanz beschickt wurde. Wo es auf eine genaue Kenntniss der Temperatur ankam, oder wo dieselbe verschieden von der Zimmertemperatur sein sollte, wurde ein Kolben von der Gestalt (Fig. 2) angewandt — der Kolben hing dann in einem Oelbad. Wo dieses aber nicht der Fall war, wurde ein Kolben, wie der in Fig. 3 abgebildete, benutzt. Für kleine Capacität bestanden die Elektroden aus einfachem Platindraht, für

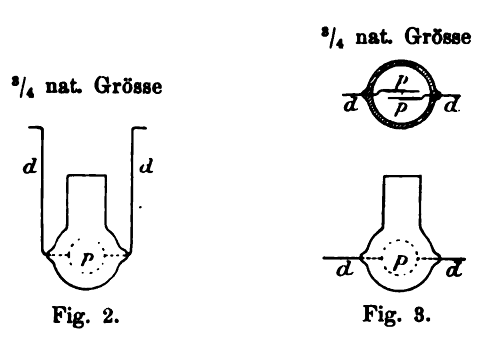


Fig. 2. Fig. 3.

grössere Capacität wurden Platinplatten (*p p* in den Figuren) an die Drähte (*d d*) geschweisst. In beiden Fällen lagen die Elektroden zu einander in der aus den Figuren ersichtlichen Weise, sodass durch einfache Biegung der die Elektroden tragenden Drähte die Capacität geändert werden konnte. Als Wellenindicator diente eine Zehnder'sche Röhre[1]) *R*, welche stets $^1/_4$ Wellenlänge hinter der ersten Brücke (vom Erreger aus gerechnet) aufgestellt wurde. Bei meinen ersten Versuchen wurden immer durch Verschiebung einer hinteren Brücke B_2 fünf Resonanzlagen bestimmt, bei denen die Röhre *R* gut aufleuchtete. Die Distanz zwischen den Resonanzlagen ist die halbe Wellenlänge $^1/_2\,\lambda$ der Erregerschwingung, in Luft gemessen. Vermittels der Methode der kleinsten Quadrate wurde die halbe Wellenlänge $^1/_2\,\lambda$ berechnet. In der Weise war es möglich, $^1/_2\,\lambda$ etwas genauer zu ermitteln, als wenn nur die

1) L. Zehnder, Wied. Ann. **47**. p. 82. 1892; die Röhre war hier in vereinfachter Form angewendet, indem die hier überflüssigen Elektroden der Röhre fortgelassen waren.

ersten zwei Knoten beobachtet wurden. Wegen zweier Umstände ist dieser Vortheil aber viel geringer, als man erwarten sollte: erstens ist man beim Beobachten der letzten Knoten nothwendigerweise so weit von der Röhre entfernt, dass das Aufleuchten derselben sich nicht so genau beurtheilen lässt, und zweitens nimmt mit wachsendem Abstand vom Erreger der Unterschied zwischen Knoten- und Bauchstärke [1]) ab, dementsprechend wird die Genauigkeit der Beobachtungen kleiner. Zur Erhöhung der Genauigkeit der Einstellungen der Brücke B_2 achtet man zweckmässig nur auf das Leuchten in dem kleinen Ansatzstück A (Fig. 1) der Zehnder'schen Röhre.[2]) Es genügt dann vollkommen, wenn man mit der Brücke B_2 den ersten und den zweiten Knoten bestimmt, deren Lagen sich bei den von mir angewendeten Wellenlängen ($\lambda = 1$ m bis 1,5 m) mit 0,2 mm Genauigkeit messen liessen. Man nähert die Brücke dem Knoten von beiden Seiten desselben und nimmt den Mittelwerth von diesen Einstellungen, bei denen das Ansatzstück A anfängt aufzuleuchten. Durch Aenderung der Entfernung der Ansatzröhre A von den Drähten kann die Entfernung zwischen den zwei Einstellungen beliebig klein gemacht werden. Wenn diese Entfernung gross ist (besonders bei beträchtlicher Dämpfung), so stimmt der Mittelwerth nicht genau mit dem Knoten überein. Der hierdurch gemachte Fehler ist aber gering, wenn man zwei aufeinanderfolgende Knoten beobachtet.[3]) Jedenfalls darf die Röhre, wenn nur eine Knotenlage gemessen werden soll, während der Messungen

---

1) Unter Knoten- und Bauchstärke ist zu verstehen die Intensität der Schwingungen bei der Röhre, wenn die zweite Brücke auf einem Knoten bez. Bauch der elektrischen Kraft liegt.

2) Wird die zweite Brücke in die Nähe einer Knotenlage geschoben, so leuchtet die Zehnder'sche Röhre zunächst nur in dem Haupttheile auf; das Ansatztück A leuchtet erst bei stärkerer Erregung, d. h. bei weiterer Annäherung von B_2 an diesen Knoten. Die dementsprechende Brückenlage lässt sich viel schärfer bestimmen als die Lage, in der eine starke Aenderung in der Intensität des Aufleuchtens der Hauptröhre eintritt. Die zwei Theile der Röhre können als zwei verschiedene Röhren aufgefasst werden; die kleinere wird durch die andere angeregt, und eine Röhre, welche so angeregt wird, ist bekanntlich empfindlicher und functionirt viel regelmässiger, als ohne Nebenerregung.

3) Für absorbirende Substanzen ist dies unbedingt nothwendig.

nicht mehr verschoben werden. Die erste Brücke B_1 war zur Erde abgeleitet und war gerade oder gebogen, je nachdem weniger oder mehr Energie über die Brücke B_1 herübergehen sollte. Die zweite Brücke B_2 war 1,9 cm lang und war mit einem schweren zugespitzten Metallstück, welches als Zeiger diente und über einer Millimetertheilung spielte, verbunden. Die Wellenlänge ist von der Capacität des Kolbens, d. h. von der Dielektricitätsconstante der ihn erfüllenden Substanz abhängig. Den elektrischen Absorptionsindex derselben findet man aus der zeitlichen Dämpfung der Wellen, welche man aus der Anzahl der hinter B_1 zu beobachtenden Knotenzahl erschliessen kann.

Die quantitativen Verhältnisse sollen später im theoretischen Theile berechnet werden. Zur Ermittelung der Dielektricitätsconstanten im Condensator C ist es am genauesten und bequemsten, wenn man durch Füllung mit verschiedenen Aichflüssigkeiten die Abhängigkeit der Wellenlänge von den Dielektricitätsconstanten ermittelt. Bei den hier zunächst zu beschreibenden Messungen ist jede Substanz mit drei Aichflüssigkeiten verglichen. Als Aichflüssigkeiten wurden Mischungen von Benzol und Aceton benutzt und deren Dielektricitätsconstanten nach den Bestimmungen von Drude (l. c.) angenommen. Deren Fehler wird wohl kleiner als 1 Proc. sein.

2. Controlversuche.

Die Tab. I zeigt die Brauchbarkeit der Methode. In der ersten Columne ε_1 befinden sich die nach der beschriebenen Methode ermittelten Dielektricitätsconstanten. Die zweite Columne ε_2 enthält die für dieselben Präparate vermittels des Drude'schen Apparates gewonnenen Werthe. Dieser Apparat wurde auch benutzt zur Ermittelung der in der dritten Columne ε_3 sich befindlichen Werthe für frischere Präparate. Die vierte Columne ε_4 enthält die von Drude[1]) angegebenen Dielektricitätsconstanten. Die beigefügten Zahlen in kleinerer Schrift sind die Beobachtungstemperaturen in Graden Celsius. Die letzten vier Columnen enthalten die gemessenen Dielektricitätsconstanten auf die Temperatur $\vartheta = 15{,}0^0$ umgerechnet;

1) P. Drude, Zeitschr. f. physik. Chem. 23. p. 2. 1897.

ich benutzte die von Löwe [1]) ermittelten Temperaturcoefficienten. Die Beobachtungen für Aethylacetat zeigen, dass in diesem Falle das ältere Präparat eine Aenderung erlitten hatte, aber die Beobachtungen für ein und dasselbe Präparat stimmen gut miteinander überein.

Tabelle I.

Substanz	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_1 ber.	ε_2 ber.	ε_3 ber.	ε_4 ber.
Aethylacetat	$6{,}28_{16}$	$6{,}23_{17}$	$5{,}89_{17}$	$5{,}85_{20}$	6,30	6,31	5,92	5,92
Isobutylacetat	$5{,}31_{16}$	$5{,}32_{17}$	—	$5{,}27_{19}$	5,33	5,35	—	5,34
Butylacetat	$4{,}98_{15}$	$5{,}01_{20}$	$5{,}02_{21}$	$5{,}00_{19}$	4,98	5,08	5,10	5,05
Amylacetat	$4{,}76_{15}$	—	—	$4{,}79_{19}$	4,76	—	—	4,83
Phenylacetat	$5{,}26_{17}$	—	—	$5{,}29_{19}$	5,27	—	—	5,32
Amylbenzoat	$4{,}95_{15}$	$5{,}02_{17}$	$4{,}99_{20}$	$4{,}99_{19}$	4,95	5,03	5,02	5,02
Isobutylbenzoat	$5{,}43_{14}$	$5{,}40_{17}$	—	$5{,}43_{18}$	5,42	5,42	—	5,46

3. Dielektricitätsconstanten einiger verflüssigter Gase.

Für diese Bestimmungen wurde ein Kolben von der in Fig. 3 abgebildeten Form benutzt. Derselbe wurde aus einer Glasröhre, welche einen äusseren Durchmesser von 7 mm und eine Wandstärke von 2 mm hatte, gefertigt. Der untere Theil des Kolbens hatte einen Durchmesser von 1,5 cm und eine Wandstärke von etwa 2,5 mm. Der Hals wurde sehr lang (25—30 cm) gemacht, und sicherheitshalber liess ich den ganzen Kolben nach dem Blasen in heisser Asche abkühlen. Zum Füllen wurde der Kolben in eine Kältemischung gebracht; das zu untersuchende Gas wurde durch eine dünne Glasröhre in den Kolben geleitet. Nachdem sich eine genügende Flüssigkeitsmenge gesammelt hatte, wurde der Hals des Kolbens zugeschmolzen. Der Kolben wurde jetzt aus der Kältemischung genommen und einige Zeit stehen gelassen. Nachdem er seine Fähigkeit, den Druck auszuhalten, gezeigt hatte, wurde er, wie gewöhnlich, auf die parallelen Drähte gelegt und $^1/_2\,\lambda$ bestimmt. Zur Bestimmung der Temperatur wurde ein Thermometer ganz in der Nähe des Kolbens aufgehängt. Dann wurde der Kolben wieder in die Kältemischung gebracht. Nachdem der Druck sich genügend erniedrigt hatte, wurde das

1) K. F. Löwe, Wied. Ann. **66**. p. 390. 1898.

obere Ende des Halses abgeschnitten und die Flüssigkeit ausgegossen. Dann konnte der Kolben mit verschiedenen Füllflüssigkeiten geaicht werden. In den folgenden Tabellen II, III und IV beziehen sich die Nummern in der ersten Columne auf diese Füllflüssigkeiten (Benzol—Acetongemische). Die Werthe von $^1/_2\,\lambda$ sind in Centimetern angegeben. Die Tabellen geben auch die Reihenfolge der Messungen.

Schwefeldioxyd. Dasselbe wurde durch Behandlung von Kupfer mit heisser concentrirten Schwefelsäure dargestellt und wurde zum Trocknen durch concentrirte Schwefelsäure geleitet. Die Absorption wurde nicht gemessen, aber, da die Zehnder'sche Röhre hell aufleuchtete, so war sie sicher nicht bedeutend. In Tab. II wurden die zwei Bestimmungen für SO_2 bei zwei verschiedenen Füllungen des Kolbens gemacht.

Tabelle II.

Substanz	$^1/_2\,\lambda$	Temp.	ε
Benzol	49,28	16,0	2,27
Schwefeldioxyd	60,99	15,0	13,75
Benzol	49,44	15,0	2,27
Schwefeldioxyd	61,00	14,0	13,75
7	61,86	16,0	14,5
6	57,25	15,2	10,4
8	65,68	15,0	17,6

Ammoniak. Das Gas wurde durch Erwärmung von Ammoniakwasser dargestellt. Zum Trocknen wurde es durch lange Röhren geleitet, die mit Kalihydrat und gebranntem Kalk gefüllt waren. Als Kältemischung diente ein Brei von fester Kohlensäure und Aether. Absorption war leicht zu constatiren; dieses liess sich aber erwarten, da flüssiges Ammoniak eine bedeutend grössere Leitfähigkeit als Wasser zeigt. Die Absorption ist also keine anormale.

Tabelle III.

Substanz	$^1/_2\,\lambda$	Temp.	ε
Ammoniak	65,62	14,0	16,2
6	58,72	14,2	10,45
8	67,66	14,3	17,7

Chlor. Das Gas wurde durch Einwirkung von Salzsäure auf Chlorkalk gewonnen, und mit ein wenig Wasser gereinigt. Dann wurde es durch ein wenig Kupfersulfatlösung geleitet, um Salzsäure zu entfernen, und endlich mit concentrirter Schwefelsäure getrocknet. Es war kein Angreifen der Platinelektroden zu bemerken; das Chlor befand sich allerdings etwa nur eine Stunde im Kolben.[1])

Tabelle IV.

Substanz	$^1/_2\,\lambda$	Temp.	ε
7	63,49	14,0	14,7
8	67,45	14,2	17,7
6	58,49	14,4	10,45
Chlor	49,50	14,1	1,88
Chlor	49,47	14,3	1,87
Benzol	49,80	14,5	2,27
1	50,52	14,2	2,99

Kohlendioxyd. Ein Kolben wurde mit festem Kohlendioxyd gefüllt und, wie gewöhnlich, zugeschmolzen. Bevor die Messungen fertig waren, platzte der Kolben unter dem grossen Druck. Die Messungen, die ich schon gemacht hatte, zeigten nur, dass die Dielektricitätsconstante bei Zimmertemperatur bedeutend kleiner als die des Benzols, also weniger als 2,2 ist.

Linde[2]) hat vermittelst der Nernst'schen Methode die Dielektricitätsconstanten von Schwefeldioxyd, Chlor und Kohlendioxyd gemessen, mit Ammoniak ist es ihm wegen Leitfähigkeit nicht gelungen. In Tab. V stelle ich seine Werthe, ε_L, neben die meinigen, ε_C.

Tabelle V.

Substanz	ε_C	ε_L
Schwefeldioxyd	$13{,}75_{14,5}$	$14{,}8_{23,0}$
Ammoniak	$16{,}2_{14,0}$	—
Chlor	$1{,}88_{14,1}$	$1{,}93_{14,0}$
Kohlendioxyd	$< 2{,}2_{14,0}$	$1{,}53_{15,0}$

1) Linde giebt an, dass Platin unter diesen Umständen angegriffen wird; vielleicht erklärt sich dies dadurch, dass seine Versuche bedeutend länger dauerten.

2) F. Linde, Wied. Ann. 56. p. 546. 1895.

Für Chlor stimmen die Messungen leidlich überein. Für Schwefeldioxyd ist der Unterschied beträchtlicher; aber von meinen Messungen halte ich gerade die für Schwefeldioxyd für die zuverlässigsten.

Goodwin und Thompson[1]) haben in der letzten Zeit die Dielektricitätsconstante von flüssigem Ammoniak bei seinem Siedepunkt, $\vartheta = -34^{\circ}$ C., bestimmt und zwar mit dem Drude'schen Apparat. Sie fanden $\varepsilon = 22$. Vermittelst dieses und des von mir gemessenen Werthes würde sich die Aenderung $\Delta\varepsilon$ von ε mit der Temperatur ergeben zu $\Delta\varepsilon = 0,121$ pro Grad und $\Delta\varepsilon/\varepsilon = 0,54$ Proc. pro Grad in der Nähe von $\vartheta = -34^{\circ}$ C.

Meine Methode erwies sich als eine sehr bequeme zur Untersuchung von verflüssigten Gasen. Wollte man den Einfluss des Druckes studiren, so würde man einen Kolben von der Form Fig. 2 und ein Oelbad benutzen.

4. Temperaturcoefficient des Wassers.

Drude[2]) findet für Wasser in der Nähe von 17°, $\Delta\varepsilon/\varepsilon = -0,450$ Proc. pro Grad, einen Werth, welcher mit dem von Heerwagen[3]) nach der elektrostatischen Methode ermittelten Werth ($\Delta\varepsilon/\varepsilon = -0.443$ Proc. pro Grad bei 17°) sehr gut übereinstimmt. Fl. Ratz[4]) findet durch Capacitätsmessungen zwischen 10° und 20° $\Delta\varepsilon/\varepsilon = -0,62$ Proc. pro Grad, und dieser Werth stimmt mit dem von Franke[5]) auf elektrometrischem Wege gefundenen gut überein. Da diese zwei Paare von Beobachtungen stark voneinander abweichen, so schien es wünschenswerth, die Werthe zu controliren.

Es wurde nur die erste Knotenlage bestimmt. Damit keine Verschiebung der ersten Brücke stattfinden konnte, wurde dieselbe an die Drähte festgelöthet. Ein Kolben von der Form der Fig. 2 wurde benutzt. Die Vorrichtung zur Ermittelung

1) H. M. Goodwin u. M. de K. Thompson, Phys. Review, **8.** Nr. **40.** Januar 1899.

2) P. Drude, Wied. Ann. **59.** p. 49. 1896.

3) F. Heerwagen, l. c. **49.** p. 272. 1893.

4) Fl. Ratz, Zeitschr. f. phys. Chem. **19.** p. 94. 1896.

5) A. Franke, Wied. Ann. **50.** p. 169. 1893.

einer beliebigen constanten Temperatur war folgende (vgl. Fig. 4): Ein Becherglas wurde zuerst mit Asbestpapier umwickelt; Neusilberdraht wurde darüber spiralig aufgewunden, dann wurde noch eine Schicht von Asbestpapier und zuletzt dicker Haarfilz umgewickelt. Eine abgesprengte Probirröhre R wurde jetzt an eine enge Glasröhre G geschmolzen und diese in einem grossen Kork K, welcher unten in das Becherglas genau passte, festgehalten. Das Ganze konnte unter die parallelen Drähte gebracht werden. Paraffinöl wurde in die Probirröhre gethan und Wasser in das Becherglas. Das letztere wurde vermittelst S gerührt. Da die Oberfläche des Wassers sich ca. 1 cm unter den Drähten befand, so übte das Wasser sehr wenig Einfluss auf die Wellenlänge aus. Damit dieses aber ganz ohne Einfluss auf das Endresultat war, wurde die Wasserhöhe sowohl, als die Höhe des Oelbades constant gehalten. Die Neusilberspirale wurde in den Stromkreis eines Accumulators mit Widerstandskasten eingeschaltet. Um eine beliebige Temperatur des Oelbades und des in dasselbe tauchenden Kolbens zu erlangen, wurde Wasser von dieser Temperatur in das Becherglas gethan und die Stromstärke in der Heizungsspirale durch Stöpseln des Widerstandskastens so regulirt, dass der Wärmeverlust gerade ersetzt wurde. In dieser Weise konnte die Temperatur sehr constant gehalten und zwischen weiten Grenzen variirt werden. Für höhere Temperaturen, 50° und mehr, empfiehlt es sich, ein wenig Paraffinöl über die Oberfläche des Wasserbades zu giessen — dieses verhindert das Entweichen von Wasserdampf, welcher sich sonst auf der Oberfläche der parallelen Drähte in kleinen Tropfen verdichtet und so eine geringe Erhöhung der Wellenlänge herbeiführt. Für die Temperatur 3,5° wurde fein zerstossenes Eis in das Becherglas gethan und darüber Eiswasser. Das Eiswasser wurde benutzt damit die Dielektricitätsconstante der oberen Schichten und deshalb der Einfluss derselben auf die Wellenlänge ungefähr constant bleiben sollte. Die Zuführungsdrähte zum Kolben, die sich in dem Paraffinöl befanden, hatten eine gewisse Capacität, und diese hängt von der Dielektricitätsconstante

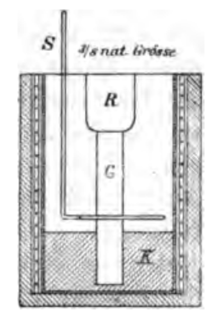


Fig. 4.

des Paraffinöls ab. Da diese Capacität aber sehr klein war, so liess sich erwarten, dass die geringe Aenderung der Dielektricitätsconstante des Paraffinöls mit der Temperatur zu vernachlässigen war. Dieses wurde auch direct durch Beobachtungen nachgewiesen. Zur Ermittelung der Temperatur wurde ein mit einem Normalthermometer verglichenes Thermometer, dessen Quecksilbergefäss sehr klein war, zuerst annähernd auf die Temperatur des Oelbades gebracht und dann in der Weise in das Oelbad getaucht, dass das Gefäss des Thermometers sich in derselben Höhe wie der untere Theil des Kolbens befand und zwar in Berührung mit demselben. Die Reihenfolge der Beobachtungen war die in Tab. VI angegebene. Unter der ersten Knotenlage darf man nicht $^1/_2\,\lambda$ verstehen; der Nullpunkt der Scala war nicht unter der ersten Brücke, sondern ca. 9 cm weiter (vom Erreger aus gerechnet), d. h. $^1/_2\,\lambda$ war ca. 75 cm. Auf eine genaue Kenntniss der halben Wellenlänge kommt es hier nicht an.

Tabelle VI.

Substanz	Temperatur	1. Knotenlage	ε
Wasser	13,6	66,936 ± 0,019	82,9
"	39,0	63,692 ± 0,045	73,6
"	3,5	68,289 ± 0,022	86,7
"	24,7	65,464 ± 0,019	78,6
"	19,0	66,211 ± 0,017	[80,9]
$CuSO_4$-Lösung	19,2	66,202	—
1	19,9	61,315	66,7
2	19,7	63,543	73,2

Als Aichflüssigkeiten dienten Wasser bei 19,0° und Flüssigkeiten 1 und 2; die letztgenannten Substanzen waren Gemische von 24,93 bez. 13,92 Proc. Aceton in Wasser. Wasser besitzt eine gewisse Leitfähigkeit, welche sich von 3,5—39,0° um ca. 90 Proc. ändert. Um sicher zu sein, dass die Resultate nicht durch diese wechselnde Leitfähigkeit beeinflusst wurden, wurde auch eine Kupfersulfatlösung benutzt. Die absolute Leitfähigkeit derselben war $6{,}05 \,.\, 10^{-14}$, d. h. ca. 6,5 mal so gross als die des Wassers. Nun liess Wasser bei 19,2° einen Werth von 66,184 für die erste Knotenlage erwarten.

Die Kupfersulfatlösung gab den Werth 66,202, d. h. einen nur um 0,2 mm grösseren Werth. Man kann deshalb wohl sagen, dass eine Störung durch wechselnde Leitfähigkeit des Wassers nicht zu befürchten war.[1]) Die Zehnder'sche Röhre wurde immer in derselben Lage gehalten; aber in dem Maasse, wie die Wellenlänge sich ändert, ändert sich auch die Lage der Röhre relativ zum Schwingungsbauch. Nun wirkt die Röhre genau so, wie ein kleiner, angehängter Condensator, und, wie von vornherein ersichtlich ist, übt ein solcher am meisten Einfluss auf die Resonanzlagen aus, wenn er auf einem Bauche der elektrischen Kraft liegt. Um zu sehen, ob diese Fehlerquelle zu vernachlässigen war, wurde die erste Knotenlage einmal gemessen, während die Röhre auf dem Schwingungsbauche, und einmal, während sie 5 cm davon entfernt lag. Im ersten Falle lag der erste Knoten bei 66,045, im zweiten bei 66,073. Die Temperatur hatte sich inzwischen nicht geändert. Wie zu erwarten, war die erste Knotenlage im zweiten Falle weiter von der ersten Brücke entfernt als im ersten Falle. Aber der Unterschied war sehr gering, nur 0,3 mm; ausserdem handelt es sich bei den in der Tab. VI angeführten Messungen um eine Verschiebung der Röhre relativ zum Bauche von nur 2 cm, sodass der durch diese Ursache hervorgerufene Fehler nicht zu berücksichtigen ist. Zwischen 3,5 und 24,7° ist der Verlauf der Dielektricitätsconstante (vgl. Curve [Fig. 5]) innerhalb der Beobachtungsfehler vollkommen linear, und $\Delta \varepsilon$ pro Grad = − 0,353. *Es ist also in der Nähe von 17° $\Delta \varepsilon / \varepsilon = -0,432$ Proc. pro Grad. Dieses stimmt mit dem Heerwagen'schen Werthe, − 0,443 und mit dem Drude'schen Werthe, − 0,450, gut überein. Für Temperaturen höher als 24,7° fand ich, wie Drude, einen etwas kleineren Temperaturcoefficienten.*

5. Genauigkeit der Resultate.

Es soll nun die nach dieser Methode erreichbare Genauigkeit betrachtet werden. Diese Betrachtungen schliessen sich am besten an die letzte Tabelle an, da die Bedingungen hier am besten waren — es sind aber Bedingungen, die bei

1) Unten wird theoretisch gezeigt, dass Leitfähigkeit überhaupt keinen Einfluss auf die Wellenlänge hat, solange sie gering ist.

allen nicht zu stark absorbirenden Substanzen durchaus realisirbar sind. Man hat nur dafür zu sorgen, dass die Röhre und der Erreger während einer Bestimmung ungestört bleiben und hat einen Kolben von passender Capacität zu wählen. Die Wahl des Kolbens hängt von der Grösse des Erregers ab. Bei dem von mir benutzten Erreger erwies sich als sehr günstig ein Kolben, welcher, mit der zu untersuchenden Substanz gefüllt, die Capacität[1]) $c^2 C = 3{,}1$ (im absoluten elektro-

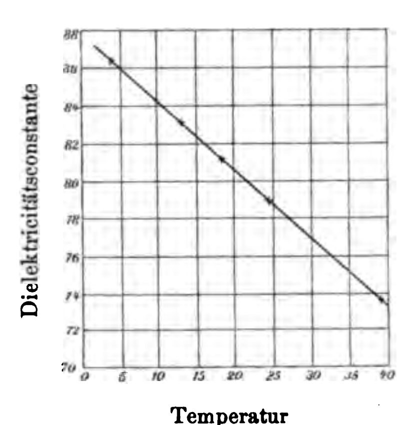


Fig. 5.

statischen Maasssystem) besass. Neben den Knotenlagen in Tab. VI stehen die wahrscheinlichen Fehler derselben. Obgleich die gegebenen Knotenlagen die Mittelwerthe von nur fünf Messungen darstellen, sind doch die wahrscheinlichen Fehler sehr klein — ein Mittelwerth derselben ist 0,024 cm. Der entsprechende Fehler in ε ist (dies ist von Curve I direct abzulesen) 0,066 oder, bei $\varepsilon = 80$, nur 0,082 Proc. Bei Vergleichung einer Substanz mit zwei Aichflüssigkeiten ergiebt sich der wahrscheinliche Fehler in ε (für $\varepsilon = 80$) zu 0,10 Proc. Nach dieser Methode ist es also möglich und zwar mit wenigen, z. B. nur fünf Messungen, *die Dielektricitätsconstante mit einem wahrscheinlichen Fehler von nur 0,1 Proc. relativ*[2]) *zu bestimmen.*

1) Die Capacität ist aus der Formel (20), p. 156, leicht zu berechnen.

2) d. h. im Vergleiche zu Aichflüssigkeiten von genau bekannter Dielektricitätsconstante.

Die wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Beobachtungen der Knotenlage waren im Durchschnitt 0,053 cm. Daraus ergiebt sich, *dass der wahrscheinliche Fehler in ε, falls nur eine Bestimmung der Knotenlage gemacht wird, nur 0,23 Proc. beträgt.*

6. Die elektrische Absorption des Wassers.

Wasser zeigt für elektrische Schwingungen kurzer Periode ($\lambda = 10$ cm) anormale Absorption.[1] Bis jetzt ist eine anormale Absorption bei längeren Wellen nicht beobachtet worden. Vermittelst der hier angewandten Methode, nach der die Anzahl der beobachtbaren Knoten festgestellt wurde, kann man eine Absorption bei der Wellenlänge $\lambda = 147$ cm constatiren und messen.

Apparat: Um etwas stärkere Schwingungen zu haben, als mit dem Apparate, welcher zur Bestimmung von Dielektricitätsconstanten diente, zu erzeugen waren, wurde der Erreger modificirt. Der Secundärkreis wurde ebenso gross im Durchmesser als der Primärkreis gemacht und lag gerade darunter. Zwischen beide wurden Glimmerblätter geschoben.[2] Der Kolben besass die in Fig. 3 angegebene Form. Da die Anzahl der beobachtbaren Knoten festgestellt werden sollte, und da dieselbe erheblich ist, so mussten die Lecher'schen Drähte etwa 20 m lang sein. Da nun das Zimmer viel kürzer war, so mussten die Drähte im Zickzack geführt werden. Zuerst wurde die Leitung in einer einzigen horizontalen Ebene geführt; aber die Symmetriestörung war zu gross; eine sehr erhebliche Reflexion fand an jeder Biegungsstelle statt, sodass die Anordnung aufgegeben werden musste. Mit gutem Erfolge aber wurde die Leitung wie in Fig. 6 (von der Seite gesehen) geführt. Die zwei parallelen Drähte liegen wie zuvor in derselben horizontalen Ebene, aber nach jeder Biegung

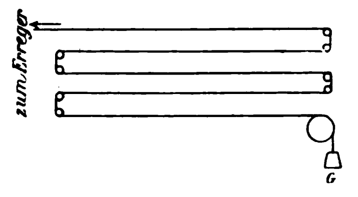


Fig. 6.

1) A. D. Cole, Wied. Ann. 57. p. 290. 1896; P. Drude, Wied. Ann. 65. p. 499. 1898.

2) Nähere Beschreibung dieses Erregers vgl. W. D. Coolidge, Wied. Ann. 67. p. 579. 1899.

setzen sie sich in einer tiefer liegenden Ebene fort. Die Drähte wurden durch Hartgummistäbe gehalten. Der Draht wurde zuerst sorgfältig ausgeglüht und durch das Gewicht *G* straff gehalten. Die Entfernung zwischen einer Hin- und Rückleitung war ca. 12 cm; bei dieser Entfernung war kein Einfluss der Rückleitung auf die Hinleitung zu beobachten. Die Zehnder'sche Röhre befand sich, wie immer, ca. $^1/_4$ Wellenlänge hinter der ersten Brücke.

Die Methode. Wenn in dem überbrückenden Condensator *C* (Fig. 1 auf p. 125) elektrische Absorption auftritt, so muss sich dies in einer Vergrösserung der zeitlichen Dämpfung der Schwingungen zeigen. P. Drude[1]) hat die zeitliche Dämpfung eines Blondlot'schen Erregers in der Weise gemessen, dass er bestimmte, bei welcher Entfernung der zweiten Brücke von der ersten Brücke der Unterschied zwischen Knoten- und Bauchstärke unmerklich würde (unter Knoten- und Bauchstärke sind zu verstehen, wie vorher, die Intensität der Schwingungen bei der Röhre, wenn die zweite Brücke auf einem Knoten bez. Bauch liegt). Mit seinem Erreger war diese Entfernung gleich 30 halben Wellenlängen, oder, in anderen Worten, es waren 30 Knoten zu beobachten. Durch theoretische Betrachtungen rechnete er die entsprechende Dämpfung aus. Meine erste Absicht war, in derselben Weise zu verfahren. Versuche aber lehrten, dass es sehr schwer wäre, bei meiner Versuchsanordnung mit Genauigkeit zu entscheiden, wie viele Knoten zu zählen waren. Anders war es aber, als ich eine kürzere erste Brücke (ihre Länge betrug 5,1 cm) und geringere Intensität der Wellen wählte — die Röhre leuchtete dann nur auf, wenn die zweite Brücke auf einem Knoten lag, und bei einer gewissen Knotenzahl hörte sie ganz auf zu leuchten. Diese Knotenzahl war leicht und genau zu bestimmen. Dass diese Bestimmung leichter zu machen war als die vorher erwähnte, lässt sich ja erwarten, da in einem dunklen Zimmer, wenn man mehrere Meter von einer kleinen Röhre entfernt steht, viel leichter das Aufleuchten der Röhre überhaupt zu constatiren ist, als Unterschiede in der Intensität seines Aufleuchtens

1) P. Drude, Abhandl. d. K. S. Gesellsch. d. Wissench. **40.** p. 95 ff. 1896.

festzustellen. In der Weise fand ich, dass, wenn ein Benzolcondensator auf die Drähte wie gewöhnlich gelegt war, 18 Knoten zu beobachten waren. Mit einem Luftcondensator gleicher Capacität liessen sich auch 18 Knoten zählen. Aber der Wasserkolben, dessen Capacität ebenfalls gleich der des Benzolcondensators war, liess nur 13—14 Knoten beobachten. Dieses Verhalten ist an verschiedenen Tagen mit verschiedenen Erregungsstärken stets bestätigt worden, wie folgende Tabelle

Tabelle VII.

Benzol	19	19	18	20	19	20	14	16	20 +
Wasser	15—16	15	13	13	15	14—15	10	12	15—16

Benzol	16	20	20	18	21	16	18	18	18,3 Mittel
Wasser	12	16	13—14	15	16	11	11	13	13,6 Mittel

lehrt, in der die beobachtbare Knotenzahl angeführt ist. Stets liessen sich also bei Benutzung des Wassercondensators etwa 5 Knoten weniger beobachten, als bei Benutzung des Benzolcondensators gleicher Capacität. Da alle anderen Bedingungen gleich geblieben waren,[1] so musste also durch die Eigenschaften des Wassers ein Energieverlust hervorgerufen werden. Es handelt sich nun darum, ob die Energieabsorption durch die elektrische Leitfähigkeit des Wassers zu erklären ist, oder ob sie durch anormale Absorption zu Stande kommt. Um dieses zu entscheiden, destillirte ich etwas von dem zuerst gebrauchten gewöhnlichen destillirten Wasser und liess kohlensäurefreie Luft durch dasselbe einige Zeit strömen. Die Leitfähigkeit des so behandelten Wassers war ca. halb so gross als vorher, aber seine Absorption war nicht merklich geringer — es waren immer nur 13—14 Knoten zu beobachten, während mit dem Benzol- oder Luftcondensator 18 Knoten, wie zuvor, zu zählen waren. Die Absorption schien sich daher nicht durch Leitfähigkeit erklären zu lassen. Dieser Schluss lässt sich auch durch theoretische Betrachtungen bestätigen, die weiter unten ausgeführt werden sollen. Es wird dort auch der Absorptionsindex $\varkappa$[2]) der anormalen elektrischen Absorption

1) Die Form der Condensatoren hatte auf das Resultat keinen Einfluss, wie direkt constatirt wurde.

2) $\varkappa$ ist dadurch definirt, dass die elektrische Energie nach Durchlaufen einer Wellenlänge in der Substanz im Verhältniss $1 : e^{4\pi\varkappa}$ geschwächt ist.

des Wassers berechnet werden. Es ist für $\lambda = 147$ cm: $\varkappa = 0{,}0082$. Wenn man die Leitfähigkeit des Wassers durch zugesetztes Kupfersulfat erhöhte, so nahm die Anzahl der beobachtbaren Knoten natürlich noch weiter ab. Diese Abnahme der Knotenzahl wird unten theoretisch berechnet werden. Die Theorie steht mit der Erfahrung im Einklang.

7. Anormale Absorption einiger Ester.

Die Dielektricitätsconstanten der betreffenden Ester sind von Löwe[1]) mit langsamen Schwingungen ($T = 0{,}67.10^{-8}$) und von P. Drude[2]) mit schnellen Schwingungen ($T = 25.10^{-10}$) bestimmt worden. Ausserhalb der Fehlergrenze dieser Messungen ist keine anormale Dispersion zu constatiren. Wenn diese wirklich nicht vorhanden wäre, so müsste man den Schluss ziehen, dass auch die anormale Absorption für diese Substanzen gleich Null ist. Dieser Schluss folgt aus der von P. Drude[3]) abgeleiteten Relation:

$$\text{(a)} \qquad \varkappa = \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}, \quad \text{wo} \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{(\varepsilon_\infty - \varepsilon)(\varepsilon - \varepsilon_0)},$$

wobei ε_∞, ε und ε_0 die Dielektricitätsconstanten für die Wellenlängen ∞, λ und 0 bedeuten, $\varkappa$ den Absorptionsindex. In der That beobachtete P. Drude bei den betreffenden Substanzen keine Absorption, nur bei Amylbenzoat einen sehr geringen Absorptionsindex ($\varkappa = 0{,}02$).

Die Thatsache aber, dass die letztgenannte Substanz anormale Absorption zeigte, liess erwarten, dass auch die anderen Ester, wenn sie nach einer empfindlicheren Methode untersucht würden, auch anormale Absorption nachweisen lassen würden. Diese Erwartung wurde, wie das Folgende zeigen wird, in einzelnen Fällen erfüllt.[4])

---

1) K. F. Löwe, Wied. Ann. **66.** p. 390. 1898.

2) P. Drude, Zeitschr. f. phys. Chem. **23.** p. 2. 1897.

3) P. Drude, Wied. Ann. **64.** p. 131. 1889.

4) In dieser Thatsache liegt kein Widerspruch mit der Gleichung (a), denn die gemessene Absorption ist immer so klein, dass der entsprechende Werth von $\varepsilon_\infty - \varepsilon_0$ sich nicht nach den bisher angewandten Methoden zur Ermittelung von Dielektricitätsconstanten constatiren lässt. Für Iso-

Mein Verfahren war das folgende: Der Wassercondensator, mit destillirtem Wasser beschickt, wurde auf die Drähte, wie gewöhnlich, gelegt, und $^1/_2\,\lambda$ sorgfältig bestimmt; dann wurde dieser Condensator durch einen anderen, den Messcondensator, ersetzt, welcher mit der zu untersuchenden Substanz beschickt wurde. Die Capacität dieses Messcondensators wurde nun so lange geändert (durch Biegung der Elektroden), bis dass $^1/_2\,\lambda$ denselben Werth hatte, wie beim Gebrauch des Wassercondensators, d. h. bis seine Capacität gleich der des letzteren war. Die zu beobachtende Knotenzahl k wurde jetzt bestimmt und falls dieselbe kleiner war, als beim Gebrauch des Wassercondensators, wurde der Wassercondensator mit Kupfersulfatlösungen von verschiedenen bekannten Leitfähigkeiten beschickt, bis eine Lösung gefunden war, für welche k denselben Werth hatte als für die zu untersuchende Substanz. Die Erregungsstärke kann ziemlich constant gehalten werden, aber, damit keine Täuschung durch eine Aenderung derselben herbeigeführt werden kann, empfiehlt es sich, die verschiedenen Kupfersulfatlösungen immer mit der zu untersuchenden Substanz direkt zu vergleichen. Dann wurde vermittelst der Kohlrausch'schen Methode die Leitfähigkeit der Substanz gemessen, um zu sehen, ob dieselbe Einfluss auf k haben könne.

Die Gesammtcapacitäten des Mess- und Wassercondensators waren gleich; da nun die zwei Kolben von derselben Form und die Capacitäten der ausserhalb der Flüssigkeit liegenden Theile sehr gering waren (für den Wassercondensator waren die Capacitäten der innen und aussen liegenden Theile 3,06 bez. 0,08), so ist anzunehmen, dass die Capacitäten der innerhalb der Flüssigkeit sich befindlichen Theile auch gleich waren. Wenn nun beide Condensatoren die gleiche Knotenzahl k ergeben, so müssen die Absorptionsindices der beiden Füllflüssigkeiten gleich sein. Dieselben setzen sich zusammen aus dem Absorptionsindex $\varkappa$ der anormalen elektrischen Absorption und dem Absorptionsindex $\varkappa'$, welcher durch die Leitfähigkeit σ nach absolutem elektro-

---

butylbenzoat z. B., welches von den untersuchten Verbindungen die stärkste Absorption ($\varkappa = 0{,}028$) zeigt, ergiebt sich aus (a), dass sich bei $\lambda = 70$ cm ε nur um 0,6 Proc. von ε_∞ unterscheiden würde.

magnetischen Maasse der Substanz herbeigeführt wird. Es besteht nun bei kleinem $\varkappa'$ die Relation[1]):

$$\varkappa' = \frac{\sigma c \lambda}{\varepsilon},$$

wo ε die Dielektricitätsconstante und c die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum ist. Bezeichnen wir daher die Zugehörigkeit zu den beiden verschiedenen Flüssigkeiten durch untere Indices 1 und 2, so ist

$$\varkappa_1 + \frac{\sigma_1 c \lambda}{\varepsilon_1} = \varkappa_2 + \frac{\sigma_2 c \lambda}{\varepsilon_2}.$$

Falls, wie es thatsächlich der Fall war, die Leitfähigkeit σ_2 des Esters gleich Null zu setzen ist, so ergiebt sich daher sein Absorptionsindex $\varkappa_2$ aus dem $\varkappa_1$ des Wassers und der Leitfähigkeit σ_1, sowie der Dielektricitätsconstante ($\varepsilon_1 = 81$) der Lösung aus der Formel

$$\varkappa_2 = \varkappa_1 + \sigma_1 \frac{c \lambda}{\varepsilon_1}.$$

Es ist aber, wie unten berechnet werden wird: $\varkappa_1 = 0,0082$, $\varepsilon_1 = 81$ für Wasser und die Kupfersulfatlösungen zu setzen, daher folgt

$$\varkappa_2 = 0,0082 + \sigma_1 \frac{c \lambda}{81}.$$

Mit dieser Formel wurden die Werthe von $\varkappa$ in Tab. VIII berechnet,[2]) λ betrug 147 cm.

Tabelle VIII.

Substanz	$\varkappa$ Präparat 1	$\varkappa$ Präparat 2	Substanz	$\varkappa$ Präparat 1	$\varkappa$ Präparat 2
Methylbenzoat	0,017	0,017	Amylacetat	0	—
Aethylbenzoat	0,018	0,018	Phenylacetat	—	0,012
Amylbenzoat	0,023	0,028	Methylformiat	—	0
Isobutylbenzoat	0,028	0,028	Propylformiat	—	0,008
Methylacetat	0	—	Isobutylformiat	0,008	—
Aethylacetat	0	—	Amylformiat	0,009	—
Propylacetat	0	—	Aethylpropionat	0	—
Butylacetat (n)	0	—	Aethylbutyrat	0	—
Isobutylacetat	0	—	Aethylvalerat	0	—

1) P. Drude, Wied. Ann. **61.** p. 495. Formel (38). 1897.

2) Im theoretischen Theil wird gezeigt werden, dass der Absorptionsindex einer Substanz aus der beobachtbaren Knotenzahl auch ohne Vergleich mit einer leitenden Lösung bestimmt werden kann.

Die Ester wurden von Kahlbaum bezogen; die Präparate 2 waren ganz frisch, die Präparate 1 nicht. Die ersten Präparate von Methyl-, Aethyl- und Amylbenzoat wurden alle gemessen, bevor die zweiten Präparate vorgenommen wurden, deshalb musste der Kolben aufs neue regulirt werden; dass sowohl dieses, als auch das Aufsuchen von einer Kupfersulfatlösung gleicher Dämpfung keine grossen Schwierigkeiten macht, ist aus der Uebereinstimmung der Werthe für die Präparate 1 und 2 zu ersehen. Die Leitfähigkeit war bei allen Ester, Isobutylformiat ausgeschlossen, zu klein, um berücksichtigt zu werden. Der gemessene Widerstand zwischen den Elektroden des Messcondensators bei Füllung mit Isobutylformiat war fast gleich dem Widerstand zwischen den Elektroden des Wassercondensators bei Füllung mit destillirtem Wasser, und, da die zu beobachtende Knotenzahl dieselbe war, wie für Wasser, so ist anzunehmen, dass die anomale Absorption des Isobutylformiats gleich der des Wassers ist.

II. Benutzung der Lecher'schen Wellenerregung.

1. Die Versuchsanordnung.

In dem Blondlot'schen Erreger ist immer nothwendigerweise sehr viel Selbstinduction im Secundärkreise vorhanden. Dies ist für Messzwecke einerseits günstig, da die Dämpfung dadurch klein gemacht wird; andererseits ist es aber ungünstig, da die Wellenlänge mehr von der Capacität beeinflusst wird, wenn die Selbstinduction möglichst klein ist. Deshalb schien die Lecher'sche Anordnung Vortheile zu bieten. Wegen der gesteigerten Dämpfung wurde aber diese Hoffnung nicht erfüllt; die Genauigkeit war ungefähr dieselbe wie beim Gebrauche des Blondlot'schen Erregers. Die Anordnung war aber bequem und für nicht absorbirende Substanzen sehr zweckmässig; sie wurde deshalb für alle folgenden Messungen benutzt.

Die Drähte LL des Erregers (vgl. Fig. 7) sind knapp in zwei Löcher eines rechteckigen Stückes Hartgummi geschoben und mit Siegellack festgekittet. Wie aus der unteren Zeichnung ersichtlich ist, sind die Drähte in einer Verticalebene

nach unten umgebogen, damit die Funkenstrecke *F*, welche sich zwischen den unteren kugeltragenden Enden befindet, in ein Petroleumbad hineintaucht. Dicht an die Drahtenden schliessen sich die Zuführungsdrähte zum Inductorium an. Bei *S* befindet sich eine Zuleitungsfunkenstrecke. Die Drähte *L' L'* sind ebenfalls eingekittet; diese Drähte setzen sich als Lecher'sche Paralleldrähte fort. Ihre gegenseitige Distanz beträgt 1,8 cm (vgl. Fig. 7). Die erste Brücke B_1 ist zur Erde abgeleitet. Die zweite Brücke (nicht auf der Zeichnung ersichtlich) ist verschiebbar und wie oben für das Blondlot'sche System mit einem schweren, zugespitzten Metallstücke verbunden,

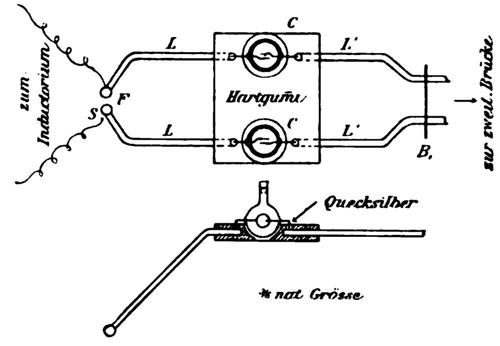


Fig. 7.

welches über einer Millimetertheilung spielt. Die Drähte *L L* und *L' L'* müssen nun leitend verbunden werden mit den Elektroden zweier Condensatoren *C C*, die mit den zu untersuchenden Substanzen beschickt wurden. Um dieses bequem bewerkstelligen zu können, ragten die Drähte *L L* und *L' L'* in vier kleine, in das Ebonitstück von oben gebohrte Löcher hinein, welche mit Quecksilber gefüllt wurden. In diese Quecksilbernäpfchen[1]) tauchten die zu den Elektroden der Condensatoren führenden Platindrähte. Als Condensatoren dienten zwei kleine Glaskolben. Zuerst probirte ich Condensatoren der in Fig. 2 angegebenen Form; diese aber erwiesen sich als unbrauchbar, da eine zufällige Biegung ihrer Zuleitungsdrähte

---

1) Dieselben waren klein, der Durchmesser der Löcher betrug nur 2 mm.

eine bedeutende Aenderung in der Wellenlänge verursachte. Es mussten daher Condensatoren von der in Fig. 7 angedeuteten Form benutzt werden. Um Verdunstung der zu untersuchenden Substanz und eine dies bedingende Abkühlung derselben zu vermeiden, wurden die Kolben immer gut zugestöpselt. Ein Thermometer, welches unmittelbar in der Nähe des Erregers hing, wurde am Anfange und Ende einer Messungsreihe abgelesen. Für die folgenden Versuche kam es nicht auf eine sehr genaue Kenntniss der Temperatur an. Die Vortheile der Anordnung lassen sich etwa so zusammenfassen:

1. Der Apparat ist sehr leicht zu construiren.

2. Eine Aenderung in der Länge der Hauptfunkenstrecke übt keinen bemerklichen Einfluss auf die Wellenlänge aus.

3. Mit ein und demselben Erreger kann die Wellenlänge zwischen fast beliebigen Grenzen variirt werden durch Verschiebung der Brücke B_1 und Elektrodenbiegung.

4. Da die Primär- und Secundärkreise starr zusammen verbunden sind, so ist durch zufällige, auch unsanfte Berührung keine Aenderung in der Wellenlänge zu befürchten.

5. Wenn die erste Brücke, wie es in meinen Versuchen der Fall war, in der Nähe des Erregers liegt, so ist die Aichungscurve (Coordinaten ε und $^1/_2\,\lambda$) zwischen weiten Grenzen fast vollkommen geradlinig.

Als Nachtheile müssen erwähnt werden:

1. Die zu untersuchende Substanz wird als Dielektricum bei grosser Erregungsstärke stark beansprucht und kann, wenn sie ein Elektrolyt ist, eine geringe Zersetzung erleiden. Dies war bei verdünnten Kupfersulfatlösungen und sogar bei undestillirtem Wasser zu beobachten.

2. Bei stark absorbirenden Substanzen tritt wegen der Energieabsorption eine bemerkliche Temperaturerhöhung ein.

Man kann die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Capacität der Condensatoren, d. h. der Dielektricitätsconstante der Flüssigkeit theoretisch angeben (dies soll unten geschehen). Genauer ermittelt man aber die Dielektricitätsconstante einer Substanz, indem man durch Aichflüssigkeiten diese Abhängigkeit des λ von ε feststellt.

Um die Brauchbarkeit der Methode zu zeigen, gebe ich in Tab. IX die gewonnenen Werthe von ε für drei Ester und daneben (ε_D) die Drude'schen Zahlen; die in kleiner Schrift beigefügten Zahlen sind die Beobachtungstemperaturen in Graden Celsius. In der letzten Columne (ε_D ber.) sind die Drude'schen Zahlen vermittelst der von Löwe[1]) angegebenen Temperaturcoefficienten auf $\vartheta = 14^0$ umgerechnet.

Tabelle IX.

Substanz	ε_C	ε_D	ε_D ber.
Isobutylbenzoat	$5,44_{14}$	$5,43_{18}$	$5,47_{14}$
Amylbenzoat	$5,01_{14}$	$4,99_{19}$	$5,02_{14}$
Methylbenzoat	$6,63_{14}$	$6,62_{18}$	$6,66_{14}$

Jetzt sollen einige Anwendungen der Methode besprochen werden.

2. Dielektricitätsconstante von Mischungen von Aethyläther und Chloroform.

Philip[2]) hat gefunden, dass Gemische von Aethyläther und Chloroform in jedem Mischungsverhältniss eine grössere Dielektricitätsconstante aufweisen, als jeder ihrer Bestandtheile. Seine Messungen wurden mit langsamen Schwingungen nach der Nernst'schen Methode angestellt. In Tab. X sind meine Messungen für solche Gemische angeführt.

Tabelle X.

Aethyläther und Chloroform.

Procentgehalt an Aether	$^1/_2\,\lambda$	$\varepsilon_{14,0^0}$
100	46,67	4,39
56,26	52,66	5,81
26,37	54,59	6,28
9,94	52,15	5,69
0,0	49,27	5,01

1) K. F. Löwe, Wied. Ann. **66.** p. 390. 1898.
2) J. C. Philip, Zeitschr. f. phys. Chem. **24.** p. 29. 1897.

Curve I (Fig. 8) stellt meine Beobachtuugen bei $\vartheta = 14,0^{\circ}$ dar, und Curve II (Fig. 8) die von Philip bei $\vartheta = 18,0^{\circ}$. Wie ein Vergleich lehrt, stimmen die Messungen qualitativ überein — die Dielektricitätsconstante der Gemische ist immer grösser als die der Bestandtheile und beide Curven erreichen ihr Maximum bei ca. 32 Proc. Aether. Es findet beim Mischen


Aethyläther und Chloroform.

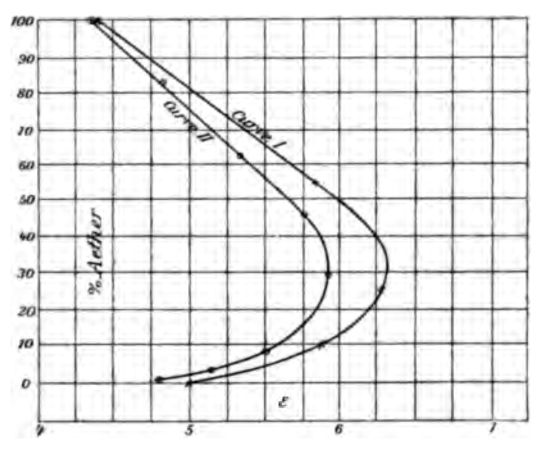


Fig. 8.

der Componenten eine erhebliche Temperaturerhöhung statt. Um diese und das Verhalten der Dielektricitätsconstanten zu erklären, meinte Philip, es finde hier wahrscheinlich eine intramoleculare Reaction statt. Dies erklärt vielleicht auch, warum die zwei Curven in der Mitte, wo der Einfluss der Reaction am stärksten hervortritt, soweit auseinander liegen — die Reaction wird vielleicht von der Temperatur und anderen Nebenumständen stark beeinflusst.

3. Untersuchung von Aethyläther.

Aethyläther wird als Aichflüssigkeit vielfach benutzt. Die von verschiedenen Beobachtern angegebenen Werthe aber schwanken. Drude[1]) findet bei $18,0^{\circ}: \varepsilon = 4,36$; Nernst[2]) bei

1) P. Drude, Zeitschr. f. phys. Chem. (2) **23**. p. 308. 1897.
2) W. Nernst, l. c. **14**. p. 622. 1894.

18,0°: 4,25; Thwing[1]) bei 15,0°: 4,27 und Linde[2]) bei 16,0°: 4,40. Ich benutzte wasserfreien Aether, in welchem mehrere Tage Natriumdraht gelegen hatte. Die Resultate von vier verschiedenen Messungsreihen sind in folgender Tabelle enthalten. Es wurden wiederum als Aichflüssigkeiten die Mischungen von Aceton und Benzol benutzt.

Tabelle XI.

$^1/_2\,\lambda$	Temperatur	ε
41,41	17,6	4,35
41,39	17,8	4,34
41,42	17,8	4,35
41,40	18,0	4,35

Der Mittelwerth $\varepsilon = 4,35$ stimmt mit dem Drude'schen Werth $\varepsilon = 4,36$ sehr gut überein.

Um zu sehen, ob das Wasser in wasserhaltigem Aether sich ausfrieren lässt, wurde eine dünne Probirröhre mit solchem Aether beschickt und in eine Kältemischung (feste Kohlensäure und Aether) getaucht; der obere Theil wurde nach einiger Zeit sorgfältig abgegossen und beobachtet. Die Dielektricitätsconstante, vorher gemessen, war 4,50, nachher ergab sich 4,51, d. h. innerhalb der Beobachtungsfehler war keine Aenderung wahrzunehmen. Der Zusatz von Natriumdraht zeigte auch durch lebhafte Blasenentwickelung, dass der Aether von Wasser keineswegs befreit worden war.

4. Benzol.

Um zu sehen, ob Benzol im Stande sei, Wasser genug aufzunehmen, um seine Dielektricitätsconstante merklich zu beeinflussen, wurde Benzol mit Wasser durchgeschüttelt und drei Wochen stehen gelassen. Die Dielektricitätsconstante des Benzols hatte sich dadurch nicht geändert, d. h. die Aenderung war weniger als 0,5 Proc. (eine bedeutend höhere Genauigkeit

---

1) Ch. B. Thwing, l. c. p. 286. 1894.
2) F. Linde, Wied. Ann. 56. p. 559. 1895.

wäre hier erreichbar gewesen, nur wegen der kleinen Dielektricitätsconstante des Benzols hatten die benutzten Kolben eine zu kleine Capacität).

5. Dielektricitätsconstante verschiedener Alkohole in verdünnter Lösung.

Philip[1]) hat gefunden, dass die Dielektricitätsconstanten von Mischungen annähernd durch die Formel

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{d}\cdot 100 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}-1}{d_1}\cdot p_1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_2}-1}{d_2}(100-p_1)$$

ausgedrückt werden können. Hier bedeuten ε, ε_1, ε_2 die Dielektricitätsconstanten der Mischung, der ersten und der zweiten Componenten, d, d_1, d_2 die Dichten derselben und p_1 die Gewichtsmenge der ersten Componente in 100 Theilen der Mischung. Philip hat die Formel angewandt zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante ε_1 einiger Alkohole in verschiedenen Lösungsmitteln. Seine Messungen wurden vermittelst einer Modification der Nernst'schen Methode gemacht, also mit langsamen Schwingungen. Es ergab sich, dass ε_1 bei abnehmender Concentration abnahm und sich einem gewissen Grenzwerth näherte.

Da nun die Alkohole bedeutende Dispersion zeigen, so schien es wünschenswerth, diese Messungen von Philip mit schnellen Schwingungen zu controliren. Dies geschah vermittelst des oben beschriebenen Lecher'schen Systemes mit einer Wellenlänge von ca. 82 cm. Die Dichte der Alkohole und der Lösungsmittel wurde gemessen, die der Mischungen aber aus diesen berechnet. Bei grosser Verdünnung ist dies gestattet. Die Dichte ist auf Wasser bei 19,0° C. bezogen.

---

1) J. C. Philip, Zeitschr. f. phys. Chem. **24**. p. 18. 1897. Die Formel

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{100}{d} = \frac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1+2}\cdot\frac{p_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2-1}{\varepsilon_2+2}\cdot\frac{100-p_1}{d_2}$$

ist ebenfalls von Philip geprüft worden. Diese Formel steht auf sichererem Boden als die andere; trotzdem aber sprachen die von Philip angegebenen Messungen entschieden zu Gunsten der $\sqrt{\varepsilon}-1/d$-Formel. Ich habe diese deshalb so wie er benutzt.

Tabelle XII.

Proc.-Alkohol	Dichte$_{19,0^\circ}$	$\varepsilon_{19,0^\circ}$	ε Alkohol (ber.)
Benzol + Methylalkohol			
5	0,8749	2,930	28,26
4	0,8758	2,767	26,64
3	0,8766	2,608	24,00
2	0,8775	2,469	21,22
1	0,8784	2,356	19,22
0,5	0,8788	2,306	18,26
0	0,8792	[2,260]	—
Toluol + Methylalkohol			
4,009	0,8663	2,839	29,19
3,004	0,8670	2,690	26,87
2,001	0,8678	2,557	24,34
1,000	0,8685	2,440	21,04
0,500	0,8689	2,390	18,92
0	0,8692	2,347	—
Benzol + Aethylalkohol			
6,978	0,8726	2,969	19,13
4,973	0,8745	2,732	18,05
2,977	0,8764	2,508	15,63
1,982	0,8773	2,417	14,85
0,990	0,8783	2,327	12,40
0	0,8792	[2,260]	—
Toluol + Aethylalkohol			
5,051	0,8651	2,787	15,22
4,038	0,8659	2,673	13,95
3,025	0,8667	2,577	12,71
2,015	0,8675	2,488	12,09
1,006	0,8684	2,425	11,04
0	0,8692	2,363	—
Benzol + Propylalkohol			
9,783	0,8725	2,999	13,58
7,324	0,8741	2,765	12,50
4,873	0,8758	2,574	11,80
8,895	0,8764	2,503	11,41
1,945	0,8778	2,369	10,37
0,972	0,8785	2,311	9,72
0,485	0,8788	2,285	9,63
0	0,8792	[2,260]	—

Tabelle XII (Fortsetzung).

Proc.-Alkohol	$\text{Dichte}_{19,0^\circ}$	$\varepsilon_{19,0^\circ}$	$\varepsilon_{\text{Alkohol (ber.)}}$
	Benzol + Amylalkohol		
23,13	0,8631	3,198	7,097
13,55	0,8697	2,761	6,734
9,98	0,8721	2,641	6,980
7,13	0,8741	2,509	6,588
5,09	0,8756	2,410	5,755
2,54	0,8774	2,343	6,265
0	0,8792	[2,260]	—

Die gemessenen Dichten der Alkohole waren, bei $\vartheta = 19,0^\circ$:

Methylalkohol	0,8015
Aethylalkohol	0,7950
Propylalkohol	0,8152
Amylalkohol	0,8132

ɜ Grenzwerthe der berechneten Dielektricitätsconstanten · Alkohole, d. h. die Werthe, die diese erreichen wurden der Concentration Null (aus den Curven extrapolirt), gebe in Tab. XIII neben den von Philip angegebenen Zahlen. der ersten Zahlencolumne sind meine Werthe, in der zweiten von Philip.

Tabelle XIII.

Grenzwerthe der Alkohole		
Methylalkohol in Benzol	17,5	16,0
Methylalkohol in Toluol	17,0	—
Aethylalkohol in Benzol	10,5	11,0
Aethylalkohol in Toluol	10,0	—
Propylalkohol in Benzol	9,0	8,5
Amylalkohol in Benzol	6,0	6,0

Man gelangt also mit schnellen und langsamen elektrischen wingungen zu denselben Grenzwerthen der Dielektricitäts-stante der Alkohole, dieselben sind also frei von elektrischer persion, während die Dielektricitätsconstante concentrirter Lö-gen oder der Alkohole selbst sehr starke Dispersion zeigen.

Theoretischer Theil.

1. Allgemeine Grundlage.

Es soll zunächst das System der Fig. 9 betrachtet werden, welches aus zwei parallelen Drähten besteht, die durch zwei Capacitäten (C' und C) und eine Metallbrücke (B) miteinander verbunden sind.[1] Wir wollen die Eigenschwingungen des Systemes berechnen. Es bedeute t die Zeit, z die Axenrichtung der parallelen Drähte, γ die zeitliche Dämpfung der Schwingungen des Systemes, $\lambda = c\,T$ die Wellenlänge dieser Schwingungen (c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum), $\mathfrak{e}$ die elektrische Ladung pro Längeneinheit des Drahtes, i die Stromstärke in einem Drahte; C, C' die Capacitäten der Condensatoren. Alle Grössen seien nach elektromagnetischem Maasse gemessen. Es besteht dann zunächst die Gleichung:[2]

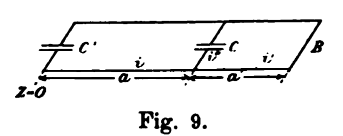


Fig. 9.

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}. \tag{1}$$

In den Drähten pflanzen sich Wellen nach der positiven und negativen z-Axe fort, wir wollen daher setzen:

$$\begin{cases} i = A_1\, e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)} + A_2\, e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)} \\ i' = A'_1\, e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)} + A'_2\, e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)}, \end{cases} \tag{2}$$

worin $\alpha = -\gamma + 2\pi\sqrt{-1}$ bedeutet, i und i' die Stromstärke in a bez. a', und die A complexe Grössen sein können. Die physikalische Bedeutung der Gleichungen (2) ist eigentlich die, dass i und i' nur gleich den reellen Theilen der hier geschriebenen complexen Grössen sein sollen; da aber alle zu benutzenden Gleichungen linear sind, können wir zur Vereinfachung der Rechnung i und i' den complexen Grössen zunächst direct gleich setzen.

---

1) Die Capacität C' wird nur der Allgemeinheit halber eingeführt. Wird sie unendlich, dann geht das System in das Blondlot'sche System über, und wird $C = 0$, dann liegt ein Lecher'sches System vor.

2) G. R. Kirchhoff, Pogg. Ann. **100.** p. 193, 351; **102.** p. 529. 1857; P. Drude, Phys. d. Aethers. p. 376. 1894. Dort enthält die rechte Seite der Gleichung den Factor $1/c$, weil $\mathfrak{e}$ elektrostatisch definirt ist.

An der Stelle $z = a$ tritt eine Stromverzweigung ein, da in den Condensator ein Strom der Stärke i'' einfliesst. Nennt man die Potentialdifferenz der Condensatorplatten $V_1 - V_2$, und w den galvanischen Widerstand zwischen denselben, falls die den Condensator füllende Substanz Leitfähigkeit hat, so ist

$$(3) \qquad i'' = C\frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial t} + \frac{V_1 - V_2}{w};$$

ferner ist nach den Stromverzweigungsgesetzen

$$(4) \qquad i = i' + i''.$$

Die Potentiale V_1 und V_2 auf den Condensatorplatten sind identisch mit den auf den Drähten stattfindenden Potentialwerthen an der Stelle $z = a$. Nun ist[1])

$$(5) \qquad V_1 = - V_2 = 2\,\mathfrak{e}\,c^2 \log\frac{d}{R},$$

falls d die Entfernung zwischen den parallelen Drähten und R ihren Radius bedeutet, es ist daher nach (3) und (5)

$$(6) \qquad i'' = 4\,c^2 \log\frac{d}{R}\left(C\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \frac{\mathfrak{e}}{w}\right).$$

Für $\partial \mathfrak{e}/\partial t$ muss man entsprechend (1), sowohl $-\partial i/\partial z$, als auch $-\partial i'/\partial z$ setzen können, sodass nach (4) die bei $z = a$ zu erfüllenden Bedingungen lauten:

$$(7) \qquad \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{\partial i'}{\partial t} = -4\,c^2 \log\frac{d}{R}\left(C\frac{\partial^2 i}{\partial t\,\partial z} + \frac{1}{w}\frac{\partial i}{\partial z}\right), \text{ für } z = a.$$

$$(8) \qquad \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial i'}{\partial z}, \text{ für } z = a.$$

An der Stelle $z = 0$ ergiebt eine ähnliche Betrachtung sofort:

$$(9) \qquad \frac{\partial i}{\partial t} = 4\,c^2 \log\frac{d}{R}\left(C'\frac{\partial^2 i}{\partial t\,\partial z} + \frac{1}{w'}\frac{\partial i}{\partial z}\right) \text{ für } z = 0,$$

falls w' der galvanische Widerstand zwischen den Elektroden des Condensators C' ist. An der Stelle $z = a + a'$ muss die Ladung $\mathfrak{e}$ verschwinden, d. h. es ist

$$(10) \qquad \frac{\partial i'}{\partial z} = 0 \text{ für } z = a + a'.$$

---

1) G. R. Kirchhoff, Pogg. Ann. **100.** p. 193. 351; **102.** p. 529. 1857; P. Drude, Phys. d. Aethers p. 379. 1894.

Nun ist $\partial i/\partial t = \alpha i / T$, setzt man daher

$$(11)\quad 4\,c^2 \log\frac{d}{R}\left(C' + \frac{T}{\alpha\,w'}\right) = g,\quad 4\,c^2 \log\frac{d}{R}\left(C + \frac{T}{\alpha\,w}\right) = h,$$

$$A'_1 \,.\, e^{-\alpha\frac{a}{\lambda}} = A''_1,\quad A'_2 \,.\, e^{+\alpha\frac{a}{\lambda}} = A''_2,$$

so folgt aus (2) und den Bedingungen (7) bis (10):

$$(12)\quad A_1 \,.\, e^{-\alpha\frac{a}{\lambda}} + A_2 \,.\, e^{+\alpha\frac{a}{\lambda}} - (A''_1 + A''_2) = h\frac{\alpha}{\lambda}(A''_1 - A''_2).$$

$$(13)\quad A_1 \,.\, e^{-\alpha\frac{a}{\lambda}} - A_2 \,.\, e^{+\alpha\frac{a}{\lambda}} = A''_1 - A''_2.$$

$$(14)\quad A_1 + A_2 = -\,g\frac{\alpha}{\lambda}(A_1 - A_2).$$

$$(15)\quad A''_1 \,.\, e^{-\alpha\frac{a'}{\lambda}} - A''_2 \,.\, e^{+\alpha\frac{a'}{\lambda}} = 0.$$

Durch Addition bez. Subtraction, von (12) und (13) giebt sich:

$$2\,A_1 \,.\, e^{-\alpha\frac{a}{\lambda}} = A''_1\left(2 + h\frac{\alpha}{\lambda}\right) - A''_2 \,.\, h\frac{\alpha}{\lambda},$$

$$2\,A_2 \,.\, e^{+\alpha\frac{a}{\lambda}} = A''_1 \,.\, h\frac{\alpha}{\lambda} + A''_2\left(2 - h\frac{\alpha}{\lambda}\right),$$

oder, da nach (15) $A''_1 = A''_2 \,.\, e^{2\alpha(a'/\lambda)}$ ist:

$$2\,A_1 \,.\, e^{-\alpha\frac{a}{\lambda}} = A''_2\left\{e^{2\alpha\frac{a'}{\lambda}}\left(2 + h\frac{\alpha}{\lambda}\right) - h\frac{\alpha}{\lambda}\right\}$$

$$= A''_2 \,.\, e^{2\alpha\frac{a'}{\lambda}}\left\{2 + h\frac{\alpha}{\lambda}\left(1 - e^{-2\alpha\frac{a'}{\lambda}}\right)\right\}$$

$$2\,A_2 \,.\, e^{+\alpha\frac{a}{\lambda}} = A''_2\left\{e^{2\alpha\frac{a'}{\lambda}} \,.\, h\frac{\alpha}{\lambda} + 2 - h\frac{\alpha}{\lambda}\right\}$$

$$= A''_2\left\{2 - h\frac{\alpha}{\lambda}\left(1 - e^{+2\alpha\frac{a'}{\lambda}}\right)\right\}.$$

Durch Division dieser beiden letzten Gleichungen fol

$$\frac{A_1}{A_2} \,.\, e^{-2\alpha\frac{a}{\lambda}} = e^{2\alpha\frac{a'}{\lambda}}\,\frac{2 + h\frac{\alpha}{\lambda}\left(1 - e^{-2\alpha\frac{a'}{\lambda}}\right)}{2 - h\frac{\alpha}{\lambda}\left(1 - e^{+2\alpha\frac{a'}{\lambda}}\right)}$$

$$= \frac{2 \,.\, e^{2\alpha\frac{a'}{\lambda}} + h\frac{\alpha}{\lambda}\left(e^{2\alpha\frac{a'}{\lambda}} - 1\right)}{2 + h\frac{\alpha}{\lambda}\left(e^{2\alpha\frac{a'}{\lambda}} - 1\right)}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(16) \qquad \frac{e^{2\alpha\frac{a'}{\lambda}}+1}{e^{2\alpha\frac{a'}{\lambda}}-1} = \varphi,$$

so lässt sich die letzte Gleichung umformen in

$$\frac{A_1}{A_2}\cdot e^{-2\alpha\frac{a}{\lambda}} = \frac{\varphi+1+h\frac{\alpha}{\lambda}}{\varphi-1+h\frac{\alpha}{\lambda}}.$$

Da nun nach (14)

$$A_1 : A_2 = -\left(1-g\frac{\alpha}{\lambda}\right):\left(1+g\frac{\alpha}{\lambda}\right),$$

so ergiebt sich, falls man noch die Abkürzung einführt:

$$(17) \qquad \frac{e^{2\alpha\frac{a}{\lambda}}+1}{e^{2\alpha\frac{a}{\lambda}}-1} = \chi,$$

zur Berechnung von α/λ die Gleichung

$$(18) \qquad 1+\left(h\frac{\alpha}{\lambda}+\varphi\right)\left(g\frac{\alpha}{\lambda}+\chi\right)+\chi\varphi\frac{\alpha}{\lambda}=0.$$

Es ist zu berücksichtigen, dass nach Gleichung (11) auch die Grössen g und h die Grösse α enthalten. Im allgemeinsten Falle, d. h. wenn die Widerstände w und w' der Condensatoren C und C' nicht unendlich gross angenommen werden, ist g und h complex; die Gleichung (18) zerfällt dann durch Trennung der reellen und imaginären Bestandtheile in zwei Gleichungen, aus denen sowohl die zeitliche Dämpfung γ als die Wellenlänge λ zu berechnen ist. Wird $w = w' = \infty$ gesetzt, so ist g und h reell. Es ergiebt sich dann aus (18), dass $\gamma = 0$ sein kann, was von vornherein klar ist, wenn wir keinen Energieverlust durch Strahlung oder durch Joule'sche Wärme in den Drähten annehmen. In diesem Falle ist $\alpha = 2\pi\sqrt{-1}$, daher nach (17) und (16), da die Formel besteht:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}+1}{e^{x\sqrt{-1}}-1} = -\sqrt{-1}\,\operatorname{cotg}\frac{1}{2}x:$$

$$(19) \quad \chi = -\sqrt{-1}\,.\operatorname{cotg}\frac{2\pi a}{\lambda}, \quad \varphi = -\sqrt{-1}\,.\operatorname{cotg}\frac{2\pi a'}{\lambda}.$$

Betrachten wir specieller den Fall, dass die Drähte bei $z = 0$ anstatt durch einen Condensator durch eine Metallbrücke leitend verbunden sind, so wirkt diese Brücke so, als ob die Capacität des Condensators C' unendlich gross geworden wäre. Für $g = \infty$ wird dann (18) zu

$$(20) \qquad \frac{2\pi h}{\lambda} = \frac{8\pi c^2 C \log \frac{d}{R}}{\lambda} = \operatorname{cotg} \frac{2\pi a}{\lambda} + \operatorname{cotg} \frac{2\pi a'}{\lambda}.$$

$c^2 C$ ist die elektrostatisch gemessene Capacität des Condensators C; die Gleichung (20) ist von Morton[1]) auf anderem Wege abgeleitet. Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass ein Condensator bei vorgeschriebener $a + a'$ am meisten Einfluss auf λ hat, wenn $a = a'$ ist, d. h. wenn er in der Mitte zwischen beiden Brücken angelegt ist.

An einer Brücke selbst, d. h. für $a = 0$ oder $a' = 0$, hat das Anlegen eines Condensators natürlich keinen Einfluss auf λ.

2. Verification der Formel für die Wellenlänge.

Der auf p. 125, Fig. 1, beschriebene Apparat entspricht nicht genau der der Formel (20) zu Grunde liegenden Annahme: ein Condensator zwischen zwei Brücken. Diese Formel wird aber auch für die Anordnung der Fig. 1 anzuwenden sein, wenn wir nur die Constante a aus den Versuchen selbst bestimmen, während a' die Entfernung des Condensators C von der Brücke B_1 bedeutet (Fig. 1). Es soll wenigstens geprüft werden, inwieweit diese Ueberlegung richtig ist.

Zuerst wurde a' geändert, C blieb dabei constant. Ohne C war $\frac{1}{2}\lambda = 45{,}3$ cm, daher ist $a + a' = 45{,}3$ zu setzen. Da der wahre Knoten annähernd eine halbe Brückenlänge hinter der Brücke liegt, so muss a' gleich der gemessenen Entfernung zwischen dem Condensator und der Brücke, vermehrt um die halbe Brückenlänge, genommen werden. In Tab. XIV hat a' diese Bedeutung, und es ist $a = 45{,}3 - a'$. $\frac{1}{2}\lambda$ wurde vermittelst Gleichung (20) berechnet, indem der Werth für die

1) W. B. Morton, Phil. Mag. 43. p. 383. 1897. Er hat die Verhältnisse nur verfolgt für den Fall, dass der Widerstand zwischen den Condensatorplatten unendlich ist.

Capacität C aus den Versuchen selbst entnommen wurde. Da C constant blieb, so war zu schreiben:

$$\lambda \left[\operatorname{cotg} \frac{2\pi a}{\lambda} + \operatorname{cotg} \frac{2\pi a'}{\lambda} \right] = K.$$

K wurde für jeden Werth von a' berechnet und der Mittelwerth, 172,2, wurde zur Berechnung von $^1/_2\,\lambda$ benutzt. Alle Grössen sind in Centimetern ausgedrückt.

Tabelle XIV.

a'	a	$^1/_2\,\lambda$	$^1/_2\,\lambda$ ber.
3,45	41,85	47,6	47,6
10,05	35,25	60,1	60,0
10,45	34,85	61,1	60,6
11,45	33,85	62,6	62,1
12,05	33,25	63,0	62,9
14,05	31,25	65,1	65,4
16,05	29,25	66,7	67,3
18,05	27,25	68,0	68,6

Die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werthen von $^1/_2\,\lambda$ ist sehr befriedigend.

Dann wurde a' constant, und zwar gleich 21,85 cm, gehalten und die Capacität des Condensators geändert. Als Condensator wurde ein Kolben (vgl. Fig. 2) benutzt. Als Füllflüssigkeiten dienten Gemische von Benzol und Aceton, ferner von Aceton und Wasser.[1]) Ohne Capacität war $^1/_2\,\lambda = 45{,}67$ cm und deshalb $a = 45{,}67 - 21{,}85 = 23{,}82$ cm.

Nun ist $c^2 C$ gleich $k_0 + \varepsilon k$, wo ε die Dielektricitätsconstante der Füllflüssigkeit ist und k_0 und k zwei Constanten sind, welche nur von den Dimensionen des Kolbens abhängen. Deshalb ist, nach (20)

$$\frac{\lambda}{2} \left[\operatorname{cotg} \frac{2\pi a}{\lambda} + \operatorname{cotg} \frac{2\pi a'}{\lambda} \right] = 4\pi (k_0 + \varepsilon k) \log \frac{d}{R} = \delta_0 + \varepsilon \delta,$$

wo

$$\delta_0 = 4\pi \log \frac{d}{R} \cdot k_0 \quad \text{und} \quad \delta = 4\pi \log \frac{d}{R} \cdot k.$$

δ_0 und δ kann man aus zwei beobachteten λ bei zwei verschiedenen ε berechnen. Es ergiebt sich $\delta = 4{,}08$. Der

1) Ueber Dielektricitätsconstanten und Temperaturcoefficienten solcher Gemische vgl. P. Drude, Zeitschr. f. phys. Chem. 23. p. 288. 1897.

Unterschied zwischen den einzelnen Bestimmungen und diesem Mittelwerth ist ca. 1 Proc. Der Mittelwerth für δ_0 ist 7,27; auf seine Genauigkeit kommt es nicht so sehr an. Vermittelst dieser Werthe von δ und δ_0 wurde $^1/_2\,\lambda$ berechnet. In der Tab. XV beziehen sich die Nummern in der ersten Columne auf die benutzten Aichflüssigkeiten.

Tabelle XV.

Subst.	ε	$^1/_2\,\lambda$	$^1/_2\,\lambda$ ber.	Subst.	ε	$^1/_2\,\lambda$	$^1/_2\,\lambda$ ber.
1	2,27	50,97	50,9	7	17,56	68,41	68,5
2	2,98	52,11	51,8	8	20,97	72,29	71,9
3	3,57	52,81	52,6	9	23,88	74,90	74,7
4	6,98	56,34	56,7	10	26,59	77,26	77,3
5	8,53	58,03	58,5	11	31,77	82,02	81,9
6	10,35	60,47	60,6				

Die Uebereinstimmung ist hier wieder eine recht gute. Andererseits konnte man aus den beobachteten Werthen für $^1/_2\,\lambda$ die entsprechenden Werthe von ε berechnen, aber es ist viel genauer, wenn man die zu untersuchende Substanz mit Substanzen von bekanntem ε direct vergleicht, wie oben geschehen ist.

3. Die Dämpfung der Schwingungen.

Falls die Drähte bei $z = 0$ durch eine Metallbrücke leitend verbunden sind, ist C' und deshalb g gleich ∞. Dann wird (18) zu

$$h\frac{a}{\lambda} + \varphi + \chi = 0. \tag{21}$$

Wenn auf erste Ordnung in γ entwickelt wird, ergiebt sich aus den Gleichungen (16) und (17) (hier ist $i = \sqrt{-1}$ gesetzt)

$$\varphi = -\,i\operatorname{cotg}\frac{2\pi a'}{\lambda}\left(1 - i\frac{2\gamma\frac{a'}{\lambda}}{\sin\frac{4\pi a'}{\lambda}}\right),$$

$$\chi = -\,i\operatorname{cotg}\frac{2\pi a}{\lambda}\left(1 - i\frac{2\gamma\frac{a}{\lambda}}{\sin\frac{4\pi a}{\lambda}}\right).$$

Nun ergiebt sich aus Gleichung (11), wenn man die Leitfähigkeit der Füllsubstanz des Condensators C als so klein an-

nimmt, dass man in dem bei h auftretenden Terme $T/\alpha w$ für α den Näherungswerth $\alpha = 2\pi i$ benutzen kann

$$\frac{\alpha}{\lambda} h = 4 c^2 C \log \frac{d}{R} \left(1 - i \frac{\lambda}{2\pi c w C}\right) \cdot \frac{2\pi i}{\lambda} \left(1 + i \frac{\gamma}{2\pi}\right)$$
$$= \frac{8\pi i}{\lambda} c^2 C \log \frac{d}{R} \left(1 + i \frac{\gamma}{2\pi} - i \frac{\lambda}{2\pi c w C}\right).$$

Daher ist nach (21)

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{8\pi}{\lambda} c^2 C \log \frac{d}{R} \left(1 + i \frac{\gamma}{2\pi} - i \frac{\lambda}{2\pi c w C}\right) \\ \qquad = \operatorname{cotg} \frac{2\pi a'}{\lambda} \cdot \left(1 - i \frac{2\gamma \frac{a'}{\lambda}}{\sin \frac{4\pi a'}{\lambda}}\right) \\ \qquad + \operatorname{cotg} \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \left(1 - i \frac{2\gamma \frac{a}{\lambda}}{\sin \frac{4\pi a}{\lambda}}\right). \end{cases}$$

Daraus ergiebt sich durch Trennung der Reellen und Imaginaren

$$(23) \qquad \frac{8\pi}{\lambda} c^2 C \log \frac{d}{R} = \operatorname{cotg} \frac{2\pi a'}{\lambda} + \operatorname{cotg} \frac{2\pi a}{\lambda}$$

und

$$(24) \qquad \gamma \left[1 + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a \frac{\sin 2\pi a'/\lambda}{\sin 2\pi a/\lambda} + a' \frac{\sin 2\pi a/\lambda}{\sin 2\pi a'/\lambda}}{\sin 2\pi \frac{a + a'}{\lambda}}\right] = \frac{T}{w C}.$$

Nun ist[1])

$$C w = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma c^2}$$

(falls man k_0 in der Gleichung $C = k_0 + k\varepsilon$ vernachlässigt, was annähernd gestattet ist, da k_0 stets klein gegen $k\varepsilon$ war), *daher ergiebt sich zur Berechnung der zeitlichen Dämpfung aus der Leitfähigkeit im Condensator*

$$(25) \qquad \gamma \left[1 + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a \frac{\sin 2\pi a'/\lambda}{\sin 2\pi a/\lambda} + a' \frac{\sin 2\pi a/\lambda}{\sin 2\pi a'/\lambda}}{\sin 2\pi \frac{a + a'}{\lambda}}\right] = 4\pi\lambda \frac{c\sigma}{\varepsilon}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hängt nicht von der absoluten Grösse der Capacität C des Condensators ab, ihr

1) P. Drude, Wied. Ann. 61. p. 483. 1897. Formel (24).

Einfluss ist aber in der linken Seite der Gleichung enthalten, da nach (23) eine Relation zwischen a, a' und C besteht.

Will man den Zusammenhang zwischen der zeitlichen Dämpfung γ und dem Absorptionsindex $\varkappa$ der Condensatorflüssigkeit feststellen, so ist zu berücksichtigen, dass bei kleinem $\varkappa$[1]) die Beziehung besteht

$$\varkappa = \frac{\sigma c \lambda}{\varepsilon}.$$

Es ist daher

$$(26) \qquad \gamma \left[1 + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a \dfrac{\sin 2\pi a'/\lambda}{\sin 2\pi a/\lambda} + a' \dfrac{\sin 2\pi a/\lambda}{\sin 2\pi a'/\lambda}}{\sin 2\pi \dfrac{a+a'}{\lambda}} \right] = 4\pi\varkappa.$$

Diese Beziehung gilt auch, wenn die elektrische Absorption der Condensatorflüssigkeit nicht durch Leitfähigkeit herbeigeführt ist, sondern falls sie anormale elektrische Absorption ist.

Wenn schon ohne angehängten Condensator eine zeitliche Dämpfung der elektrischen Wellen vorhanden ist, so wird durch den Condensator dieselbe vergrössert, falls im Condensator elektrische Energie absorbirt wird. *Falls alle in Betracht kommenden Dämpfungen nicht sehr gross sind, so wird der Zuwachs γ der durch den Condensator herbeigeführten zeitlichen Dämpfung immer noch durch die Formeln (25) bez. (26) zu berechnen sein.*

Die zeitliche Dämpfung γ, welche mit dem Benzolcondensator im System vorhanden ist, wurde bei der Blondlot'schen Wellenerregung auf dem von Drude beschriebenen Wege[2]) etwa zu 0,15 bestimmt. Auf die absolute Grösse dieser Zahl kommt es übrigens nicht genau an, da es sich im Folgenden nur um *Aenderungen* von γ handelt.

Wenn nun die Stärke der Wellenerregung in der Weise regulirt wurde, dass eine bestimmte Knotenzahl k mit dem Benzolcondensator zu beobachten war, während mit dem Messcondensator eine kleinere Zahl k' zu beobachten war, so habe

---

1) P. Drude, l. c. p. 495.

2) P. Drude, Abhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **23**. p. 95. 1896. Ich habe dabei Rücksicht genommen auf die verschiedene Länge der Brücken B_1 und B_2.

ich zunächst mit dem Werthe $\gamma = 0{,}15$ die Stärke des k-ten Knotens auf dem von P. Drude (l. c.) angegebenen Wege berechnet und dann γ in der Weise abgeändert zu γ', dass die Stärke des k'-ten Knotens gleich war dem vorhin berechneten Werthe des k-ten Knotens. Es ist dabei die Intensität der Wellen an der Erregungsstelle (nicht an der ersten Brücke) als constant angenommen. Die so zu berechnende Differenz $\gamma' - \gamma$ ist die Dämpfungszunahme $d\gamma$, für welche die Formeln (25) und (26) gelten.

4. Die anormale Absorption des Wassers.

Wenn mit dem Benzolcondensator die Knotenzahl $k = 18$ zu beobachten war, so betrug diese Knotenzahl mit dem Wassercondensator $k' = 13$ (vgl. oben p. 139). Daraus berechnet sich, falls $\gamma = 0{,}150$ gesetzt wird, $\gamma' = 0{,}191$, d. h. $d\gamma = 0{,}041$. Nun war $\lambda = 147$ cm, $a = 18{,}2$ cm, und a' (aus der beobachteten Wellenlänge ohne Condensator berechnet) $= 19{,}7$ cm. Daher wird der Factor von γ in den Formeln (25) und (26) gleich 2,62. Die elektrische Absorption der Wellen rührt zum Theil von der Leitfähigkeit (σ betrug $0{,}93 \,.\, 10^{-14}$), zum Theil von anormaler Absorption. Nennen wir letzteren Absorptionsindex $\varkappa$, so ist nach (25) bez. (26)

$$d\gamma \left[1 + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a \dfrac{\sin 2\pi a'/\lambda}{\sin 2\pi a/\lambda} + a' \dfrac{\sin 2\pi a/\lambda}{\sin 2\pi a'/\lambda}}{\sin 2\pi \dfrac{a+a'}{\lambda}} \right] = 4\pi \left(\varkappa + \frac{c\,\sigma\,\lambda}{\varepsilon} \right),$$

oder

$$0{,}041 \,.\, 2{,}62 = 4\pi\varkappa + \frac{4\pi}{81} \,.\, 3 \,.\, 10^{10} \,.\, 0{,}93 \,.\, 10^{-14} \,.\, 147,$$

d. h.

$$\varkappa = 0{,}0082.$$

Es ist interessant, zu untersuchen, *für welche Schwingungsperiode eine maximale Absorption bei Wasser zu erwarten ist.* Im Falle dass nur auf eine absorbirende Molekülgattung im Wasser Rücksicht zu nehmen ist, hätte man die folgenden beiden Gleichungen[1]):

1) P. Drude, Wied. Ann. **64**. p. 131. 1898.

(27) $$\varepsilon = n^2(1 - \varkappa^2) = \varepsilon_\infty - \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{1 + \left(\frac{T}{a'}\right)^2};$$

(28) $$2\,n^2\varkappa = \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{1 + \left(\frac{T}{a'}\right)^2} \cdot \frac{T}{a'},$$

worin bedeuten: n der Brechungsexponent, ε_∞ die Dielektricitätsconstante für grosse T, ε_0 das Quadrat des optischen Brechungsindex, ε die Dielektricitätsconstante bei der Periode T, und a' eine Constante, die von der Dämpfung der Molecül-Eigenschwingungen abhängt; $\varkappa$ ist ein Maximum bei der Periode

(29) $$T = a' \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}}.$$

Aus (27) und (28) folgt, falls $\varkappa^2$ gegen 1 vernachlässigt wird

(30) $$a' = \frac{2\,T\varepsilon_\infty\,\varkappa}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0} = \frac{2\,\lambda\,\varepsilon_\infty\,\varkappa}{c(\varepsilon_\infty - \varepsilon_0)}.$$

Aus (30) berechnet sich nun mit Hülfe von $\varepsilon_0 = 1{,}8$, $\varepsilon_\infty = 81$, $\varkappa = 0{,}0082$ und $\lambda = 147$ cm der Werth von a' zu $a' = 0{,}82 \,.\, 10^{-10}$. Hieraus ergiebt sich nach (29) die maximale Absorption bei $T = 12{,}1 \,.\, 10^{-12}$, d. h. $\lambda = 3{,}6$ mm. Dort würde $\varkappa = 0{,}74$ sein.

Für $T = 3{,}33 \,.\, 10^{-10}$ ($\lambda = 10$ cm) ergiebt sich aus (27) und (30) $\varepsilon = 76{,}5$, $\varkappa = 0{,}12$. In der That hat Drude[1]) bei Wellen dieser Periode eine sehr merkbare Absorption gefunden.

Für $T = 0{,}67 \,.\, 10^{-10}$ ($\lambda = 2$ cm) würde sich aus (27) und (28) ergeben[2]): $\varepsilon = 33{,}5$, $\varkappa = 0{,}46$, also ein sehr grosser Werth von $\varkappa$ schon bei einer Periode, welche vermittels eines Righi'schen Erregers leicht zu realisiren ist.

5. Die Absorption von Salzlösungen.

Um zu zeigen, dass die gegebene Theorie sich der Erfahrung gut anschliesst, habe ich für wässerige Kupfersulfatlösungen verschiedener Leitfähigkeit die Anzahl k der be-

1) P. Drude, Wied. Ann. 65. p. 499. 1898.

2) Dabei ist $\varkappa$ streng berechnet, d. h. ohne Vernachlässigung von $\varkappa^2$ gegen 1.

obachtbaren Knoten auf dem oben genannten Wege berechnet und beobachtet. Die Dämpfungszunahme gegenüber der Dämpfung beim reinen Wasser ergiebt sich nach Formel (25), allerdings nur für mässige Leitfähigkeiten, d. h. falls γ noch klein bleibt.

Tabelle XVI.

Substanz		σ (absolute) bei 17°	w' bei 17°	γ ber.	k beob.	k ber.
Benzol		0,0	∞	0,150	18	[18]
Wasser		$0{,}93 \cdot 10^{-14}$	$229{,}0 \cdot 10^{12}$	0,191	13	[13]
$CuSO_4$-Lösungen	1	$16{,}6 \cdot 10^{-14}$	$12{,}77 \cdot 10^{12}$	0,232	9	9
	2	$34{,}9 \cdot 10^{-14}$	$6{,}09 \cdot 10^{12}$	0,280	6	6
	3	$58{,}8 \cdot 10^{-14}$	$3{,}62 \cdot 10^{12}$	0,341	4	4
	4	$296{,}0 \cdot 10^{-14}$	$0{,}72 \cdot 10^{12}$	0,954	0	0

Um zu illustriren, in welcher Weise die Tabelle berechnet wurde, soll ein Beispiel herausgegriffen werden. Es wurde die Dämpfung der Schwingungen ohne absorbirenden Condensator zu $\gamma = 0{,}15$ angenommen (vgl. oben p. 160). Dann berechnet sich auf dem oben (p. 160) genannten Wege die Stärke des 18. Knotens zu 1,841, falls die ausgesandte Amplitude des Erregers gleich 1 gesetzt wird, während der 19. Knoten sich zu 1,830 ergiebt. Für die Stärke 1,841 sprach also die Zehnder'sche Röhre noch an, für die Stärke 1,830 nicht mehr, da 18 Knoten bei $w' = \infty$ (Benzol) zu beobachten waren. Für $CuSO_4$-Lösung Nr. 3 berechnet sich nach (25) die Dämpfungszunahme gegenüber reinem Wasser zu 0,152; da letzteres aber schon die Dämpfungszunahme 0,039 gegenüber Benzol zeigte (vgl. oben p. 161), so ist für Lösung Nr. 3 $\gamma = 0{,}341$ zu setzen. Die Stärke des 4. Knotens berechnet sich damit zu 1,977, während die Stärke des 5. Knotens zu 1,820 folgt. Da nun 1,841 und 1,830 die Grenzen für das Ansprechen der Vacuumröhre sind, so musste der 4. Knoten noch beobachtbar sein, der 5. dagegen nicht mehr.

Die Tab. XVI zeigt eine sehr gute Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung. Auf die Lösung Nr. 4 ist übrigens nicht viel Gewicht zu legen, da ihre Leitfähigkeit

schon zu gross ist, als dass die Formel (25) noch gültig sein konnte.

6. Die anormale Absorption der Ester.

Die anormale Absorption einiger Ester ist oben, p. 142, aus dem Vergleiche mit $CuSO_4$-Lösungen bestimmt worden. Allein aus der Abnahme der beobachtbaren Knotenzahl ohne Zuhülfenahme von Vergleichssubstanzen kann man aber auch die Dämpfungszunahme ermitteln und dann aus ihr mit Hülfe der Formel (26) den Index $\varkappa$ der anormalen elektrischen Absorption. Es ergab sich z. B. für Propylformiat $k = 13$ und für Benzol $k = 18$. Hieraus berechnet sich (vgl. oben p. 160) die Zunahme $d\gamma$ der zeitlichen Dämpfung zu 0,041. Es betrug $\lambda = 147$ cm, $a = 18,2$ cm, a' (berechnet aus der beobachteten Wellenlänge ohne Condensator nach der Formel [20]) $= 19,7$ cm. Dann wird der Factor von $d\gamma$ in Formel (26) gleich 2,62. Daraus berechnet sich $\varkappa$ zu 0,008, während durch Vergleich mit wässrigen Lösungen (vgl. oben p. 142) sich $\varkappa = 0,008$ ergeben hatte. Die Uebereinstimmung ist zufälligerweise vollkommen. Mehr Beispiele kann ich leider nicht geben, da ich bei den anderen Estern nur auf die Vergleichsmethode mit leitenden Lösungen hingearbeitet hatte und die Differenz der beobachtbaren Knotenzahl gegen Benzol nicht bestimmt habe. Die Beobachtungen nach dieser Methode sind natürlich schneller zu erledigen als beim Vergleiche mit den wässerigen Lösungen. Aber die Methode des directen Vergleiches mit leitenden wässerigen Lösungen ist genauer, weil man bei dieser Methode nicht nur auf gleiche *Anzahl* der beobachtbaren Knoten achtet, sondern, falls man möglichst genau arbeiten will, auch auf gleiche *Stärke* des zuletzt beobachtbaren Knotens. Es ist allerdings durch Benutzung der abgeleiteten theoretischen Resultate nicht nothwendig, dass die Capacitäten des mit der Lösung und des mit der zu messenden Substanz gefüllten Condensators gleich sind, es genügt schon, wenn nur die Stärke des letzten beobachtbaren Knotens in beiden Fällen gleich ist. Das letztgenannte Verfahren bietet experimentelle Einfachheit, führt dafür aber rechnerische Unbequemlichkeiten mit sich.

Schluss.

Die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit sind folgende:

1. Vermittelst der im ersten Theile beschriebenen Anordnung ist die Dielektricitätsconstante von nicht zu stark absorbirenden Substanzen mit einem wahrscheinlichen Fehler von 0,1 Proc. relativ zu messen. Falls der Fehler 0,23 Proc. sein darf, genügt es schon, wenn man für die zu untersuchende Substanz und zwei Aichflüssigkeiten eine Bestimmung von einer einzigen Knotenlage macht.

2. Die im zweiten Theile beschriebene Anordnung ist für absorbirende Substanzen nicht zu empfehlen, wohl aber für nichtabsorbirende, besonders dann, falls die letzteren mit Schwingungen sehr verschiedener Wellenlänge untersucht werden sollen. Die erreichbare Genauigkeit ist ungefähr dieselbe, wie bei der ersten Methode.

3. Die Dielektricitätsconstanten von einigen verflüssigten Gasen sind bei Zimmertemperatur bestimmt worden.

4. Der Temperaturcoefficient der Dielektricitätsconstante des Wassers ergab sich zu $-$ 0,432 Proc. pro Grad, bei 17,0°. Diese Zahl stimmt mit den von Heerwagen und Drude gefundenen Werthen gut überein.

5. Wasser zeigt anormale Absorption. Bei $\lambda = 147$ cm ist der Absorptionsindex $\varkappa = 0{,}0082$. Daraus lässt sich die Wellenlänge, für welche $\varkappa$ einen maximalen Werth annehmen würde, zu $\lambda = 3{,}6$ mm annähernd taxiren.

6. Die Indices der anormalen elektrischen Absorption von einigen Fettsäure- und Benzoësäureestern sind bestimmt worden.

7. Die Dielektricitätsconstante der Alkohole in verdünnter Lösung nehmen mit der Verdünnung ab und nähern sich einem Grenzwerthe. Für die untersuchten Alkohole stimmen die ermittelten Grenzwerthe mit den von Philip vermittelst langsamer Schwingungen gefundenen Werthen gut überein; die Grenzwerthe sind also frei von elektrischer Dispersion im Gegensatze zu den concentrirten alkoholischen Lösungen.

8. Die für den Blondlot'schen Erreger gegebene Theorie schliesst sich sowohl hinsichtlich der Wellenlängen als der

zeitlichen Dämpfungsconstanten der Erfahrung gut an. Daher kann man aus der Anzahl der beobachtbaren Knoten den elektrischen Absorptionsindex berechnen.

9. Bei beiden der oben erwähnten Methoden zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante wird die zu untersuchende Substanz dielektrisch stärker beansprucht als nach den Drude'schen Methoden, wo die Substanz sich hinter der ersten Brücke befindet. Ob diese stärkere Beanspruchung für die in Frage kommende Substanz nachtheilig ist, lässt sich durch Controlirung mit anderen Methoden entscheiden.

Die vorliegenden Untersuchungen sind auf Anregung des Hrn. Prof. Dr. Drude im Physikalischen Institute der Universität Leipzig angestellt worden, und der Verfasser kann es nicht unterlassen, zum Schluss sowohl Hrn. Prof. Dr. Drude für die Anregung zu dieser Arbeit und für die vielfachen fördernden Rathschläge während der Untersuchungen als auch dem kürzlich verstorbenen, ehemaligen Director des Physikalischen Instituts, Hrn. Geheimrath Prof. Dr. G. Wiedemann, für das Interesse, mit dem er den Fortgang der Arbeit verfolgte, seinen herzlichsten Dank abzustatten.

(Eingegangen 19. August 1899.)

10. *Zur Mechanik der Canal- und Kathodenstrahlen*[1]*; von Paul Ewers.*

(Hierzu Taf. I, Fig. 1—9.)

Eine grosse Reihe wichtiger Untersuchungen hat in neuerer Zeit die Ansicht bestätigt, dass sowohl die Canalstrahlen wie die Kathodenstrahlen aus fortgeschleuderten materiellen Theilchen bestehen. Die Bedingungen für das Auftreten von Canalstrahlen, sowie die Haupteigenschaften derselben, sind schon von Hrn. Goldstein[2]) untersucht worden. Dass die Canalstrahlen, obwohl sie von der Kathode auszugehen scheinen, positive Ladung mit sich führen, ist von Hrn. W. Wien[3]) festgestellt worden; derselbe berechnet auf Grund der elektrischen und magnetischen Ablenkbarkeit derselben für das Verhältniss der Ladung eines geschleuderten Theilchens zur Masse desselben bei einer Eisenkathode den Werth: 312,5 [$cm^{1/2} g^{1/2} / g$] im E. M. S., sowie für die Geschwindigkeit, mit der die Theilchen den Gasraum durchfliegen, den Werth: $3,6 . 10^7$ [$cm\, sec^{-1}$].

Analog liegen die Verhältnisse bei den Kathodenstrahlen. Dass dieselben negative Ladung mit sich führen, ist schon seit längerer Zeit bekannt und neuerdings von J. J. Thomson[4]) genauer festgestellt. Als Verhältniss der Ladung eines geschleuderten Theilchens zur Masse desselben hat Hr. J. J. Thomson etwa $5 . 10^6$ [$cm^{1/2} g^{1/2} / g$] pro Gramm gefunden, und zwar unabhängig vom Kathodenmaterial und von der Gasfüllung. Dieselbe Grösse wurde neuerdings von Hrn. Kaufmann[5]) zu $1,86 . 10^7$ bestimmt. Für die Geschwindigkeit giebt Hr. Thomson $1,5 . 10^9$ [$cm\, sec^{-1}$], Hr. W. Wien[3]) ein Drittel Lichtgeschwindigkeit an. Etwas abweichende Werthe erhielt Hr. P. Lenard[6]), der für das Verhältniss der Ladung eines

---

1) Auszug aus der Münchener Inaugural-Dissertation des Verfassers.

2) E. Goldstein, Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. p. 691 ff. 1886; Wied. Ann. **64.** p. 38. 1898.

3) W. Wien, Wied. Ann. **65.** p. 445 ff. 1898.

4) J. J. Thomson, Phil. Mag. **44.** p. 293. 1897.

5) W. Kaufmann, Wied. Ann. **65.** p. 431 ff. 1898.

6) P. Lenard, Wied. Ann. **64.** p. 279 ff. 1898.

Theilchens zu seiner Masse den Werth $6{,}4 \cdot 10^6$ angiebt, und für die Geschwindigkeit 0,67 bis $0{,}81 \cdot 10^{10}$ [cm sec^{-1}].

Während nun bei den Canalstrahlen die erhaltenen Werthe mit der Annahme geschleuderter Atome ganz gut in Einklang zu bringen sind, stösst man bei den Kathodenstrahlen auf Schwierigkeiten. Es müsste nämlich hier entweder die Masse eine etwa 2000 mal kleinere sein, als die eines H-Atoms, oder es müsste an einem gewöhnlichen Atom eine etwa 2000 mal so grosse Elektricitätsmenge haften, als man sie bisher bei dem Vorgange der Elektrolyse als an einem Atom sitzend bestimmt hatte.

Abweichend von diesen Resultaten findet Hr. P. Villard[1]), dass man die Kathodenstrahlenerscheinungen als durch Wasserstoff bedingt ansehen müsse. Da in elektrodenlosen Röhren Kathodenstrahlen mit denselben Eigenschaften zu Stande kommen wie in Röhren mit Elektroden, so ist man jedenfalls berechtigt, die Kathodenstrahlen als nicht aus dem Kathodenmateriale bestehende Theilchen anzunehmen.

Wie man sieht, waren zur Klärung der Frage, was es eigentlich für Theilchen sind, welche in den Canal- und Kathodenstrahlen bewegt werden, weitere Versuchs- und Messungsreihen anzustellen. Vor allem war die Schwierigkeit zu heben, welche der Ansicht, dass die genannten Strahlungen auf fortgeschleuderten materiellen Theilchen beruhen, von jeher entgegenstand; denn wenn diese Entladungen mit dem Transport von Massen, wenn auch noch so kleinen, verbunden sind, so müssen sich doch dort, wo sie auftreffen, die geschleuderten Partikelchen ansammeln und als solche nachweisbar werden.

Zur Beantwortung dieser und verwandter Fragen sollen die nachfolgenden Messungsreihen Beiträge liefern.

Bisher hat man die Geschwindigkeit der in den Canal- und Kathodenstrahlen geschleuderten Theilchen hauptsächlich durch Ablenkungsbeobachtungen ermittelt. Bei der grossen Wichtigkeit gerade dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit beider Strahlengebilde war es wichtig, nach anderen Methoden zu suchen, welche dieselbe physikalische Grösse zu ermitteln gestatten. Es lässt sich leicht übersehen, dass man bei Zu-

1) P. Villard, Compt. rend. **126.** p. 1564—1566. 1898.

grundelegung der aus der Elektrolyse folgenden Werthe für das Verhältniss der Ladung eines materiellen Theilchens zu seiner Masse: ε/m, aus der Combination einer Messung der Elektricitätsmenge mit einer Energiemessung, d. h. einer calorimetrischen Messung, diese Werthe erhalten kann. Ich bin für Canalstrahlen auf diesem Wege zu fast denselben Werthen wie Hr. W. Wien gekommen, während ich bei den Kathodenstrahlen meine Rechnungen bezüglich der Geschwindigkeit unter der Annahme irgend welcher, vorläufig noch unbestimmter fortgeschleuderter Theilchen durchgeführt habe.

Nach bekannten Gesetzen der Elektrolyse ist 1 g-Aequivalent jedes Stoffes mit einer bestimmten Elektricitätsmenge, nämlich mit 96540 Coulomb, verbunden, d. h. 108 g Ag oder 1 g H würden im Ionenzustande diese Elektricitätsmenge übertragen. Bezeichnet $\varepsilon\,[\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}]$ die Ladung, die an der Masse $m\,[\mathrm{g}]$ haftet, so ist für $H : \varepsilon/m = 9{,}654 \,.\, 10^3\,[\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}/\mathrm{g}]$ pro Gramm. Für N-werthige Atome vom Atomgewichte A ist:

(1) $$\frac{\varepsilon}{m} = \frac{N}{A} \,.\, 9{,}654 \,.\, 10^3\ [\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2} : \mathrm{g}]\ \text{pro g}$$

Diese Betrachtung soll nun auf die Vorgänge in Entladungsgefässen übertragen werden, und zwar wird hier der Factor der Geschwindigkeit, mit der die Atome begabt sind, eine viel grössere Rolle spielen, als im Gebiete der Elektrolyse, wo die Geschwindigkeiten der Ionen sehr klein sind. Nimmt man an, dass die Canal- und die Kathodenstrahlen aus fortgeschleuderten Partikelchen, etwa Atomen, die geladen sind, bestehen, und die sich geradlinig fortbewegen, ist n die pro sec fortgeschleuderte Anzahl derselben und trägt jedes die Elektricitätsmenge ε mit sich fort, so ist die pro sec fortgeführte Elektricitätsmenge:

(2) $$q = n \,.\, \varepsilon\ [\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}],$$

woraus sich ergiebt

(3) $$n = \frac{q}{\varepsilon}\,[o].$$

Bewegen sich diese n Massentheilchen von der Masse m mit der Geschwindigkeit v geradlinig fort, so enthalten sie die

kinetische Energie: $n . m . {}^1/_2 v^2$. Würden diese Theilchen nun auf ein Hinderniss stossen, und würde der Stoss vollkommen unelastisch stattfinden, so würde diese kinetische Energie voll-kommen in Wärme verwandelt werden; ihr Betrag sei a ab-solute mechanische Einheiten (1 cal. = $4{,}189 . 10^7$ [$\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}\,\mathrm{sec}^{-2}$]). Wir hätten dann die Formel

$$a = n \cdot \frac{m}{2} v^2 [\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}\,\mathrm{sec}^{-2}]. \tag{4a}$$

Es ist aber jedenfalls ganz unzweifelhaft, dass beim Auftreffen dieser Theilchen auf einen festen Widerstand nur ein Theil dieser Energie in Wärme verwandelt wird, da in Folge elastischen Stosses viele Theilchen in den Gasraum zurückfliegen werden. Wir wollen diesen Umstand in der Formel (4a) dadurch ausdrücken, dass wir auf der linken Seite einen Factor α^2 hinzufügen, wo α durch die folgenden Versuche noch geeignet zu bestimmen sein wird. Dann nimmt unsere zuletzt hingeschriebene Formel die Gestalt an:

$$\alpha^2 \cdot a = n \cdot \frac{m}{2} v^2. \tag{4b}$$

Aus der Vereinigung der Gleichungen (3) und (4b) folgt:

$$\frac{q}{\varepsilon} \cdot \frac{m}{2} v^2 = \alpha^2 \cdot a = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{m}{\varepsilon} . v^2. \tag{5}$$

Hr. W. Wien hat für Canalstrahlen bei einer Kathode aus Eisen für die geschleuderten Theilchen, die er annimmt, als Werth für ε/m pro g 312,5 [$\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{1/2} : \mathrm{g}$] erhalten. Fasst man die fortgeschleuderten Theilchen als Eisenionen auf, so müsste sich unter Zugrundelegung von zweiwerthigen Eisenatomen ergeben haben:

$$\frac{\varepsilon}{m} = \frac{2}{55{,}9} \cdot 9{,}654 \cdot 10^3 = 345 \left[\frac{\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{g}}\right] \mathrm{pro\,g}.$$

Es findet sich hier eine Abweichung von 9,4 Proc., die aus dem Grunde wohl für unwesentlich gehalten werden darf, weil bei den Versuchen W. Wien's nur eine Gesammtablenkung von 6 mm beobachtet wurde, sodass eine Abweichung von 9,4 Proc. einem Ablesefehler von nur etwa $^1/_2$ mm entsprochen haben würde, und da ja auch die Canalstrahlen ebenso wie die Kathodenstrahlen aus verschieden ablenkbaren

Strahlen bestehen, somit eine scharfe Grenze zum Ablesen der Ablenkung von vornherein nicht erwartet werden darf.

Der Wien'sche Werth ist also vollständig mit der Annahme vereinbar, die wir hinfort machen wollen, dass die Canalstrahlen aus fortgeschleudertem Kathodenmaterial bestehen.

Apparate.

Als *Elektricitätsquelle* diente eine 40 plattige, sich selbst erregende Töpler'sche Influenzmaschine mit 20 beweglichen und 20 feststehenden Scheiben aus dem mechanischen Institute von Oskar Leuner in Dresden, und zwar eine Maschine der neueren Construction dieses Institutes. Die beweglichen Scheiben der Maschine machten bei den folgenden Versuchen pro Secunde 8 Umdrehungen, und die entwickelte Elektricitätsmenge betrug $3{,}1 . 10^{-4}$ Coulomb pro Secunde. *Bei keinem der Versuche wurden Leydener Flaschen angewendet, und es wurden irgend welche Funkenstrecken mit grösster Sorgfalt vermieden.* Die Zahl der Entladungen, die die Maschine in einer Secunde durch ein Entladungsrohr schickt, wurde mit Hülfe eines kleinen Geisslerröhrchens mittels Drehspiegels gemessen und zu etwa 60 000 pro Secunde bestimmt, wenn das Geisslerröhrchen und ein Canalstrahlenrohr vor die Elektricitätsquelle in Serie geschaltet waren. Wie gross die Entladungszahl war, wenn das Geisslerröhrchen fortgelassen wurde, konnte nicht bestimmt werden, da die Dimensionen des Entladungsrohres senkrecht zur Rohraxe für Beobachtungen mit dem Drehspiegel zu gross waren, und in Folge dessen die Helligkeit zu schwach war, um, wenn ein Schirm mit schmalem Spalt vor dem Rohre angebracht war, die räumlich nebeneinander geschichteten Spaltbilder als voneinander getrennte Linien deutlich erkennen und ihre Abstände messen zu können.

Zum Evacuiren der Entladungsgefässe wurde eine *Geisslerpumpe* mit zweifach durchbohrtem Hahn mit vorgelegter Wasserstrahlpumpe verwendet.

Der im Entladungsrohre herrschende Druck wurde aus der Zahl der Evacuationen und der Kenntniss des Verhältnisses des Volumens der Luftpumpenkugel zum Volumen der übrigen mit dem Entladungsrohre communicirenden Theile der Pumpe berechnet.

Die *Entladungsgefässe* wurden entsprechend den Zwecken, denen sie dienen sollten, in drei Formen verwendet.

Fig. 1 giebt ein Canalstrahlenrohr in der Form wieder, wie es bei einigen Wärmemessungen angewendet wurde. Die Anode befindet sich hier in einer seitlich angeblasenen Kugel des Theiles *A* und besteht aus Aluminium. Ihr Durchmesser beträgt 14 mm. Die untere Verengung des Theiles *B* hatte den Zweck, dass bei der Wärmemessung ein möglichst kleines

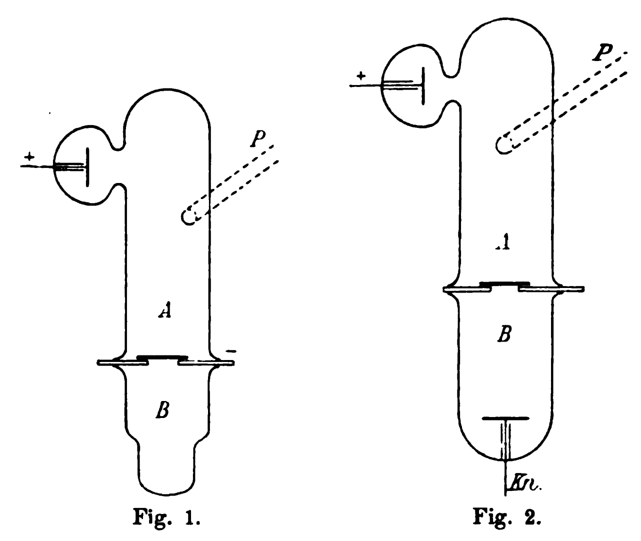


Fig. 1. Fig. 2.

Calorimeter verwendet werden konnte. Beide Theile, *A* und *B*, wurden mit Siegellack auf der jeweiligen Kathode festgekittet, die rings den umgelegten und abgeschliffenen Rand der Glasröhre um einige Millimeter überragte. Das Rohr *P* führte zur Luftpumpe. Die lichte Weite des Rohres *A*, sowie des oberen Theiles von *B* betrug 3 cm, die des unteren Theiles 2,2 cm. Eine durch die Mitte der Anode senkrecht zu dieser gelegt gedachte Axe schnitt die Axe des Rohres *A* in einem Abstande von 11 cm von der Kathode und hatte selbst eine Länge von 3,7 cm. Der Boden des Rohres *B* war 4,5 cm von der Kathode entfernt.

Eine zweite Form der Canalstrahlenröhren, wie sie besonders zum Messen von Elektricitätsmengen, aber auch für Energiemessungen benutzt wurde, ist in Fig. 2 veranschau-

licht. Der Theil *A* war derselbe, wie in Fig. 1. In den Boden des Rohres *B* war eine Auffangelektrode (*Kn*) von 11 mm Durchmesser eingeschmolzen, die, wenn das Rohr ebenfalls mit Siegellack verkittet war, von der Kathode 4 cm entfernt war.

Zur gleichzeitigen Untersuchung der Kathoden- und Canalstrahlen wurde das Entladungsgefäss, Fig. 3, verwendet. In einer seitlich angeblasenen Kugel des Rohres *A* befindet sich die Anode (+), eine Aluminiumelektrode mit einem Durchmesser von 26 mm. Der Abstand einer auf der Anode errichteten Normalen von der Rohraxe von *A* beträgt 5 cm, der senkrechte Abstand der Anodenmitte von der Ebene der Kathode beträgt 3 cm. Bei *D* befindet sich ein Diaphragma aus Aluminiumblech mit einer Oeffnung in seiner Mitte von 9 mm Durchmesser, zu dem durch einen seitlich eingeschmolzenen Platindraht eine metallische Leitung von aussen hergestellt war. Dieses Diaphragma war 4,7 cm von der Kathode entfernt angebracht. Die Elektrode (*Kth*) hatte einen Durchmesser von 26 mm und ihr Abstand von der Kathode betrug 13 cm. Den Theil *B* des Entladungsgefässes bildete ein analoger Rohrtheil, wie er schon bei Fig. 3 beschrieben ist.

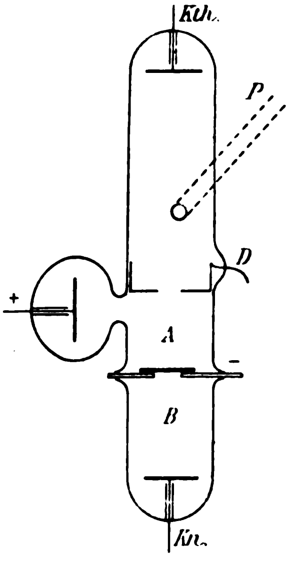
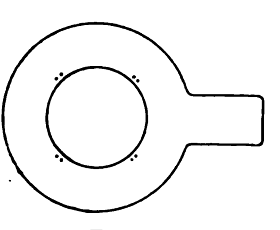


Fig. 3.

Die benutzten *Kathoden*, von der Form, wie in Fig. 4 wiedergegeben, bestanden aus einem 2 mm dicken Aluminiumbleche, in welchem in der Mitte eine Oeffnung von 18 mm Durchmesser ausgedreht war. Nahe am Rande dieser Oeffnung waren einige Löcher gebohrt, um mittels derselben die jeweils in Gestalt feiner Drahtnetze benutzten Kathodenmateriale durch dünne Drähte befestigen zu können. Die Netze überragten den Rand der Aluminiumkathode rings um etwa 2 mm, sodass


Fig. 4.

der Raum A (Fig. 1—3) nur durch die engen Maschen des Metallgewebes mit dem Raume B communicirte.

Es wurden die folgenden *Drahtgewebe* mit quadratischer Structur verwendet:

1. Ein Drahtgewebe aus Aluminium. Die Drähte desselben hatten einen Durchmesser von 0,25 mm und die Drahtaxen einen Abstand von 1 mm voneinander.

2. Ein Drahtgewebe aus Eisen. Die Drähte desselben hatten einen Durchmesser von 0,17 mm und die Drahtaxen einen Abstand von 0,83 mm voneinander.

3. Ein Drahtgewebe aus Platin. Die Drähte desselben hatten einen Durchmesser von 0,14 mm und die Drahtaxen einen Abstand von 0,67 mm voneinander.

Die *calorimetrischen Messungen* wurden mit zwei cylinderförmigen Calorimetern aus dünnem Messingblech ausgeführt. Als Calorimeterflüssigkeit diente immer Terpentinöl. Das benutzte Thermometer war in $^1/_5$ Grade getheilt, sodass noch $^1/_{50}$ Grade ziemlich genau geschätzt werden konnten. Die Calorimeter hatten einen Wasserwerth von 7,208, bez. 18,147.

Zum Messen der an die Auffangelektrode (Fig. 2) zugestrahlten Elektricitätsmenge wurde ein Wiedemann'sches *Galvanometer* verwendet, für welches eine mit Schellack vorzüglich isolirte Drahtrolle angefertigt wurde. Die Aichung ergab, dass ein Ausschlag von einem Scalentheile (= 2 mm) auf einer etwa 2 m vom Galvanometer entfernten Scala einem Strome von $1,7 . 10^{-6}$ Ampères entsprach, oder einer pro Secunde abgeflossenen Elektricitätsmenge von $1,7 . 10^{-6}$ Coulomb.

Die Potentialdifferenzen zwischen Anode und Kathode wurden mittels eines Ebert-Hoffmann'schen[1]) *Plattenvoltmeters* bestimmt. Seine Aichung wurde mit Hülfe des Bichat-Blondlot'schen[2]) absoluten Cylinderelektrometers ausgeführt. Es zeigte sich, dass die Wurzelwerthe, die den Spannungen proportional sind, sehr nahe auf einer geraden Linie liegen.

Die Entladungen wurden in drei verschiedenen *Gasen*

1) H. Ebert u. M. W. Hoffmann, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **18.** p. 1. 1898.

2) Bichat-Blondlot, Compt. rend. **102.** p. 753—756. 1886.

untersucht, und zwar wurden Wasserstoff, Stickstoff und Kohlensäure verwendet.

Bei den Rechnungen wurde eine Reihe von Zahlenwerthen benutzt, die im Folgenden zusammengestellt sind.

Eine Hg-Säule von 1 mm Höhe übt bei 20° einen Druck von 1329 Dynen pro cm² aus.

Die molecularen Weglängen[1]) λ_{760} und λ_1 bei dem Druck 760 mm und 1 mm Hg, und der Querschnitt sämmtlicher Molecüle im cm³ q bei 760 mm Hg sind:

	λ_{760}	λ_1	q
H_2	$1855 \cdot 10^{-8}$	$1{,}41 \cdot 10^{-2}$	9500
N_2	$986 \cdot 10^{-8}$	$7{,}5 \cdot 10^{-3}$	17900
CO_2	$680 \cdot 10^{-8}$	$5{,}16 \cdot 10^{-3}$	26000

Das Gewicht eines Atoms Wasserstoff[2]) ist $8{,}3 \cdot 10^{-25}$ g. Das Gewicht eines Atoms eines Elementes vom Atomgewicht A beträgt: $A \cdot 8{,}3 \cdot 10^{-25}$ g.

An einem einwerthigen Atom sitzt eine Elektricitätsmenge: $8{,}0 \cdot 10^{-21}$ [$\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}$]. An einem n-werthigen Atom sitzt daher die Elektricitätsmenge: $n \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-21}$ [$\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}$].

I. Versuche mit Canalstrahlen.

a) Messungen von Elektricitätsmengen.

Wurde die Kathode der Entladungsröhre (Fig. 3) zur Erde abgeleitet, so trat nichtsdestoweniger in dem die Anode nicht enthaltenden Theil *B* der Röhre Elektricität positiven Zeichens von dem Momente an über, wo das Auftreten von Canalstrahlen bemerkbar wurde. Beim Gang der Maschine wurde bei *Kn* ein continuirlicher Zufluss von positiver Elektricität constatirt, welcher einen am Galvanometer leicht zu messenden und in Coulomb pro Secunde auszurechnenden Strom lieferte. Dieses bestätigt zunächst die von Hrn. W. Wien zuerst gemachte Entdeckung, dass in der That in den Canalstrahlen Partikelchen, die mit freier positiver Ladung begabt sind, transportirt werden.

1) Sämmtliche Zahlenwerthe, die sich auf das Gebiet der molecularen Physik beziehen, wurden den physikalisch-chemischen Tabellen von Landolt-Börnstein entnommen und im besonderen die Angaben von O. E. Meyer den Berechnungen zu Grunde gelegt.

2) Vgl. W. Nernst, Theoretische Chemie 2. Auflage. p. 394. 1898.

Es zeigte sich nun aber weiter die sehr bemerkenswerthe Thatsache, dass sowohl der Moment des Auftretens dieser Erscheinung, als auch der gesammte Verlauf von der Natur der Gasfüllung abhängt. Um dieses näher zu erläutern erlaube ich mir, für eine Reihe von Fällen die entsprechenden Messungsresultate in extenso mitzutheilen.

Wie Hr. Goldstein schon beobachtet hat, gehen die Canalstrahlen anfänglich von der ganzen durchbrochenen Kathodenfläche aus; mit abnehmendem Drucke entfernen sie sich dagegen beständig vom Rande der Kathode (Fig. 5), und das Canalstrahlenbündel zieht sich immer mehr nach der Axe des Rohres zusammen.

I. Versuche mit der Aluminiumkathode in H_2.

In den folgenden Tabellen bedeutet *D* den in mm Hg gemessenen Druck und *C* die pro Secunde abgeflossene Elektricitätsmenge in Coulomb gemessen.

1		2		3		4	
D	*C*	*D*	*C*	*D*	*C*	*D*	*C*
0.39	0	0,39	0	0,392	0	0,39	0
0,249	$9{,}5\ .10^{-7}$	0,249	$9{,}5\ .10^{-7}$	0,250	$9{,}5\ .10^{-7}$	0,249	$1.3\ .10^{-6}$
0,131	$1{,}71\ .10^{-5}$	0,131	$1{,}71\ .10^{-5}$	0,132	$1{,}71\ .10^{-5}$	0,131	$1{,}71\ .10^{-5}$
—	—	0,044	$5{,}5\ .10^{-5}$	—	—	0,044	$5{,}5\ .10^{-5}$
—	—	0,0148	$7{,}6\ .10^{-5}$	—	—	0,0148	$7{,}3\ .10^{-5}$
—	—	0,00498	$9{,}1\ .10^{-5}$	—	—	0,00498	$9{,}1\ .10^{-5}$
—	—	0,00168	$9{,}5\ .10^{-5}$	—	—	0,00168	$9{,}5\ .10^{-5}$

Hieraus ergeben sich die folgenden zusammengehörigen Mittelwerthe:

D	0,39	0,249	0,131	0,044	0,0148	etc.
C	0	$1{,}04\ .10^{-6}$	$1{,}71\ .10^{-5}$	$5{,}5\ .10^{-5}$	$7{,}5\ .10^{-5}$	

Diese Werthe wurden graphisch in der Tafel I, Fig. 1 aufgetragen, indem auf der Abscissenaxe die einzelnen Evacuationen, denen die Drucke zugeschrieben sind durch äquidistante Strecken dargestellt wurden. Als Ordinaten wurden dann die zugehörigen, pro Secunde fortgeleiteten Coulomb eingetragen. Es lässt sich nun mit grosser Sicherheit eine wahrscheinliche Curve durch die Endpunkte der Ordinaten legen, mittels derer das Eintreten der Canalstrahlen

bei einem Drucke von 0,26 mm Hg extrapolirt werden konnte (wobei natürlich dem Umstande Rechnung getragen wurde, dass in der Figur äquidistante Abscissenpunkte einer Druckabnahme nach einer geometrischen Reihe entsprechen). Also ist bei der hier verwendeten Elektrode bei einer H_2-Füllung das Auftreten der Canalstrahlen bei einem Drucke von 0,26 mm Hg = 345 Dynen pro cm² zu suchen. Natürlich ist dieser Werth auf einen Abstand der Auffangelektrode *Kn* von der Kathode, der 4 cm beträgt, bezogen; es würden sich ohne Zweifel für einen anderen Abstand andere Werthe ergeben haben, da ja nach der Angabe des Hrn. Goldstein die Canalstrahlen sich erst mit wachsender Gasverdünnung stetig verlängern, also nicht schon bei ihrem ersten Eintreten bis an die Auffangelektrode *Kn* gelangt sein können.

Bei einem Drucke von 0,26 mm Hg ergiebt sich für H_2 die moleculare Weglänge 0,542 mm und der Querschnitt sämmtlicher Molecüle im cm³: 3,25 cm². Es haben also im vorliegenden Falle die Canalstrahlen auf ihrem 4 cm langen Wege pro cm² Erzeugungsfläche einen Gesammtquerschnitt der H_2-Molecüle von 13 cm² passiren müssen. In derselben Weise sind die entsprechenden Grössen bei den späteren Versuchen berechnet und in der Tabelle p. 178 zusammengestellt.

II. Versuche mit der Aluminiumkathode in N_2.

1		2		3	
D	*C*	*D*	*C*	*D*	*C*
0,39	0	0,39	0	0,39	0
0,131	$2,1 \cdot 10^{-6}$	0,131	$2,29 \cdot 10^{-6}$	0,131	$2,1 \cdot 10^{-6}$
0,044	$3,0 \cdot 10^{-5}$	0,044	$3,1 \cdot 10^{-5}$	0,044	$3,05 \cdot 10^{-5}$
0,0148	$7,6 \cdot 10^{-5}$	0,0148	$7,5 \cdot 10^{-5}$		
—	—	0,00497	$8,9 \cdot 10^{-5}$		
—	—	0,00168	$9,5 \cdot 10^{-5}$		

Aus dieser Tabelle ergeben sich die folgenden Mittelwerthe:

D	0,39	0,131	0,044	0,0148	0,00497	etc.
C	0	$2,16 \cdot 10^{-6}$	$3,05 \cdot 10^{-5}$	$7,55 \cdot 10^{-5}$	$8,9 \cdot 10^{-5}$	

Diese Werthe wurden in der Tafel I, Fig. 2 aufgetragen, aus der sich durch Extrapolation für das Eintreten der Canalstrahlen der Werth 0,140 mm Hg ergiebt.

III. Versuche mit der Aluminiumkathode in CO_2.

1		2		3	
D	*C*	*D*	*C*	*D*	
0,132	0	0,131	0	0,131	
0,0845	$4,7 \cdot 10^{-6}$	0,084	$3,8 \cdot 10^{-6}$	0,084	4,2
0,044	$2,09 \cdot 10^{-5}$	0,044	$1,9 \cdot 10^{-5}$	0,044	2,09
0,0149	$5,5 \cdot 10^{-5}$	0,0149	$5,7 \cdot 10^{-5}$	0,0148	6,1
0,005	$7,6 \cdot 10^{-5}$	0,00499	$8,3 \cdot 10^{-5}$	0,00497	8,7
0,00169	$9,1 \cdot 10^{-5}$	0,00169	$9,1 \cdot 10^{-5}$	0,00168	9,6
0,00057	$9,5 \cdot 10^{-5}$	0,00057	$9,5 \cdot 10^{-5}$	0,00057	9.8

Zieht man das Mittel aus diesen Beobachtungen, hält man die folgenden sich entsprechenden Werthe:

D	0,131	0,0842	0,044	0,0149	0,0049
C	0	$4,2 \cdot 10^{-6}$	$2,03 \cdot 10^{-5}$	$5,8 \cdot 10^{-5}$	8,2 . 10

Diese Werthe wurden auf der Tafel I, Fig. 3 gra aufgetragen.

Extrapolirt man den Werth, wo die entstandene die Abscissenaxe schneidet, so kommt man in diesem auf den Werth 0,095, d. h. bei einem Drucke von 0,0 Hg erreichen die Canalstrahlen gerade die Auffangele *Kn*, falls das Rohr mit CO_2 gefüllt ist.

Die auf diese Weise gewonnenen Resultate sind gender Tabelle zusammengestellt. In derselben bede den Druck, bei dem die Canalstrahlen einsetzen, in m *W* die moleculare Weglänge in mm beim Drucke *P*, den Querschnitt sämmtlicher Molecüle im cm³ in cm Drucke *P*.

Die Kathode bestand aus Aluminium.

Gasfüllung	H_2	N_2	CO_2
P	0,26	0,14	0,095
W	0,542	0,535	0,544
Q	3,25	3,30	3,25

Man ersieht sofort, dass das Eintreten der Canalstral der molecularen Weglänge des Gases, mit dem das Rohr

wurde, also auch vom Querschnitt sämmtlicher Molecüle im cm^3 abhängig ist, und zwar erkennt man, dass bei Gasen die Canalstrahlen auftreten bei um so höheren Drucken, je grösser die freie Weglänge ist, sodass also überhaupt Canalstrahlen von bestimmter Länge erst dann erzeugt werden, wenn die mittlere freie Weglänge der verschiedenen Gasfüllungen beim Evacuiren dieselbe geworden ist.

Als Mittelwerth für die moleculare Weglänge ergeben sich 0,540 mm und der Querschnitt sämmtlicher Molecüle im cm^3 ist im Mittel 3,27 cm^2.

Eine weitere Aufgabe bestand nun darin, zu untersuchen, ob das Kathodenmaterial einen Einfluss auf das Eintreten der Canalstrahlen ausübt. Zu diesem Zwecke verwendete ich die Kathode in der Form, dass auf dem Aluminiumträger statt des Aluminiumnetzes das p. 174 erwähnte Drahtnetz aus Eisen befestigt wurde. Ich hielt mich hierzu aus dem Grunde berechtigt, weil die Canalstrahlen ja nur von den Oeffnungen der Kathode ausgehen, also jedenfalls unbeeinflusst bleiben von den entfernt sich befindenden undurchbrochenen Kathodentheilen aus Aluminium (vgl. oben p. 173).

I. Versuche mit der Eisenkathode in H_2.

1		2		3	
D	*C*	*D*	*C*	*D*	*C*
0,393	0	0,393	0	0,393	0
0,251	$1{,}0 . 10^{-6}$	0,251	$1{,}1 . 10^{-6}$	0,251	$9{,}0 . 10^{-7}$
0,132	$9{,}0 . 10^{-6}$	0,132	$1{,}0 . 10^{-5}$	0,132	$1{,}0 . 10^{-5}$
0,0443	$5{,}3 . 10^{-5}$				
0,0149	$8{,}4 . 10^{-5}$				
0,00502	$9{,}5 . 10^{-5}$				

Fasst man diese drei Beobachtungsreihen wieder zu einer zusammen, so ergiebt sich:

D	0,393	0,251	0,132	0,0443	0,0149	0,00502
C	0	$1{,}0 . 10^{-6}$	$9{,}7 . 10^{-6}$	$5{,}3 . 10^{-5}$	$8{,}4 . 10^{-5}$	$9{,}5 . 10^{-5}$.

Die Tafel I, Fig. 4 stellt diese Werthe graphisch aufgetragen dar. Durch Extrapolation ergiebt sich als Druck, bei dem die Canalstrahlen einsetzen, wieder etwa der Werth 0,261 mm, also derselbe Druck, wie bei der Aluminiumkathode.

II. Versuche mit der Eisenkathode in N_2.

1		2		3	
D	*C*	*D*	*C*	*D*	*C*
0,396	0	0,396	0	0,396	0
0,133	$2,0 . 10^{-6}$	0,133	$2,0 . 10^{-6}$	0,133	$1,5 . 10^{-6}$
0,0447	$1,7 . 10^{-5}$	0,0447	$2,7 . 10^{-5}$	0,0447	$1,7 . 10^{-5}$
0,015'	$4,0 . 10^{-5}$	0,015	$6,6 . 10^{-5}$	0,015	$5,0 . 10^{-5}$
0,00503	$6,5 . 10^{-5}$	0,00503	$8,5 . 10^{-5}$	0,00503	$7,6 . 10^{-5}$
0,00169	$8,8 . 10^{-5}$	0,00169	$9,5 . 10^{-5}$	0,00169	$9,8 . 10^{-5}$

Hieraus ergeben sich die folgenden Mittelwerthe:

D	0,396	0,133	0,0447	0,015	0,00503	0,00169
C	0	$1,3 . 10^{-6}$	$2,0 . 10^{-5}$	$5,2 . 10^{-5}$	$7,5 . 10^{-5}$	$9,35 . 10^{-5}$,

die in der Tafel I, Fig. 5 aufgetragen wurden.

Durch Extrapolation ergiebt sich der Werth 0,140; es treten also in N_2 bei einer Eisenkathode die Canalstrahlen bei demselben Drucke ein, wie bei einer Aluminiumkathode.

III. Versuche mit der Eisenkathode in CO_2.

Es ergaben sich die folgenden zusammengehörigen Werthe:

D	0,132	0,0845	0,0443	0,0149	0,005	0,00169
C	0	$2,0 . 10^{-6}$	$1,0 . 10^{-5}$	$4,4 . 10^{-5}$	$8,0 . 10^{-5}$	$9,3 . 10^{-5}$,

die in der Tafel I, Fig. 6 aufgetragen sind.

Als Druck, bei dem die Canalstrahlen in diesem Falle eintreten, wurde 0,093 mm Hg extrapolirt, ein Werth, der mit dem bei einer Aluminiumkathode gefundenen Drucke in gutem Einklang steht.

Aus diesen Versuchen folgt also, dass das Auftreten und die Entwickelung von Canalstrahlen, was ihre Abhängigkeit vom Druck betrifft, nicht von dem Kathodenmateriale abhängt, sondern von den molecularen Eigenschaften der Gasfüllung bedingt ist. Das schliesst natürlich nicht aus, dass es Metallionen sind, die fortgeschleudert werden, im ersten Falle also Aluminium-, im zweiten Eisenionen; denn die gewonnenen Zahlen (0,095 mm Hg für CO_2, 0,14 mm Hg für N_2, 0,26 mm Hg für H_2) geben die Druckwerthe an, bei denen die schleudernden Kräfte bei den hier verwendeten Spannungsdifferenzen im Stande sind, die Ionen des Elektrodenmateriales von der Netzkathode bis zur

Auffangelektrode, d. h. um dieselbe Strecke von 4 cm, durch das Gas hindurchzuschleudern.

Da die Atomgewichte von Fe = 56 und Al = 27 nicht allzusehr voneinander verschieden sind, so war es von Wichtigkeit, noch ein Elektrodenmaterial mit wesentlich höherem Atomgewicht hinzuzuziehen. Ich benutzte dazu Pt = 194.

Ein Drahtnetz aus Platin von den p. 13 angegebenen Dimensionen wurde in gleicher Weise wie die Drahtnetze aus Aluminium und Eisen auf der Aluminiumkathode befestigt.

I. Versuche mit der Platinkathode in H_2.

D	0,396	0,254	0,133	0,0446	0,0150
C	0	$4 . 10^{-6}$	$7{,}4\ 10^{-5}$	$1{,}8 . 10^{-4}$	$2{,}0 . 10^{-4}$.

Extrapolirt man in der Taf. I, Fig. 7 den Punkt, in dem die Curve die Abscissenaxe schneidet, so kommt man auf den Werth 0,262, es treten also auch bei einer Platinkathode in H_2 die Canalstrahlen bei einem Drucke von 0,262 mm Hg auf.

II. Versuche mit der Platinkathode in N_2.

D	0,384	0,137	0,129	0,0432	0,0145
C	0	$4 . 10^{-6}$	$9{,}0 . 10^{-6}$	$1{,}08 . 10^{-4}$	$1{,}96 . 10^{-4}$.

Durch Extrapolation findet man aus den in der Taf. I, Fig. 8 aufgetragenen Werthen als Druck für das Eintreten der Canalstrahlen 0,142 mm Hg.

III. Versuche mit der Platinkathode in CO_2.

D	0,129	0,0779	0,0432	0,0145	0,00485
C	0	$1 . 10^{-5}$	$4{,}1 . 10^{-5}$	$1{,}3 . 10^{-4}$	$2{,}2 . 10^{-4}$.

Taf. I, Fig. 9 giebt diese Werthe graphisch wieder, und es extrapolirt sich für das Eintreten der Canalstrahlen der Druck von 0,095 mm Hg.

Stellen wir die gewonnenen Resultate noch einmal für die verschiedenen Metalle zusammen, so ergiebt sich die folgende Tabelle. In derselben bedeutet *K* das verwendete Kathodenmaterial, *G* die Gasfüllung und *p* den Druck in Dynen pro cm^2, bei dem die Canalstrahlen einsetzen.

K	Al			Fe			Pt		
G	H_2	N_2	CO_2	H_2	N_2	CO_2	H_2	N_2	CO_2
P	0,26	0,14	0,095	0,261	0,14	0,093	0,262	0,142	0,095

Mittelwerthe

G	H_2	N_2	CO_2
P	0,261	0,141	0,094
p	347	187	125
W	0,510	0,533	0,549
Q	3,26	3,23	3,22

Hieraus ergeben sich schliesslich die folgenden Mittelwerthe:

W	0,541	für das Eintreten der Canalstrahlen, unabhängig vom Kathodenmateriale für beliebige Gase.
Q	3,24	

Hieraus folgt:

Das Auftreffen der Canalstrahlen auf die Auffangelektrode Kn bei abnehmenden Drucken ist unabhängig von dem Materiale, aus dem die Kathode besteht. Bei den Dimensionen des verwendeten Rohres und einem Abstande der Auffangelektrode *Kn* von der Kathode von 4 cm erreichen die Canalstrahlen dieselbe bei einem Drucke von

0,261 mm Hg, 347 Dynen pro cm^2 für H_2; 0,141 mm Hg, 187 Dynen pro cm^2 für N_2;

0,094 mm Hg, 125 Dynen pro cm^2 für CO^2.

Es sind dann nämlich die molecularen Weglängen der betreffenden Gase einander gleich geworden und betragen im Mittel 0,541 mm.

Interessant war auch noch ein Gasgemisch zu prüfen; als solches wurde Luft verwendet. Dieselbe gab sehr genau dieselben Resultate wie N_2, was insofern zu erwarten war, als ja die bisherigen Beobachtungen zeigen, dass die Entwickelung der Canalstrahlen mit der molecularen Weglänge, bez. mit der Querschnittsumme der Gasmolekeln zusammenhängt. Diese Grösse ist ja in der That bei Luft fast die gleiche wie bei N_2.

Führt man noch mit Rücksicht auf die Beobachtungen den Querschnitt sämmtlicher Molekeln in 4 cm^3 ein, so mussten die Canalstrahlen, bevor sie zur Auffangelektrode *Kn* gelangen

:onnten, von 1 cm^2 Kathodenfläche ausgehend so viele Gasnolekeln passiren, dass dieselben, wenn man sie in eine Ebene ausbreiten könnte, eine Fläche von 12,96 cm^2 belecken würden.

b) Energiemessungen.

Wir gehen jetzt zu den Messungen der durch das Aufreffen der Canalstrahlen erzeugten Wärme[1]) über, welche uns a nach den Ausführungen auf p. 170 die Geschwindigkeit der ortgeschleuderten Theilchen berechnen lassen, wenn wir vorussetzen, dass es Ionen des Elektrodenmateriales mit ihren alenzladungen sind, welche fortgeschleudert werden. Gleicheitig wurden die Spannungen gemessen, weil ja die Abnkungsversuche der Herren Kaufmann, W. Wien u. a. geeigt haben, dass die Geschwindigkeit von dem Potentialgefälle ı der Kathode in erster Linie bestimmt ist.

Die Spannung wurde an der Anode des Canalstrahlenhres gemessen, und die Kathode war auch hier stets zur :de abgeleitet. Zunächst wurden mehrere Wärmemessungen it der Aluminiumkathode vorgenommen, und zwar wurde ımer die Energiemenge bestimmt, die während 5 Min. von n Canalstrahlen an den 4 cm von der Kathode entfernt sich findenden Boden des Glasrohres (Fig. 1) abgegeben, d. h. hier Wärme umgesetzt wurde.

In den folgenden Tabellen bedeutet *Sp* die Spannung an r Anode in Volt, *E* die dem Rohre pro Secunde zugeführte ıergie und *A* die pro Secunde an das Calorimeter abgegebene ärmemenge, die beiden letzteren Werthe in absolutem Maass n^2 g sec^{-2}] gemessen.

In der letzten Zeile ist sodann in Procenten der gemmten zugeführten Energie die durch die Kanalstrahlen überführte Energie angegeben.

Versuche mit der Aluminiumkathode.

	1	2	3	4	5
Sp	3580	3450	3330	4600	4100
$E.10^7$	1,11	1,07	1,04	1,43	1,27
$A.10^6$	1,205	1,19	1,175	1,6	1,44
P		0,0078		0,0024	
	10,9 %	11,1 %	11,3 %	11,2 %	11,3 %

1) Vgl. auch Arnold, Wied. Ann. **61.** p. 325 ff. 1897.

Es folgt somit, dass als Mittel aus diesen 5 Versuchen von der dem Rohre zugeführten Energie *mindestens* 11,15 % für die Ausbildung der Kanalstrahlen verwendet werden, die diese sodann beim Auftreffen auf die Glaswand als Wärme wieder abgehen.

Während der ersten drei Messungen, die in N_2 ausgeführt wurden, repräsentirten die Canalstrahlen einen Strom von der Stärke $8{,}7 \,.\, 10^{-5}$ Amp. (vgl. Taf. I, Fig. 2).

Für die beiden letzten Beobachtungen ergiebt sich aus Taf. I, Fig. 2 als zugehörige Stromstärke der Canalstrahlen $9{,}37 \,.\, 10^{-5}$ Amp.

Bemerkenswerth ist, dass, wiewohl nicht ausgepumpt wurde, doch durch den Gebrauch des Rohres einerseits die Spannung, andererseits aber auch sowohl die im Ganzen consumirte Wattzahl, als auch die durch die Canalstrahlen überführte Energie bei den aufeinander folgenden Versuchen immer um einen geringen Betrag abnahm.

Sieht man nun die Canalstrahlen als geschleuderte, positiv geladene Ionen des Aluminiums an, so kann man mit dem nunmehr zu Gebote stehenden Beobachtungsmateriale die Geschwindigkeit der Aluminiumatome berechnen.

Al besitzt das Atomgewicht = 27. Nimmt man das Aluminiumatom als dreiwerthig an, so bekommt man als Werth für ε / m: 1070 $[\mathrm{cm}^{1/2}\, \mathrm{g}^{1/2} / \mathrm{g}]$ pro Gramm. Nach Formel (5) ergiebt sich für v, d. i. die Geschwindigkeit der fortgeschleuderten Aluminiumatome:

$$(6) \qquad v = \alpha \,.\, \sqrt{\frac{2a}{q} \cdot \frac{\varepsilon}{m}}\,.$$

Es ergeben sich somit die folgenden fünf mittleren Geschwindigkeiten:

$v_1 = \alpha \,.\, 1{,}73 \,.\, 10^7$ $[\mathrm{cm\,sec}^{-1}]$ bei 3580 Volt Spannung,
$v_2 = \alpha \,.\, 1{,}72 \,.\, 10^7$ $[\mathrm{cm\,sec}^{-1}]$ bei 3450 Volt Spannung,
$v_3 = \alpha \,.\, 1{,}71 \,.\, 10^7$ $[\mathrm{cm\,sec}^{-1}]$ bei 3330 Volt Spannung,
$v_4 = \alpha \,.\, 1{,}91 \,.\, 10^7$ $[\mathrm{cm\,sec}^{-1}]$ bei 4600 Volt Spannung,
$v_5 = \alpha \,.\, 1{,}81 \,.\, 10^7$ $[\mathrm{cm\,sec}^{-1}]$ bei 4100 Volt Spannung.

Die Geschwindigkeit, mit der die Atome durch die Kathode hindurchgeschleudert werden, nimmt also mit der Spannung zu. Es würde sich etwa bei einer Spannung der Anode von

5000 Volt, die vom Drucke abhängig ist, im Mittel eine Geschwindigkeit der Aluminiumatome von $\alpha . 2 . 10^7$ [cm sec^{-1}] ergeben.

Bei den folgenden Versuchen mit der Eisen- und der Platinkathode wurde das Canalstrahlenrohr so benutzt, wie es bei den Messungen der Elektricitätsmengen gebraucht wurde; es wurde also das die Auffangelektrode *Kn* enthaltende Rohr (Fig. 2) angekittet gelassen und bei der Wärmemessung entsprechend berücksichtigt. Infolge dessen musste auch das p. 174 genannte zweite Calorimeter mit einem Wasserwerthe 18,147 verwendet werden.

In den folgenden Tabellen bedeutet *S* die direct am Rohre bei den betreffenden Spannungen gemessene Stromstärke der Canalstrahlen in Ampère.

Versuche mit der Eisenkathode.

	(1—4)	5
Sp	5200	5800
$E . 10^7$	1,61	1,82
$A . 10^6$	1,66	3,27
S	$8,0 . 10^{-5}$	$1,55 . 10^{-4}$
	10,3 %	18 %

Da das Atomgewicht des Eisens = 56 ist, so erhält man unter der Annahme zweiwerthiger Eisenionen für

$$\frac{e}{m} : 345 \left[\frac{\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{g}}\right].$$

Es ergeben sich somit für *v* nach Formel (6) die folgenden Werthe:

$v_1 = \alpha . 1,2 \;. 10^7$ [cm sec^{-1}] bei 5200 Volt Spannung.

$v_2 = \alpha . 1,21 . 10^7$ [cm sec^{-1}] bei 5880 Volt Spannung.

Der Grössenordnung nach stimmen diese Werthe genau mit den von Hrn. W. Wien gefundenen überein; Uebereinstimmung auch der Ziffern ist von vornherein überhaupt nicht zu erwarten, weil ja gewiss nur ein Theil der in den Canalstrahlen enthaltenen kinetischen Energie als Wärme auf der Auffangfläche und im Calorimeter wieder erhalten wird.

Wir finden, dass etwa nur $^1/_9$ der Energie bei unseren Rohrdimensionen und der Dicke des verwendeten Glases erhalten wird. Wir wollen diesen Reductionsfactor ($\alpha^2 = 9$) benutzen, um die aus unseren Messungen resultirenden Geschwindigkeiten auf ihre *wahren* Werthe zu reduciren.

Versuche mit der Platinkathode.

	1	2
Sp	5070	5350
$E \cdot 10^7$	1,57	1,66
$A \cdot 10^9$	1,91	1,98
S	$1{,}97 \cdot 10^{-4}$	
	12,2 %	11,9 %

Das Atomgewicht des Platins beträgt 194; nimmt man das Atom als vierwerthig an, so ergiebt sich als Werth für

$$\frac{\varepsilon}{m} : 199 \left[\frac{\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{g}}\right] \text{ pro g.}$$

Es folgen somit für v die folgenden Werthe:

$v_1 = \alpha \cdot 6{,}2 \cdot 10^6\,[\mathrm{cm\,sec}^{-1}]$ bei 5070 Volt Spannung.

$v_2 = \alpha \cdot 6{,}3 \cdot 10^6\,[\mathrm{cm\,sec}^{-1}]$ bei 5350 Volt Spannung.

Es haben sich somit für die drei Metalle Aluminium, Eisen und Platin die folgenden Geschwindigkeiten ergeben, falls ihre Ionen als Canalstrahlen bei sehr geringen Drucken die Kathode zu durchfliegen gezwungen werden:

	Al	Fe	Pt
Direct bestimmte Geschwindigkeit (Mittelwerth)	$\alpha \cdot 1{,}97 \cdot 10^7$	$\alpha \cdot 1{,}2 \cdot 10^7$	$\alpha \cdot 6{,}3 \cdot 10^6\,[\mathrm{cm\,sec}^{-1}]$
Wahre Geschwindigkeit	$5{,}9 \cdot 10^7$	$3{,}6 \cdot 10^7$	$1{,}9 \cdot 10^7\,[\mathrm{cm\,sec}^{-1}]$

Während bisher durch die von Hrn. W. Wien angestellten Versuche allein für Eisenelektroden die Geschwindigkeit der Canalstrahlen bekannt war, so ist hiermit auch die Geschwindigkeit für Aluminium und für Platin gefunden worden. Wie man sieht, liegen alle drei Werthe in derselben Grössenordnung. Die Zahlenwerthe verhalten sich etwa wie 3 : 2 : 1.

Im Folgenden soll die von den als Canalstrahlen pro cm^2 *wirksamer Kathodenfläche fortgeschleuderten Atomen ausgeübte*

Bewegungsgrösse mit der Bewegungsgrösse in Beziehung gebracht werden, welche die als Gasfüllung das Entladungsgefäss erfüllenden Molecüle auf 1 cm² Fläche ausüben. Da diese Grösse mit der bei einer einzigen Entladung fortgeschleuderten Anzahl von Atomen zusammen hängen wird, so habe ich, nur um ein Resultat in der Grössenordnung zu erhalten, als Entladungszahl pro Secunde den Werth 60000 (vgl. p. 171) beibehalten, der zwar in der Grössenordnung von dem wahren Werthe nicht sehr verschieden sein wird, aber ohne Zweifel zu klein angenommen ist.

Da es nur auf die Grössenordnung ankommt, so benutzen wir die Formel (4a), welche unseren directen Beobachtungen entspricht.

Aus der Formel (3) $n = q/\varepsilon$ erhält man die Anzahl der pro Entladung fortgeschleuderten Atome, aus $n.m$ die pro Entladung fortgeschleuderte Masse in Gramm.

Es ist

	n			$n.m$	
Al	Fe	Pt	Al	Fe	Pt
$6{,}5.10^{9}$	$1{,}62.10^{10}$	$1{,}03.10^{10}$	$1{,}46.10^{-13}$	$7{,}51.10^{-13}$	$1{,}66.10^{-12}$

Man sieht, dass die pro Entladung fortgeschleuderte Menge ausserordentlich gering ist. Haben wir auch in der Secunde 60000 Einzelentladungen, so werden in dieser Zeit doch nur z. B. $8{,}75.10^{-9}$ g Al geschleudert; von diesen $8{,}75.10^{-9}$ g fliegt aber der grösste Theil infolge elastischen Stosses wieder in den Gasraum zurück. *Will man angenähert die Zeit bestimmen, die man brauchte, um nur 1 mg des Metalles auf der der Kathode gegenüberliegenden Wand niedergeschlagen zu erhalten, so muss man den Factor $\alpha = 3$ berücksichtigen; man kommt dann auf eine Entladungszeit von etwa 288 Stunden bei ununterbrochener Versuchsdauer. Berücksichtigt man diese Zahlenergebnisse, so fällt, wie man sieht, der oben auf p. 6 angedeutete Einwand, der gegen die Canalstrahlen als ein Bombardement von Theilchen zu sprechen schien.*

Haben wir die geschleuderten Mengen, so können wir die Bewegungsgrössen berechnen, da uns die Geschwindigkeiten aus unseren Messungen ja direct bekannt sind.

Bei den Versuchen, aus denen die obigen Zahlenwerthe sich ergeben haben, gingen die Canalstrahlen von etwa 0,4 cm² Kathodenfläche aus, d. h. es ist hier als Kathodenfläche der Flächenraum gerechnet, der übrig bleibt, wenn man von der Erzeugungsfläche der Canalstrahlen den Flächenraum abzieht, den das Drahtgewebe, welches ja die Kathode bildet, für sich einnimmt, und von dem aus ja nach der Rückseite keine Canalstrahlen entsandt werden. Es wurde demnach von den Ionen der verschiedenen Metalle pro 1 cm² pro Entladung auf die darüber befindliche Gasmasse folgende Bewegungsgrösse ausgeübt, wenn wir noch $n.m = M$ setzen:

Für Al: $M.v = 1{,}46.10^{-13}.1{,}91.10^{7}.2{,}5 = 6{,}95.10^{-6}$ [cm g s^{-1}]

Für Fe: $M.v = 7{,}51.10^{-13}.1{,}2\ .\ 10^{7}.2{,}5 = 2{,}26.10^{-5}$ [cm g s^{-1}]

Für Pt: $M.v = 1{,}66.10^{-12}.6{,}3\ .\ 10^{6}.2{,}5 = 2{,}62.10^{-5}$ [cm g s^{-1}]

Würde man nicht von unserer Formel (4a) ausgegangen sein, sondern von der Formel (4b), welche den Factor α enthält, der sich aus dem Vergleich mit den Wien'schen Ergebnissen zu rund = 3 ergab, so würde an der Grössenordnung der Bewegungsgrösse nichts geändert, zumal ja die oben gefundenen Werthe für M schon in Folge der sicherlich viel grösseren Entladungszahl zu gross erhalten sind.

Da die Canalstrahlen, bevor sie zur Auffangelektrode *Kn* gelangen konnten, einen Weg von 4 cm zurücklegen mussten, sie also pro cm² Erzeugungsfläche einen Raum von 1 cm² Grundfläche und 4 cm Höhe, das sind 4 cm³, passirt haben mussten, so wollen wir mit der von ihnen pro Entladung ausgeübten Bewegungsgrösse, die gleichsam den Druck darstellt, den die geschleuderten Theilchen auf das sich ihnen widersetzende Gas ausüben, den sie gerade überwinden müssen, diejenige Bewegungsgrösse vergleichen, welche die in 4 cm³ des betreffenden Gases, in dem die Entladungen vor sich gehen, enthaltenen Molecüle in der Richtung senkrecht zur Kathode, in der die geschleuderten Theilchen geflogen kommen, ausüben. Ich zerlege zu dem Zwecke die Molecüle in drei Theile, die wegen der gleichmässigen Vertheilung der Gasmolecüle und wegen der Ausübung eines von der Richtung unabhängigen

Druckes einander gleich sein müssen, und fasse als einen Theil die senkrecht zur Kathode sich bewegenden Molecüle näher ins Auge.

Man bekommt für H_2:

1 cm³ bei 760 mm Hg und 0° enthält $5,4 . 10^{16}$ Molecüle.

Demnach haben wir bei dem Drucke, bei dem unsere Canalstrahlen in dem hier betrachteten Gase auftreten und an der Auffangelektrode *Kn* bemerkbar werden:

4 cm³ bei 0,261 mm Hg und 20° enthalten $6,92 . 10^{13}$ Mol.

1 Atom H wiegt $8,3 . 10^{-25}$ g, also wiegen $6,92 . 10^{13}$ Moleküle H_2 $1,15 . 10^{-10}$ g.

Die mittlere Geschwindigkeit der H_2-Molecüle beträgt $1,698 . 10^5$ [cm sec⁻¹], also ist $n . m . v = 1,95 . 10^{-5}$ [cm g sec⁻¹], somit die Bewegungsgrösse pro cm²:

$$\frac{1}{3} . n . m . v = 6,52 . 10^{-6} \text{ [cm g sec}^{-1}\text{]}.$$

Für CO_2 ergiebt sich:

4 cm³ bei 0,094 mm Hg und 20° enthalten $2,82 . 10^{13}$ Molecüle.

1 Molecül CO_2 wiegt $44 . 8,3 . 10^{-25}$ g $= 3,65 . 10^{-23}$ g. Es wiegen somit $2,82 . 10^{13}$ Molecüle CO_2 $1,03 . 10^{-9}$ g. Die mittlere Geschwindigkeit der CO_2-Molecüle beträgt $3,61 . 10^4$ [cm sec⁻¹], es ergiebt sich somit als Bewegungsgrösse pro cm²:

$$\frac{1}{3} n . m . v = 1,08 . 10^{-5} \text{ [cm g sec}^{-1}\text{]}.$$

Für N_2 ergiebt sich schliesslich:

4 cm³ bei 0,141 mm Hg und 20° enthalten $3,73 . 10^{13}$ Molecüle.

1 Molecül N_2 wiegt $28 . 8,3 . 10^{-25}$ g $= 2,32 . 10^{-23}$ g. Es wiegen also $3,73 . 10^{13}$ Molecüle $8,64 . 10^{-10}$ g. Die mittlere Geschwindigkeit der N_2-Molecüle beträgt $4,53 . 10^4$ [cm sec⁻¹], es ist also die Bewegungsgrösse pro cm²:

$$\frac{1}{3} n . m . v = 1,30 . 10^{-5} \text{ [cm g sec}^{-1}\text{]}.$$

Stellt man diese Werthe zusammen und vergleicht sie mit den Zahlen p. 188

$$\text{für } H_2: \frac{1}{3} M.v = 6{,}52 \,.\, 10^{-6} \,[\text{cm g sec}^{-1}].$$

$$\text{für } CO_2: \frac{1}{3} M.v = 1{,}08 \,.\, 10^{-5} \,[\text{cm g sec}^{-1}].$$

$$\text{für } N_2: \frac{1}{3} M.v = 1{,}30 \,.\, 10^{-1} \,[\text{cm g sec}^{-1}],$$

so kommt man zu folgendem Satze:

Die Bewegungsgrösse, welche die in 4 cm³ vorhandenen Molecüle, die als Gasfüllung das Entladungsrohr erfüllen, nach einer Richtung ausüben, muss von derselben Grössenordnung geworden sein, wie die schliesslich bei den Messungen sich ergebende Bewegungsgrösse des zerstäubten Kathodenmetalles. In dem Augenblicke nämlich, wo mit der Evacuation soweit fortgeschritten ist, dass die Bewegungsgrösse des fortgeschleuderten Metalles gleich oder grösser geworden ist als die Bewegungsgrösse der den Gasraum erfüllenden Molecüle, beginnen die Canalstrahlen eine bestimmte Entfernung zu erreichen. Natürlich kommt die in den Canalstrahlen aufgespeicherte Energie anfänglich nicht vollkommen zur Geltung, da viele Ionen von den Gasmolecülen zurückgehalten werden. Erst wenn die mittlere freie Weglänge sehr gross geworden ist, der moleculare Querschnitt also sehr gering, ist auch die Bewegungsgrösse des Gases verschwindend klein geworden gegen die Bewegungsgrösse der Ionen, sodass man dann keine nennenswerthe Beeinflussung der Ionen durch die Molecüle mehr anzunehmen braucht.

Noch eine weitere sehr interessante Erscheinung hatte ich bei meinen Versuchen zu beobachten Gelegenheit. Hr. H. Ebert[1]) hatte bei Wechselstromentladungen die Erscheinung untersucht, dass bei einem für jedes Gas bestimmten Drucke eine Umkehr in der Spannung und der Stromstärke derart stattfindet, dass die Stromstärke dort einen maximalen Werth hat, wo die Spannung ein Minimum hat, und zwar treten diese Umkehrerscheinungen für beliebige Gase dann ein, wenn die molecularen Weglängen derselben einen bestimmten Werth er-

1) H. Ebert, Sitzungsber. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. **28.** p. 497ff. 1898.

langt haben. Dieses ist in der oben citirten Arbeit ungefähr der Augenblick, wo die vorderen Ränder der Glimmlichtstrahlen sich in der Mitte des Entladungsrohres begegnen. Ich habe bei meinen Versuchen Entladungen nur in einer Richtung durch das Canalstrahlenrohr gesandt, musste also schon aus dem Grunde zu anderen Zahlenwerthen gelangen. Die Spannungsumkehr wird durch die folgenden Zahlen erläutert, bei welchen noch die durch Canalstrahlen in der Zeiteinheit an die Auffangelektrode übertragene Coulombzahl $= C$ gesetzt ist:

Kathode aus Fe in H_2.

P	3,49	1,17	0,393	0,251	0,132	0,0443
Sp	968	552	**496**	543	1020	3380
C	—	—	—	$1,0.10^{-6}$	$9,0.10^{-6}$	$5,3.10^{-5}$.

Kathode aus Fe in CO_2.

P	3,49	1,17	0,393	0,132	0,0845	0,0443
Sp	1150	750	**595**	665	865	1400
C	—	—	—	—	$2,0.10^{-6}$	$1,0.10^{-5}$.

Kathode aus Pt in CO_2.

P	3,41	1,14	0,384	0,129	0,0779	0,0432
Sp	1090	701	**552**	643	1050	1620
C	—	—	—	—	1.10^{-5}	$4,1.10^{-5}$.

Kathode aus Pt in N_2.

P	1,14	0,384	0,129	0,0432	0,0145
Sp	736	**585**	886	3300	5600
C	—	—	$9,0.10^{-6}$	$1,08.10^{-4}$	$1,96.10^{-4}$

Wie man sieht, fällt der Umkehrdruck nahezu auf den Druck, wo die ersten Spuren von positiv geladenen Ionen, die bei fortschreitender Druckerniedrigung dann die regelmässigen Canalstrahlen bilden, durch die Kathode hindurchfliegen.

In jedem der angeführten Fälle liegt das Minimumpotential, also der Umkehrdruck, etwa bei dem Drucke, bei dem die Canalstrahlen in messbarer Weise auf die Auffangselektrode Kn einzuwirken beginnen.

Da nun, wie Hr. H. Ebert[1]) gezeigt hat, der Umkehrdruck U eines Gases direct mit dem Radius der molecularen Wirkungssphäre ϱ und umgekehrt mit der Werthigkeitssumme s des Molecularcomplexes des Gases nach der Formel:

$$U = K \, . \, \varrho / s$$

1) H. Ebert, Wied. Ann. 67. p. 608 ff. 1899.

zusammenhängt, wo K eine bestimmt dimensionirte Constante vorstellt, so musste sich letztere direct berechnen lassen, da die übrigen Grössen bekannt sind. Es ist nach den Bestimmungen des Hrn. O. E. Meyer:

$$\varrho \text{ für } CO_2 = 0{,}13\ \mu\mu, \qquad \varrho \text{ für } N_2 = 0{,}17\ \mu\mu,$$
$$\varrho \text{ für } H_2 = 0{,}10\ \mu\mu.$$

Die Werthigkeitssumme ist für $CO_2 = 8$, für $N_2 = 6$, für $H_2 = 2$; es ergiebt sich somit für

$$CO_2: \varrho/s = 0{,}0162\ \mu\mu = 1{,}62 \,.\, 10^{-9} \text{ cm},$$
$$N_2: \varrho/s = 0{,}0284\ \mu\mu = 2{,}84 \,.\, 10^{-9} \text{ cm},$$
$$H_2: \varrho/s = 0{,}050\ \mu\mu = 5{,}00 \,.\, 10^{-9} \text{ cm}.$$

Diese Werthe verhalten sich nun in der That nahezu wie die Umkehrdrucke, denn es ist

Gas	Umkehrdruck in Dynen pro cm²	ϱ/s	Verhältniss der Umkehrdrucke
CO_2	125	$1{,}62 \,.\, 10^{-9}$ cm	1,8
N_2	187	$2{,}84 \,.\, 10^{-9}$ cm	2,7
H_2	347	$5{,}0 \,.\, 10^{-9}$ cm	5,0

Diese Werthe sind also mit Rücksicht auf die doch immerhin sehr hypothetische Grösse des Molecüldurchmessers als die gemachte Voraussetzung vollkommen bestätigend anzusehen. Man kann nun die Constante K sofort berechnen; es ergiebt sich sodann aus den Versuchen mit

$$H_2: 347 = K \,.\, 5 \,.\, 10^{-9}; \text{ also } K = 6{,}94 \,.\, 10^{10}\ [\text{cm}^{-2}\,\text{g}\,\text{sec}^{-2}];$$
$$N_2: 187 = K \,.\, 2{,}84 \,.\, 10^{-9}; \text{ also } K = 6{,}6 \,.\, 10^{10}\ [\text{cm}^{-2}\,\text{g}\,\text{sec}^{-2}];$$
$$CO_2: 125 = K \,.\, 1{,}62 \,.\, 10^{-9}; \text{ also } K = 7{,}7 \,.\, 10^{10}\ [\text{cm}^{-2}\,\text{g}\,\text{sec}^{-2}].$$

Dieses liefert im Mittel einen Werth von $7 \,.\, 10^{10} [\text{cm}^{-2}\,\text{g}\,\text{sec}^{-2}]$ für K.

Man ist nun umgekehrt im Stande, bei Gasen, deren Molecüldurchmesser man kennt und deren Werthigkeitssumme ja immer bekannt ist, unter Benutzung dieses Werthes für K den Umkehrdruck in absolutem Maasse anzugeben, oder umgekehrt, wenn man den Umkehrdruck bestimmt hat, kann man den Radius der molecularen Wirkungsphäre für ein Gas, dessen Werthigkeitsumme bekannt ist, sofort angeben.

Der Ursprung der Canalstrahlen ist, wie Versuche des Hrn. A. Wehnelt[1]) gezeigt haben, in einer endlichen Entfernung vor der Kathode anzunehmen, da sie einen Schatten auf dieselbe werfen. Wahrscheinlich entstehen sie im dunklen Kathodenraume, und zwar in der Nähe der Glimmlichtschicht, also in der Gegend, wo die blauen Kathodenstrahlen und die röthlich-gelben Canalstrahlen durch den Dunkelraum getrennt erscheinen. Dass die Canalstrahlen nicht aus fortgeschleuderten *Anoden*theilchen bestehen, dafür scheint mir der Umstand zu sprechen, dass bei verschiedenem Kathodenmateriale und derselben Anode doch verschiedene Elektricitätsmengen mittels der Canalstrahlen fortgeführt wurden, und dass auch die Energieabgabe eine verschiedene war. Ich habe auch die Wehnelt'sche Angabe geprüft, da die Canalstrahlen eine oxydirende Wirkung ausüben sollen, ob es vielleicht Sauerstofftheilchen wären, die die Canalstrahlen bilden. Diese Annahme würde zwar mit meinen Messungen verträglich sein, doch müssten noch weitere Versuche in dieser Richtung angestellt werden, *da die Vorderseite der Kathode an den Stellen, die in der rückläufigen Verlängerung der Canalstrahlen lagen, bei meinen Versuchen blank, also nicht oxydirt war.* Hiergegen wäre vor allem einzuwenden, dass der O bei der gewöhnlichen Elektrolyse elektronegativ ist. Da die Metalle bei der gewöhnlichen Elektrolyse elektropositiv sind, so wäre es wohl begreiflich, dass die positiv geladenen Canalstrahlen-Ionen aus Metalltheilchen bestehen, und deshalb möchte ich mich der Ansicht anschliessen, die Canalstrahlen als geschleuderte Metall-Ionen des Kathodenmateriales anzusehen und also für jedes Metall eine verschiedene Geschwindigkeit der Ionen anzunehmen.

II. Versuche mit Kathodenstrahlen.

Um unter ziemlich identischen Bedingungen die Canalstrahlen mit den Kathodenstrahlen vergleichen zu können, wurde auch noch die durch die Kathodenstrahlen übertragene Elektricitätsmenge sowie die durch dieselbe hervorgerufene Erwärmung[2]) an einem und demselben Rohre gemessen. Es

1) A. Wehnelt, Wied. Ann. 67. p. 421ff. 1899.

2) Vgl. auch E. Wiedemann u. H. Ebert, Sitzungsber. d. phys.-med. Societät in Erlangen. Heft 24. 1892; namentlich auch J. J. Thomson; vgl. E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 66. p. 314. 1898.

wurde wiederum das Elektrodenmaterial ausgewechselt u verschiedene Gasfüllungen benutzt.

Die folgenden Versuche wurden mit dem Entladun gefässe, Fig. 3, unter Anwendung derselben Kathoden, wie bei den Canalstrahlen benutzt waren, angestellt. Wurden Kathodenstrahlen beobachtet, so war die Anode (+), so das Diaphragma *D* zur Erde abgeleitet. Um die der El trode *Kth* zugestrahlte Elektricitätsmenge zu messen, war d selbe mit dem Galvanometer verbunden und dann zur E abgeleitet. Die Spannung wurde an der Kathode (—) messen. Die Elektrode *Kn* blieb isolirt. Wurden die Can strahlen beobachtet, so war die Kathode (—) zur Erde ab leitet. Die Spannung wurde, wie in Theil I, an der Anc gemessen. Die Auffangelektrode *Kth*, sowie das Diaphragma blieben isolirt.

A. Versuche mit der Aluminiumkathode.

a) Messung von Elektricitätsmengen.

I. In Luft.

In der folgenden Tabelle sind die bei den betreffend Drucken durch Kathoden- und Canalstrahlen fortgeführt Elektricitätsmengen, sowie die herrschenden Spannungen ei getragen:

	Kathodenstrahlen		Canalstrahlen	
P	*C*	*Sp*	*C*	*Sp*
0,06	$6,8 . 10^{-5}$	3 300	$6,2 . 10^{-5}$	2620
0,021	$1,07 . 10^{-4}$	6 280	$7,3 . 10^{-5}$	3300
0,0074	keine Entladungen mehr		$7,6 . 10^{-5}$	3500
0,0026	„ „	„	$8,2 . 10^{-5}$	3850
0,00091	„ „	„	$9,8 . 10^{-5}$	4860
0,00032	„ „	„	$1,03 . 10^{-4}$	6100

Das Maximum der mittels der Kathodenstrahlen fort führten negativen Elektricität hat, abgesehen vom Vorzeich denselben Werth, wie das Maximum bei den Canalstrahlen, nä lich etwa $1,05 . 10^{-4}$ Coul. pro Secunde, aber bei verschieden Drucken, nämlich bei 0,021 mm Hg für die Kathodenstrahl und bei 0,00032 mm Hg für die Canalstrahlen. Es wurd noch fünf Versuche derselben Art angestellt, die dasselbe Resul lieferten.

II. In CO_2.

P	Kathodenstrahlen C	Kathodenstrahlen Sp	Canalstrahlen C	Canalstrahlen Sp
0,00705	$7{,}95.10^{-5}$	3440	$6{,}7.10^{-5}$	2630
0,00248	$1{,}03.10^{-4}$	4860	$7{,}8.10^{-5}$	3440
0,00087	keine Entladungen mehr			

III. In O_2.

P	Kathodenstrahlen C	Kathodenstrahlen Sp
0,0207	$6{,}05.10^{-5}$	2950
0,00725	$1{,}08.10^{-4}$	4950
0,00254	keine Entladungen mehr.	

b) Energiemessungen.

Die folgende Tabelle enthält die Energieverhältnisse, die sich auf die drei Gasfüllungen Luft, CO_2, O_2 bei einer Aluminiumkathode beziehen.

	Luft	CO_2 1	CO_2 2	C_2 1	C_2 2
Sp	4320	4700	4940	4660	4600
$E.10^7$	1,34	1,46	1,53	1,45	1,43
$A.10^6$	1,69	2,33	2,46	2,41	2,41
	12,6 Proc.	15,9 Proc.		16,5 Proc.	

Die vorhergehenden Versuche zeigen zur Genüge, dass die übertragene Elektricitätsmenge von der Gasfüllung gänzlich unabhängig ist. Deshalb wurde bei den folgenden Kathodenmaterialien immer nur je ein Gas zum Vergleich herangezogen.

B. Versuche mit der Eisenkathode.

In Luft.

a) Messung von Elektricitätsmengen.

P	Kathodenstrahlen C	Kathodenstrahlen Sp	Canalstrahlen C	Canalstrahlen Sp
0,0204	$1{,}0\ .10^{-4}$	3440	—	—
0,00715	$1{,}25.10^{-4}$	5060	$9{,}9\ .10^{-5}$	3440
0,0025	keine Entladungen mehr		$1{,}17.10^{-4}$	4030
0,00088	„ „ „		$1{,}22.10^{-4}$	4440

b) Energiemessungen.

	1	2
Sp	5470	4940
$E \cdot 10^7$	1,7	1,53
$A \cdot 10^6$	2,99	2,81
	17,9 Proc.	

C. Versuche mit der Platinkathode.

In Luft.

a) Messung von Elektricitätsmengen.

α) für die Energiemessungen der Versuche I und II:

	Kathodenstrahlen		Canalstrahlen	
P	*C*	*Sp*	*C*	*Sp*
0,0049	$8{,}15 \cdot 10^{-5}$	5520	$1{,}38 \cdot 10^{-4}$	> 6500

β) für die Energiemessungen des Versuches III:

	Kathodenstrahlen	
P	*C*	*Sp*
0,0020	$1{,}78 \cdot 10^{-4}$	6300

b) Energiemessungen.

	1	2	3
Sp	5550	5180	5900
$E \cdot 10^7$	1,72	1,61	1,83
$A \cdot 10^6$	2,1	2,11	4,2
	12,6 Proc.		23 Proc.

Wie sich schon bei den Canalstrahlen gezeigt hatte, dass für ein bestimmtes Metall, das als Kathodenmaterial verwendet wird, die bei geringen Drucken sich ergebenden Werthe für die übertragene Elektricitätsmenge von dem Gase, das in dem Entladungsrohre enthalten ist, unabhängig sind, so ergiebt sich dasselbe auch bei den Kathodenstrahlen; dagegen ist, wie man augenscheinlich sieht, die Energiemenge eine verschiedene, was mit Rücksicht auf die Ausführungen auf p. 190 nicht verwunderlich sein kann, da für dieselbe ja ausser den Geschwindigkeiten auch die Momente maassgebend sind.

Unter der Annahme des von Hrn. Kaufmann bestimmten Werthes für $\varepsilon / m = 1{,}86 \cdot 10^7$ [cm $^{1/2}$ g $^{1/2}$/g] pro Gramm kann die

Geschwindigkeit der fortgeschleuderten materiellen Theilchen nach der Formel

$$v = \sqrt{\frac{2\,a}{q} \cdot \frac{\varepsilon}{m}}$$

berechnet werden. Setzt man die bei den Versuchen mit der Aluminiumkathode in Luft gewonnenen Werthe ein, so erhält man

$$v = \sqrt{\frac{2 \,.\, 1{,}69 \,.\, 10^6}{9{,}5 \,.\, 10^{-6}} \,.\, 1{,}86 \,.\, 10^7} = 2{,}57 \,.\, 10^9 \text{ [cm sec}^{-1}\text{]}.$$

Dieser Werth ist von derselben Grössenordnung, wie der on Hrn. W. Wien angegebene, er stimmt mit demselben twa $^1/_3$ Lichtgeschwindigkeit) bis auf den Factor von ungehr 4 überein.

Meine Versuche erlaubten mir weder ε, noch m, noch ren Verhältniss ε/m zu messen; ich musste mich daher mer auf die nach anderen Methoden gewonnenen Resultate ziehen. Nahm ich für ε/m die aus der Elektrolyse beinnten Werthe für eins der als Kathodenmateriale verwenten Elemente, so ergab sich eine Geschwindigkeit, die von r aus Ablenkungsbeobachtungen gewonnenen Geschwindigit um eine etwa 1000 mal kleinere Grössenordnung differirte. ter der Annahme geschleuderter H-Ionen differirte die össenordnung etwa um das Hundertfache.

Im letzten Falle ergab sich das merkwürdige Resultat, ss in der von Hrn. Kaufmann angegebenen Formel die erthe von εV_0 für das betreffende Kathodenmaterial mit n Werthen von $\alpha^2 (m/2) v^2$ für geschleuderte H-Ionen fast nau übereinstimmen. Ich will diese Uebereinstimmung nicht einen Beweis für die Richtigkeit, dass die Kathodenstrahlen s geschleuderten Wasserstoffionen bestehen, hinstellen, zumal n sich die Entstehung der Kathodenstrahlen dann durch e ziemlich complicirte Energieübertragung erklären müsste, bisher nicht bewiesen werden konnte, aber immerhin bleibt anderen Falle die Schwierigkeit bestehen, ob wir es bei n Kathodenstrahlen mit den hypothetischen Mikroionen zu n haben.

Resultate.

A. Für Canalstrahlen.

I. Bei gleichmässig fortschreitender Evacuation und constanter Elektricitätszufuhr ist der Augenblick des ersten nachweisbaren Auftretens der Canalstrahlen vom Kathodenmateriale (Al, Fe, Pt) unabhängig; er ist dagegen von dem Druck, den die Gasfüllung im Entladungsrohre ausübt, in der Weise abhängig, dass die molecularen Weglängen der verschiedenen Gase (H_2, N_2, CO_2) einen bestimmten gleichen Werth erhalten haben müssen, der für meine Röhren 0,541 mm beträgt, bei einem Abstand der Auffangelektrode von der Kathode von 4 cm; derselbe liegt bei H_2 bei 0,261 mm Hg = 347 Dynen pro cm², bei N_2 bei 0,141 mm Hg = 187 Dynen pro cm² und bei CO_2 bei 0,094 mm Hg = 125 Dynen pro cm². Bei denselben Drucken haben auch die Querschnitte sämmtlicher Molecüle im cm den gleichen Werth, nämlich 3,24 cm².

II. Dieses ist zugleich etwa der Augenblick, wo die Spannungsdifferenz zwischen der Anode und Kathode, die vorden beständig abnahm, wieder zu wachsen beginnt.

III. In dem Augenblicke, wo mit der Evacuation soweit fortgeschritten ist, dass die Bewegungsgrösse des geschleuderten Metalles gleich oder grösser geworden ist, als die Bewegungsgrösse der den Gasraum erfüllenden Molecüle, beginnen die Canalstrahlen eine bestimmte Entfernung zu erreichen.

IV. Die Canalstrahlen bestehen wahrscheinlich aus positiven Ionen des Kathodenmateriales.

V. Für die Geschwindigkeit v, mit der die fortgeschleuderten materiellen Theilchen den Gasraum durchfliegen, haben sich die Werthe ergeben:

Al v bei 4600 Volt Spannung $5{,}73 \cdot 10^7$ [cm sec^{-1}]

Fe v bei 5200 Volt Spannung $3{,}6 \cdot 10^7$ [cm sec^{-1}]

Pt v bei 5350 Volt Spannung $1{,}69 \cdot 10^7$ [cm sec^{-1}].

VI. Hingegen wird durch die Canalstrahlen der auffangenden Wand zu wenig Materie zugestrahlt, als dass dieselbe nachgewiesen werden könnte, da bei den hier gegebenen Bedingungen schon ein Absetzen von nur 1 mg Al etwa 288 Stunden ununterbrochener Versuchsdauer erfordern würde.

VII. Von der dem Entladungsrohre zugeführten Energie werden etwa 11 Proc. bis 18 Proc. von den Canalstrahlen als Wärme wieder abgegeben.

B. Für Kathodenstrahlen.

I. Die übertragene Elektricitätsmenge ist bei sehr geringen Drucken von der Gasfüllung des Rohres vollkommen unabhängig.

II. Von der dem Entladungsrohre zugeführten Energie wurden durch die Kathodenstrahlen etwa 16 Proc. als Wärme wieder abgegeben.

Zum Schlusse möchte ich mir noch erlauben, Hrn. Prof. Dr. H. Ebert für die vielseitigen Anregungen und freundlichen Unterstützungen meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

München, Physikal. Institut d. Techn. Hochschule.

(Eingegangen 3. Juni 1899.)

11. *Das Entwickelungsgesetz des Hittorf'schen Kathodendunkelraumes;* *von H. Ebert.*

Seit Hr. Hittorf im Jahre 1868 sich dem eingehenderen Studium der Kathodenerscheinungen zuwandte und entdeckte, dass die die negative Elektrode bekleidende, von der Säule des Anodenlichtes durch den Faraday'schen „Trennungsraum" gesonderte Lichthülle wiederum durch einen dunkleren Raum, den wir den „Hittorf'schen Kathodendunkelraum" nennen wollen, in zwei Lichthüllen von im allgemeinen verschiedener Farbe geschieden wird, sind zahlreiche *qualitative* Untersuchungen über die hierdurch nachgewiesenen *drei* Schichten an der Kathode angestellt worden. Man erfuhr durch dieselben, dass der Dunkelraum zwischen der dünnen, der Elektrode unmittelbar anliegenden, sogenannten ersten Schicht (Goldstein) und der anderen leuchtenden sogenannten dritten Schicht (der Dunkelraum selbst als zweite gezählt) an Dicke zunimmt mit abnehmendem Drucke, und dass er bei denselben Drucken in verschiedenen Gasen verschieden stark entwickelt ist.

Sehr wenige und nur gelegentliche Untersuchungen beschäftigen sich indessen mit der *quantitativen* Seite dieser Entwickelung und doch muss gerade in ihr der Weg erblickt werden, über die Natur dieses eigenartigen Gebildes näheren Aufschluss zu erhalten. Hr. Puluj [1]) suchte nach einer Beziehung der Dicke d des Dunkelraumes zu der mittleren, freien Weglänge λ des Gases, in dem die Entladung vor sich ging; er fand aber weder bei Wasserstoff noch bei Kohlensäure eine einfache Beziehung zu derselben. Zu gleichem Zwecke hatte Hr. Crookes [2]) einige Messungen angestellt, aber ebenfalls ohne Erfolg. Hr. Wehnelt [3]) zeigte, dass in weiteren Röhren (bei Elektrodenscheiben, welche den Querschnitt fast

---

1) Puluj, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Mathem.-phys. Cl. II. (1). 81. p. 874. 1880.

2) W. Crookes, Phil. Trans. 170. I. p. 138—139. 1879.

3) A. Wehnelt, Wied. Ann. 65. p. 529. 1898.

vollkommen ausfüllten) der dunkle Raum etwas grösser ist als in engeren; welchen Einfluss hierbei die Strom*dichte* gehabt hat, bleibt unentschieden. Die für dasselbe Gas bei demselben Drucke gemessenen *d*-Werthe stimmen bei den drei genannten Forschern durchaus nicht überein; offenbar hat bei allen die Form des Entladungsgefässes, insbesondere die nicht umgangene Wirkung der Wandladungen einen sehr grossen Einfluss gehabt. Das gleiche gilt für die zahlreichen gelegentlichen Angaben über die Dicke der vorhandenen Dunkelräume, wie sie häufig gegeben worden sind, um den Grad des Vacuums angenähert zu charakterisiren. Untereinander genau vergleichbare, systematische Messungen über die Art und Weise wie sich in *verschiedenen Gasen* die Dicke *d* des Hittorf'schen Dunkelraumes mit abnehmendem Gasdrucke *p* entwickelt, liegen meines Wissens seither noch nicht vor. Nachdem man über die Natur der Kathodenstrahlen und damit über einen der eigenartigsten Vorgänge bei den Gasentladungen in der neuesten Zeit durch eine Reihe gut zusammenstimmender quantitativer Untersuchungen Aufschluss erhalten hat, scheint aber gerade die Deutung des Dunkelraumes, der den Entladungsvorgang bei den höheren Gasdrucken charakterisirt, das nächst wichtige Problem zu sein. In ihm gerathen offenbar die Vorgänge an der Kathode mit dem umgebenden Gase in Wechselwirkung. Dasselbe reagirt mit gewissen seiner Eigenschaften auf die an der Kathode ausgelösten Bewegungen, einfache Beziehungen der Entwickelung des Dunkelraumes zum Gasdrucke und zu bestimmten Constanten des Gases stellen einen tieferen Einblick in den ganzen Entladungsmechanismus selbst in Aussicht. Gerade hierfür scheint das Studium der Kathodenerscheinungen bei den *höheren* Drucken besonders geeignet zu sein, da hier die Materie uns in Zuständen entgegentritt, die uns auch anderweitig zugänglich und in ihren Gesetzmässigkeiten von anderen Erscheinungsgebieten her vertraut sind.

Eine grosse Reihe von Voruntersuchungen an sehr verschieden gestalteten Entladungsröhren und mit den verschiedenen Erregungsquellen hatten ergeben, dass es zur Auffindung einfacher Beziehungen zur Gasnatur unerlässlich ist, sowohl bezüglich des Entladungsraumes und der Anordnung der Elektroden in ihm, als auch in Bezug auf die zur Erzeugung der

Entladung nöthigen elektrischen Erregungen die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

1. *Der Entladungsraum.* Die Ausgestaltung der Kathodenerscheinungen ist in hohem Grade abhängig von festen Körpern, Leitern oder Nichtleitern, die sich in der Nähe befinden. Durch die Glimmlichtstrahlen, bei tiefen Drucken von den Kathodenstrahlen werden auf die Wände des Entladungsgefässes sehr starke Ladungen übertragen. Befinden sich daher die Wände in der Nähe der metallischen Kathode, so wird die Entwickelung des Dunkelraumes stark gestört. Man muss daher *sehr weite* Entladungsgefässe anwenden und die Kathode in ihnen so aufstellen, dass sie von den Wandladungen ganz unbeeinflusst bleibt; dann erst entwickelt sich das Phänomen völlig rein und frei. Ich verwendete bei meinen Messungen eine ca. 4 Liter fassende grosse Vacuumflasche mit eingeschliffenem Glasstöpsel, der durch Quecksilber gedichtet wurde; die nur 20 mm im Durchmesser haltende Kreisscheibenkathode befand sich in der Mitte der Flasche, allseitig um mindestens $6^1/_2$ cm von der Wand entfernt.

2. *Die Stromform.* Noch viel wichtiger zur Gewinnung genau vergleichbarer Resultate ist eine geeignete Erregung der Entladungen. Erhöht man die durch das Entladungsrohr hindurchgehende Stromstärke, so zieht sich der Dunkelraum zusammen und behält dann ein bestimmtes Minimum von Ausdehnung bei verhältnissmässig grossen Stromdichten an der Kathode bei. Dabei ist vorausgesetzt, dass keine Funkenstrecken in dem Schliessungskreise auftreten; denn werden solche etwa den Entladungen der Influenzmaschine vorgelegt, so geht die Entladung von der „normalen Form" (E. Wiedemann) mit verhältnissmässig grossem Dunkelraume zu einer Form mit immer enger anschliessender Glimmlichtschicht über. Bei grossen Stromstärken verdichtet sich das ganze Kathodengebilde und die Dicke der zweiten Schicht erreicht ein Minimum, welches dann aber von der Stromstärke und Spannung innerhalb weiter Grenzen unabhängig ist. Will man also Dunkelräume studiren, deren Entwickelung sich möglichst unabhängig von den Entladungsbedingungen vollzieht und folglich eine einfache Beziehung zum Druck und der Gasnatur vermuthen lässt, so muss man starke Entladungsströme ver-

wenden, Elektricitätsquellen, welche nach einmal eingetretener Entladung noch genügende Elektricitätsmengen nachschaffen. Solche Ströme erhitzen aber die Elektroden ziemlich stark und führen einen Theil des umgebenden Gases in einen anderen Zustand über, den man heute fast allgemein als einen Zustand mehr oder weniger fortgeschrittener Dissociation ansieht. Es müssen also Polarisationen (Pringsheim) und dergl. eintreten, welche durch den Stromvorgang selbst das Medium, dessen Reaction gegen die Entladung studirt werden soll, unter den Händen des Beobachters verändern. Es war daher abzusehen von starken, längere Zeit in *einer* Richtung circulirenden Strömen. Wie man sich nach dem Vorgange von Hrn. F. Kohlrausch bei der Bestimmung der Leitfähigkeit der Elektrolyte frei macht von den störenden Einflüssen der Polarisation an den Elektroden durch Verwendung von Wechselströmen, so mussten auch die einseitigen Veränderungen an der Kathode vermindert und die Kathodenerscheinungen reiner und klarer erhalten werden, wenn man Ströme verwendete, bei denen die eine Stromphase nach kurzer Pause von einer darauf folgenden, möglichst gleichen, aber von entgegengesetztem Zeichen abgelöst wurde. Ich habe schon bei früherer Gelegenheit darauf hingewiesen, dass man in der That bei Anwendung hochfrequenter, hochgespannter Wechselstromentladungen überaus glänzende und prägnante Kathodenerscheinungen erhält. Für den vorliegenden Zweck habe ich einen mehr als halbpferdigen Gleichstrom-Wechselstromumformer, System Hummel, verwendet; durch Ein- und Ausschalten von Regulirwiderständen, sowohl im Gleichstromkreise wie im primären Wechselstromkreise, konnte hier die Stromstärke, Spannung und Entladungszahl pro Secunde innerhalb der weitesten Grenzen und zwar unabhängig voneinander nach Belieben verändert werden; die Dicke des Dunkelraumes erwies sich von allen den genannten Grössen als völlig unabhängig, falls mit Strömen oberhalb einer gewissen Stärke, die bei den Messungen nie unterschritten wurde, gearbeitet wurde.

Bei den grossen Energiemengen, die bei Einführung des Wechselstromes verwendet werden konnten, waren alle elektrischen Vorgänge auch in dem den Entladungsapparat enthaltenden secundären Wechselstromkreise bequem und sicher messbar.

Die genannten Gesichtspunkte 1. und 2. waren für die folgenden Untersuchungen maassgebend. Eine genauere Verfolgung der Dicke des Dunkelraumes, welche rasch mit abnehmendem Drucke wächst, schien, abgesehen von ihrer rein elektrischen Bedeutung, auch mit Rücksicht auf die eigenthümlichen Abweichungen vom Boyle-Mariotte'schen Gesetze bei tiefen Drucken von Interesse, auf welche die Arbeiten der Herren Siljeström, Mendelejeff, Amagat, Bohr, Fuchs, E. van der Ven, sowie Baly und Ramsay die Aufmerksamkeit gelenkt haben.

Apparate.

1. *Das Entladungsgefäss.* In die 23 cm hohe, 15 cm weite, sehr dickwandige Flasche *A* (Fig. 1) aus schwer schmelzbarem Kaliglas war oben der weite Glasstopfen *B* sorgfältigst eingeschliffen. Auf den über den Hals der Flasche geschobenen Gummiring *CC* war der kurze, weite Glascylinder *DD* geschoben; die Dichtung wurde ohne Fett durch Quecksilber hergestellt, welches in den durch *CC* und *DD* gebildeten Becher eingefüllt wurde. Der Glasstopfen trug oben drei Rohransätze, von denen der linke, *E*, die Verbindung mit der Quecksilberluftpumpe (Töpler-Hagen'sche Construction) herstellte; *F* und *G* trugen die Elektroden. Die Elektrode *a*, an der die Dicke der Dunkelräume gemessen wurde, war eine Kreisscheibe von 20,0 mm Durchmesser aus Aluminiumblech von 0,51 mm Dicke. Sie war mittels eines rechteckigen Fortsatzes in einen Sägeschnitt am unteren Ende des 6 mm dicken Messingstabes *b* festgeklemmt. Damit die Entladung nur auf die Oberfläche der Kreis-

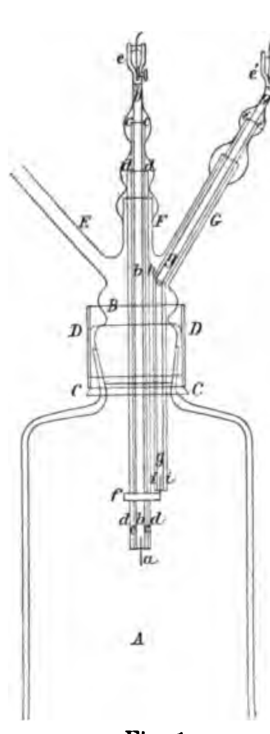


Fig. 1.

scheibe beschränkt blieb, war der Stab *b* von dem eng anschliessenden Glasmantel *c* umschlossen, in den der Stab oben mittels Siegellack eingekittet war. Der Stab *b* wurde mit seinem Glasmantel *c* von dem Glasrohre *d* getragen, welches in den mittelsten Rohransatz *F* oben festgekittet war. Um jegliche Funkenbildung in den Zuleitungen zu vermeiden, war auf den Stab *b* oben ein kleines eisernes Quecksilbernäpfchen aufgeschraubt, in das das amalgamirte Ende des kupfernen Zuleitungsdrahtes eintauchte. Eine seitlich eintretende Klemmschraube hielt den Draht im Näpfchen fest, sodass er nicht heraus federn konnte; da mit lebensgefährlichen Wechselstromspannungen gearbeitet wurde, war diese Vorsicht geboten.

Die andere Elektrode *f* wurde von einem 4 mm dicken Messingdraht *g* getragen, der durch den Rohransatz *G* hindurchging. Da viele Vorversuche gezeigt hatten, dass zu einer völlig symmetrischen Ausbildung der Kathodendunkelräume auf beiden Seiten der Kathodenplatte unerlässlich ist, die Anode vollkommen symmetrisch in Bezug auf die Kathode anzuordnen, so wurde als zweite Elektrode ein Ring aus einem Aluminiumblechstreifen gewählt, welcher die Zuleitung zur Elektrode *a* völlig conaxial umgab, von dieser selbst durch die doppelte Glasumhüllung *c c*, *d d* getrennt. Damit beide Elektroden gleiche Fläche hatten, musste der Blechstreifen bei 3 mm Höhe 105 mm lang gewählt werden. Auch er war in der Mitte mittels eines rechteckigen Fortsatzes am Ende seiner Zuleitung *g* festgeklemmt. Diese selbst war bis an das Ende von dem Glasmantel *i i* umgeben, der selbst wieder in seinem oberen Theile in den Rohransatz *G* eingekittet war. Da bei dem engen Rohranschluss der Theil *f g i* nicht als Ganzes durch *G* eingeführt werden konnte, war *g* aus zwei Theilen bei *h* zusammengeschraubt. Zuerst wurde der obere Theil mit seinem Glasmantel durch *G* eingeführt, dann der untere von unten her mit seinem Glasmantel herangehoben, und in ihn der obere eingeschraubt. Sodann wurde *i i* in *G* festgekittet. Dabei blieb freilich bei *h* in dem Glasmantel ein schmaler unbedeckter Spalt übrig, da im Innern des Entladungsraumes jedes Kittemittel vermieden werden sollte. Indessen nur bei ganz niederen Drucken leuchtete das Gas bei *h*

mit auf; ein Einfluss auf die zu messenden Grössen war nicht zu erkennen.

Die Zuleitung vermittelte ein zweites Eisenquecksilbernäpfchen e' mit Klemmschraube. Durch Anwendung von Zuleitungen von so grossem Querschnitte war jede merkliche Erwärmung in diesen selbst während sehr langer Versuchsreihen ausgeschlossen.

Die Wände waren bei den hier verwendeten Gasdrucken so weit von den Elektroden entfernt, dass die Glimmlichter mit ihren vorderen Spitzen nur in einigen Fällen bis an die Glaswand heranreichten. Dementsprechend waren auch die Wandladungen von sehr geringem oder keinem Einflusse.

Die Bestäubung mit einem Mennige-Schwefelpulver, wie es jüngst Hr. Riecke mit Glück zum Nachweise der Wandladungen der Entladungsröhren verwendete, liess hier keine Spur einer solchen Ladung erkennen.

Dass an der Elektrode a sich rasch hintereinander Anoden- und Kathodenerscheinung übereinander lagerte, hatte auf die Messungen keinen störenden Einfluss, denn wie schon frühere Untersuchungen gelehrt hatten, kommt in einem solchen Falle nur die Kathodenerscheinung zur Geltung.

Damit die Gasfüllung und das Innere der Vacuumflasche immer möglichst trocken blieb, war ihr Boden ganz mit Phosphorpentoxyd bedeckt.

2. *Die Elektricitätsquelle.* Als Wechselstromgenerator verwendete ich bei den definitiven Versuchen einen vierpoligen, schnelllaufenden Gleichstrom-Wechselstrom-Umformer, System Hummel, und zwar eine grössere Type als die von mir früher bereits verwendeten Umformer.[1])

Die Maschine beanspruchte ca. 450 Watt Gleichstromleistung, welche bei einer Spannung von 126 bis 128 Volt an den Klemmen des Gleichstromkreises der Centrale (Drei-

---

1) Die Maschine ist von Hrn. Ingenieur G. Hummel construirt worden und wurde mir von den jetzigen Inhabern der Hummel'schen Fabrik, den Herren E. Wagmüller u. J. Hackl in liebenswürdigster Weise für meine Versuche zur Verfügung gestellt; ich nehme die Gelegenheit wahr, den genannten drei Herren auch öffentlich meinen besten Dank auszusprechen.

leitersystem) der kgl. Hochschule entnommen wurde; die Maschine war an die beiden Aussenleiter des Beleuchtungsnetzes angeschlossen. Hier hielt sich bei der geringen Inanspruchnahme der Anlage im Sommer die Spannung hinreichend constant.

Der Maschine war ein Anlasswiderstand beigegeben, der vor die Ankerwickelung gelegt, zunächst die Feldmagnete allein speisen liess. Durch Auskurbeln einer entsprechenden Menge von Vorschaltwiderstand konnte die Tourenzahl, sowie die in der Zeiteinheit geschnittene Kraftlinienzahl, d. h. die Wechselstromspannung innerhalb sehr weiter Grenzen, variirt werden. Bei den unten angeführten Messungen lag die Gleichstromintensität meist um 3,4 Ampères herum.

Zur Erreichung der nöthigen Spannungen wurde ein *Igeltransformator* verwendet; ein Regulirwiderstand im Niederspannungskreis liess im Verein mit dem erwähnten Anlasswiderstand leicht eine bestimmte Spannung bei gegebener Stromstärke, oder umgekehrt eine bestimmte Stromstärke bei bestimmter Spannung erreichen.

3. *Die Messinstrumente.* — a) *Messung der Dicken der Dunkelräume.* Bei mehreren ausgedehnten Vorversuchsreihen wurden die Dunkelräume *photographirt* und die Photogramme dann ausgemessen. Bei den unten mitgetheilten Messungen konnte wegen der sehr grossen Constanz der Erregungsbedingungen, die mit der neuen Maschine erreichbar war, ein directes Messverfahren angewendet werden. Auf dem Schlitten einer Theilmaschine war ein Fernrohr mit nicht zu entferntem Nahepunkt des Accommodationsgebietes und mit schrägliegendem Fadenkreuze so befestigt, dass es beim Drehen der Theilschraube parallel mit sich selbst, senkrecht zur Schraubenaxe stehend bewegt werden konnte. Die Schraube war genau auf periodische und fortschreitende Fehler hin durchuntersucht worden; ihre Ganghöhe betrug in dem bei den Messungen benutzten Bereiche 0,8520 mm. Es wurde mit dem Fadenkreuz erst auf den einen, dann auf den anderen äusseren Rand des Dunkelraumes eingestellt; wurde dann von der Differenz der Ablesungen die Plattendicke (in Messschraubenumgängen ausgedrückt) abgezogen, halbirt und das Resultat in Millimeter umgerechnet, so wurde die Dicke des Dunkelraumes erhalten;

diese Zahl ist in den folgenden Tabellen unter *d* eingetragen. Hierbei wurde freilich die innerste leuchtende Schicht mit in den Dunkelraum einbezogen; dieselbe legt sich indessen immer sehr dicht an die Elektrodenflächen an. Durch die Vernachlässigung der Dicke dieser Lichthaut erscheinen die Dicken zu gross, was aber höchstens bei den kleinen Dicken einigermaassen in Betracht kommt, während der Fehler für die grossen Dicken verschwindend klein ist, da die erste Schicht nicht angenähert so rasch wächst, wie die beiden anderen. Ein anderer Umstand muss hier erwähnt werden: Man war genöthigt, die zu messende Strecke durch die Glaswand der Vacuumflasche hindurch anzuvisiren. Dadurch, dass man bei den Vorversuchen eine Scala an die Stelle, wo später der Dunkelraum erzeugt wurde, brachte und diese ausmaass, konnte man sich davon überzeugen, dass der entstehende Fehler nicht gross war, wenn man diejenige Seite der Flasche ausgesucht hatte, welche ganz besonders rein war. Dass die Ablenkung des Strahlenganges durch die Cylindermantelfläche des Vacuumgefässes bei den hier in Betracht kommenden Dimensionen des im Inneren befindlichen, zu messenden Gegenstandes keinen störenden Einfluss über die Grenze der unvermeidlichen Einstellungsfehler hinaus ausüben konnte, zeigt eine einfache Rechnung.

Dabei war bei den kleinen, scharf begrenzten Dunkelräumen eine Genauigkeit von $^1/_{20}$ bis $^1/_{50}$ mm in der Dickenmessung zu erreichen. Bei grösseren Dunkelräumen lag die Grenze der unvermeidlichen Messungsfehler innerhalb 0,1 mm, bei den ganz grossen Dunkelräumen, die auch hier verhältnissmässig sehr verwaschen gegen das diffus begrenzte Glimmlicht absetzten, konnte der Fehler einer Messung mehrere Zehntel Millimeter erreichen; letztere sind übrigens wegen dieser ihnen unvermeidlich anhaftenden Ungenauigkeit nur in einzelnen Fällen mit in die unten angeführten Tabellen aufgenommen worden, wenn sie auch stets mit gemessen wurden.

Eine bequeme, bei allen Beobachtungen angewendete Controle der Einzeleinstellungen ergab sich dadurch, dass, wenn das Mittel aus den beiden Ablesungen genommen wurde, immer wieder dieselbe Zahl, nämlich die der Mittelebene der Platte entsprechende Einstellung erhalten werden musste. Die

Abweichungen von dieser Mittelstellung lagen immer innerhalb der Beobachtungsfehler.

b) *Die Druckmessung.* Zur Messung der Gasdrucke wurde ein Mac Leod'sches Manometer Kahlbaum'scher Construction[1]) von Kramer in Freiburg i. B. mit doppeltem Messbereiche verwendet. Durch Zusammendrücken des Gasrestes auf $^1/_{100}$ Volumen konnten an einer Steigröhre direct die Hundertstel Millimeter Hg-Druck, durch Zusammendrücken auf $^1/_{2000}$ an einer zweiten die Tausendstel abgelesen werden; die Zahlen sind unter p in den folgenden Tabellen aufgeführt.

Dass das Manometer den durch die stufenweisen Evacuationen herbeigeführten Druckerniedrigungen wirklich genau folgte, wurde durch besondere Versuchsreihen geprüft. Die Herren E. C. C. Baly und W. Ramsay[2]) haben schon früher auf eine Reihe von Fehlerquellen aufmerksam gemacht, welche genaue Druckmessungen mit dem Mac Leod-Manometer bei tiefen Drucken sehr gefährden können, namentlich auf die Veränderungen der Capillareigenschaften des Quecksilbers dem Glase gegenüber bei Veränderung des darüber liegenden Gasdruckes.

Da man diesen Veränderungen gegenüber ziemlich machtlos ist, wurden tiefe Drucke (unter 0,10 mm) überhaupt nur ganz ausnahmsweise verwendet, zumal dann die Dunkelräume meist schon so verwaschen sind, dass eine scharfe Einstellung auf ihre Begrenzung kaum mehr möglich ist. Da bei dem Manometer immer mindestens auf das Hundertfache zusammengepresst wurde, so kam man bei der Messung selbst ganz ausserhalb jener Druckgrenzen, unterhalb deren die Gültigkeit des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes Zweifeln unterliegen könnte. Ausserdem hatte man in der Constanz der Druckverhältnisse bei gleichmässig von Pumpenzug zu Pumpenzug fortschreitender Evacuation des constanten Gesammtvolumens eine genügende Controle.

Vor jeder Messungsreihe wurden sämmtliche Vacuum-

---

1) G. W. A. Kahlbaum, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 15. p. 191. 1895.

2) E. C. C. Baly u. W. Ramsay, Phil. Mag. (5) 38. p. 301. 1894.

theile, die Pumpe, sowie das Manometer mit dem sorgfältig gereinigten und durch Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrockneten Gase mehrere Male ausgespült. Dann verblieb die betreffende Gasfüllung bei etwa $^1/_3$ Atmosphärendruck während mehrerer Tage in dem Apparate, wobei sich Alles mit dem Gase selbst sättigen und dieses selbst die letzten Spuren Wasserdampfes an das in der Vacuumflasche ausgebreitete P_2O_5 abgeben musste. Ueber die Reinheit der Gase wurden während der ganzen Messungsreihe sorgfältigste spectroskopische Prüfungen unterhalten.

Es wurde zwischen jedem einzelnen Pumpenzuge und vor jeder neuen Messung immer solange gewartet, dass in dem allerdings etwas weit verzweigten Röhrensysteme sich der Druck und die Temperaturen vollkommen ausgeglichen haben mussten.

Bei den sehr niederen Drucken beeinflusste mitunter eine Erscheinung die genaue Messung nicht unerheblich, welche ich eine „*Selbstevacuation*" des Vacuumapparates nennen möchte. Unter dem Einflusse der Entladung selbst veränderte sich der Gasinhalt in einer Weise, welche einer fortschreitenden Evacuation entsprach; die Dicke der Dunkelräume wuchs während des Stromdurchganges, wiewohl vor dem Beginne dieser Versuche bei tiefen Drucken immer ganz besonders lange gewartet wurde. Ferner stieg die Spannung, desgleichen der Wattconsum im Entladungsapparate, wiewohl die Stromstärke fortwährend sank. Dabei war an dem Manometer direct fast nie eine wirkliche Druckverminderung nachweisbar. Aus diesem Grunde sind die den niederen Drucken entsprechenden Zahlen Mittelwerthe von geringerem Gewichte als die den hohen Drucken entsprechenden Werthe, ganz abgesehen davon, dass die Einstellungen auf die Grenzen des Dunkelraumes bei den tiefen Drucken an sich unsicher wurden.

c) *Die elektrischen Messinstrumente.* Durch Vorversuche war, wie schon oben erwähnt, nachgewiesen worden, dass bei der hier getroffenen Anordnung die Dicke des Dunkelraumes sich weder mit der Periodenzahl des Wechselstromes, noch mit dessen effectiver Spannung oder Stromstärke merklich änderte. Wir haben hier also in der That ein Phänomen vor uns, welches nur noch vom Gasdrucke und der Gasnatur

abhängt. Nur um jederzeit einen Vergleich zu ermöglichen, sind in die Tabellen die elektrischen Daten des Vorganges mit aufgenommen worden und zwar für den

Gleichstrom: Spannung S (Voltmeter von Reiniger, Gebbert und Schall in Erlangen), Stromstärke A (Weston-Ampèremeter);

Niederspannungswechselstrom: Spannung v (Hitzdraht-Voltmeter nach M. W. Hoffmann), Stromstärke J (Hitzdraht-Ampèremeter von Hartmann und Braun);

Hochspannungswechselstrom: Spannung V (Plattenvoltmeter nach Ebert-Hoffmann, verbessert von Prof. Dr. Th. Edelmann), Stromstärke i (Hitzdraht-Milliampèremeter eigener Construction).

Den später mitgetheilten Tabellen ist noch die Grösse $E = V.i$ beigefügt worden; sie bedeutet die durch die Entladung consumirte Wattzahl, abgesehen von der durch die Phasenverschiebung bedingten Abänderung dieser Grösse.

Sämmtliche Instrumente mussten möglichst zu der gleichen Zeit (während die Einstellungen an der Theilmaschine ausgeführt wurden) abgelesen werden, wozu zwei Hülfsbeobachter nöthig waren.

Resultate.

Ehe die einzelnen Messungsreihen für die verschiedenen Gase mitgetheilt werden, müssen einige allgemeine Resultate sämmtlicher Messungen vorangestellt werden, damit die Einrichtung der folgenden Tabellen und graphischen Darstellungen verständlich wird.

Bei jedem der untersuchten sechs Gase (O_2, H_2, N_2, CO, CO_2, Luft) ergab sich folgendes *Entwickelungsgesetz der Dicke des Hittorf'schen Kathodendunkelraumes mit fortschreitender Gasverdünnung:*

> Nimmt die Verdünnung in gleichem Verhältnisse zu, so nimmt auch die Dicke des Dunkelraumes in gleichem Verhältnisse zu.

Oder anders ausgedrückt:

> Schreitet die Evacuation des Entladungsraumes nach einer geometrischen Reihe fort, so wächst auch der Dunkelraum nach einer geometrischen Reihe.

Bemerkenswerth ist aber, dass die Wachsthumsverhältnisse oder die Exponenten der beiden einander parallel gehenden Reihen von Zahlenwerthen nicht einander gleich sind, sondern die Dicke d der Dunkelräume im allgemeinen langsamer wächst als die Verdünnungen fortschreiten. Den Evacuationen und damit diesen Verdünnungen sind die Gasdrucke p reciprok; bezeichnen also p_1 und p_2 zwei beliebige Gasdrucke, bei denen Entladungen durch den Gasraum hindurch gehen, und die Kathode vollkommen gleichmässig mit allen drei Kathodenschichten bedeckt ist, und d_1 und d_2 die zugehörigen Dicken der Dunkelräume, so ist

$$(1) \qquad \frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^m$$

wo m, eine reelle positive Zahl, im allgemeinen kleiner als 1 ist:

$$0 < m \leqq 1 .$$

Da in unsere Relation nur das *Verhältniss* der Drucke bez. der Dicken eingeht, so muss diese von dem Maasse, in welchem die genannten Grössen gemessen werden, unabhängig sein; m ist also eine nur von der Gasnatur abhängige Grösse, deren Werth sich nicht ändert, wenn man p oder d durch andere Einheiten ausdrückt.

Für je zwei beliebige Punkte der Druckscala ist also

$$(2) \qquad d_1 \cdot p_1^m = d_2 \cdot p_2^m .$$

Es ist folglich im allgemeinen nicht $d.p$ eine Constante und die Dicke des Dunkelraumes umgekehrt proportional dem Drucke, sondern

$$(3) \qquad d \cdot p^m = \text{const.},$$

wo m eine für das betreffende Gas charakteristische Zahl ist, deren physikalische Bedeutung wir weiter unten kennen lernen werden.

Den Gleichungen (1) bis (3) kann man durch Logarithmiren eine Gestalt geben, in der sie sich zur *graphischen Darstellung* der Messungsergebnisse besonders eignen. Es ist

$$(4) \qquad \log d_1 - \log d_2 = m\ (\log p_2 - \log p_1),$$

und

(5) $$m = \frac{\log d_1 - \log d_2}{\log p_2 - \log p_1},$$

(6) $$\log d_1 + m \,.\, \log p_1 = \log d_2 + m \log p_2 ,$$

(7) $$\log d + m \log p = \text{const.}$$

Trägt man also in ein rechtwinkliges Coordinatensystem die Logarithmen der Drucke p als Abscissen x (positiv für Drucke > 1, negativ für Drucke < 1), die Logarithmen der zugehörigen d-Werthe als Ordinaten y auf, so erhält man *gerade Linien* als Beobachtungscurven. Die negativ genommene Zahl m stellt, da nach (7)

$$y + m x = \text{const.},$$

also $dy/dx = - m$ ist, augenscheinlich die *Steigung* der Geraden dar. In dieser Weise sind die Curven (Fig. 2 und alle folgenden) mit log p (p in Millimeter Quecksilbersäule) als Abscissen, log d als Ordinaten (d in Millimetern gemessen) für die verschiedenen Gase erhalten worden; wegen der übersichtlichen Form, welche bei Einführung der Logarithmen die gefundene Relation annimmt, sind ausser den Verhältnissen p_1/p_2 und d_2/d_1 auch die Logarithmen von p und d mit in die Tabellen aufgenommen worden.

Der Verlauf einer geraden Linie ist ausser durch ihre Neigung gegen die Axen noch durch ihre relative Lage zu diesen, also z. B. durch einen der beiden Axenabschnitte bestimmt. In der That enthält unser Gesetz (3) noch eine Constante, über die wir weiter verfügen müssen.

Anknüpfend an die graphische Darstellung empfiehlt es sich, für diese Constante denjenigen absoluten Dickenwerth d_0 in Millimeter zu wählen, der für die einzelnen Gase erscheint bei dem bestimmten Drucke $p = 1$ mm Hg, für den also $\log p = 0$ ist; log d_0 ist also das Stück, welches die geraden Linien auf der positiven Ordinatenaxe unserer graphischen Darstellungen abschneiden. Dadurch erhält das Gesetz die Gestalt

(I) $$d \,.\, p^m = d_0$$

Aus dem Verlaufe der nach den Messungsreihen construirten geraden Linien für die Logarithmen von p und d

werden die graphisch ausgeglichenen Werthe von m und d_0 abgeleitet. Die Abweichungen der mit diesen in jeder Tabelle beigefügten Werthen nach der Formel (I) für ein jedes p berechneten d-Werthe von den beobachteten sind in den folgenden Tabellen unter $\delta = d$ berechnet $- d$ beobachtet aufgeführt; diese Differenzen liegen überall durchaus innerhalb der Grenze der unvermeidlichen Beobachtungsfehler.

Bestätigt sich somit das gefundene Gesetz (I) durchaus. so muss ein Umstand sehr auffallend erscheinen, der sich bei allen untersuchten sechs Gasen wiederholt und der für die Deutung des ganzen Phänomens von der grössten Wichtigkeit erscheint:

> Sämmtliche Beobachtungscurven zeigen bei einem ganz bestimmten, für jedes Gas verschiedenen Druck Π einen Knick; die Beziehung zwischen p und d enthält also für alle untersuchten Gase eine Discontinuität; vor und nach der Discontinuitätsstelle folgen sie alle einem Gesetze von der Form (I), nur mit plötzlich umspringenden Werthen der Constanten.

Ein Blick auf die Curvenfiguren zeigt, dass sowohl vor wie nach dem Knick die den einzelnen Messungen entsprechenden Punkte sich genau je einer geraden Linie anschliessen. Die Curvenneigung geht nicht allmählich aus dem Anfangswerthe in den Endwerth über, sondern von einem bestimmten Drucke an folgen die einzelnen Curvenpunkte plötzlich einem anderen Gesetze; dasselbe fügt zwar die Logarithmenwerthe wieder zu einer linearen gegenseitigen Abhängigkeit zusammen, aber die m- sowie die d_0-Werthe sind andere: M und D_0 geworden.

Auf diese Discontinuität, ihre Lage in der Druckscala, sowie ihre Beziehung zu anderen physikalischen Erscheinungen soll in der Folge besonders hingewiesen werden.

1. Sauerstoff.

Der allgemeine Verlauf der Erscheinungen, vor allem die Discontinuität der Beziehung zwischen p und d wird am besten durch das Verhalten des Sauerstoffs erläutert. Für dieses Gas (aus chlorsaurem Kali und Braunstein entwickelt) liegen zwei in Fig. 2 durch Punkte bez. Kreuze dargestellte Messungs-

en vor, die, wie man sieht, untereinander sehr gut über- timmende Werthe ergeben.

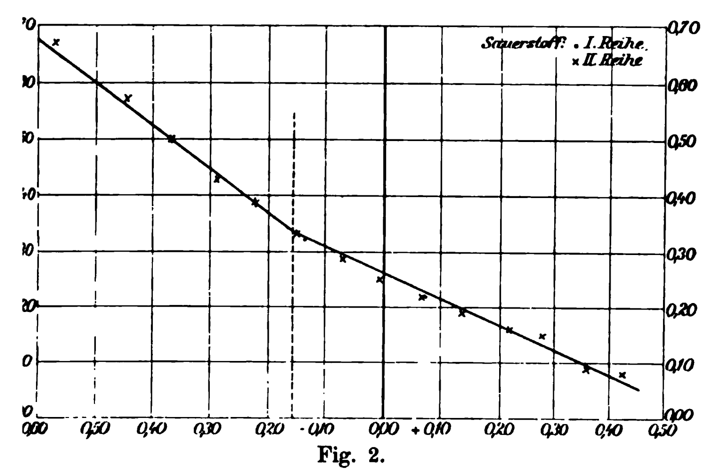


Fig. 2.

Bezüglich der Bedeutung der Buchstaben in allen folgen- Tabellen vgl. p. 212 und 214.

Tabelle 1.

Sauerstoff, I. Reihe.

$m = 0,459$, $d_0 = 1,80$.

p	p_1/p_2	d	d_2/d_1	log p	log d	δ	S	A	v	J	V	i	E
:8		1,64		0,072	0,215	+0,03	129	3,6	15	2,4	378	0,0174	6,6
	1,62		1,27										
'3		2,09		−0,137	0,320	−0,01	129	3,6	16	2,3	438	0,0173	7,6

$M = 0,738$, $D_0 = 1,62$. Discontinuität bei $\Pi = 0,70$.

p	p_1/p_2	d	d_2/d_1	log p	log d	δ	S	A	v	J	V	i	E
	1,62		1,40										
:5		2,93		−0,347	0,467	−0,02	129	3,6	16	2,3	548	0,0172	9.4
	1,55		1,42										
:9		4,16		−0,538	0,619	−0,12	129	3,5	16	2,3	676	0,0171	11,5
	1,58		1,32										
83		5,48		−0,738	0,739	+0,19	127	3,5	16	2,2	818	0,0165	13,5
	1,42		1,41										
29		7,69		−0,889	0,886	−0,35	127	3,4	17	2,2	1023	0,0161	16.5
	1,55		1,36										
'83		10,43		−1,081	1,018	−0,27	127	3,4	18	2,2	1299	0,0157	20,4
	1,63		1,37										
'51		14,3		−1,292	1,155	+0,2	127	3,3	20	2,1	1676	0,0150	25,1

Die Abweichungen δ zwischen den nach der Formel (I) :hneten und den beobachteten Werthen liegen bis herab = 0,45 in den Hundertsteln, von da ab in den Zehnteln meter.

Hierbei war der Dunkelraum durchaus nicht völlig dunke vielmehr war er von einem blassvioletten Lichte erfüllt, desse Intensität nach aussen zu gegen die dritte Schicht hin, merl lich wuchs. Nichtsdestoweniger war die innere Grenze de weisslichvioletten dritten Schicht, namentlich bei den höhere Drucken, sehr deutlich. Die innerste erste Schicht war be den höheren Drucken fast bräunlich und wurde dann röth lichbraun. Bei 0,45 mm war die erste Schicht röthlich, di zweite violett, die dritte weiss geworden.

Zeigt diese Beobachtungsreihe I, bei der zwischen jede Messung je dreimal ausgepumpt wurde, wie sich die Dick des Dunkelraumes bis zu den tiefsten Drucken hin, bei dene noch scharf eingestellt werden konnte, vergrössert, so soll di folgende, bei der die einzelnen gemessenen Dicken viel dichte aufeinander folgen und jedesmal (ausser zwischen den letzte beiden Messungen) nur je einmal evacuirt wurde, nament lich den Curvenknick recht deutlich hervortreten und de Discontinuitätsdruck *Π* möglichst genau bestimmen lasser Diese Reihe begann bei sehr hohen Drucken; aber erst vo $p = 2{,}8$ an war die Platte vollkommen gleichmässig von de Kathodenschichten bedeckt.

Tabelle 2.

Sauerstoff, II. Reihe.

$m = 0{,}453$, $d_0 = 1{,}80$.

Nr.	p	p_1/p_2	d	d_2/d_1	$\log p$	$\log d$	δ	S	A	v	J	V	i	E
53	2,67		1,18		0,426	0,072	−0,02	128	3,4	15	2,2	351	0,0160	5,
		1,18		1,06										
54	2,26		1,24		0,354	0,093	+0,01	128	3,5	16	2,4	351	0,0173	6,
		1,19		1,11										
55	1,90		1,39		0,279	0,143	−0,04	128	3,5	15	2,2	415	0,0158	6.
		1,17		1,04										
56	1,63		1,45		0,212	0,161	−0,01	128	3,5	16	2,4	371	0,0173	6.
		1,19		1,08										
57	1,37		1,56		0,137	0,193	±0,00	128	3,5	16	2,4	384	0,0172	6
		1,16		1,06										
58	1,18		1,65		0,072	0,217	+0,02	127	3,5	16	2,4	397	0,0171	6.
		1,19		1,08										
59	0,99		1,78		−0,004	0,250	+0,03	27	3,5	16	2,3	409	0,0172	7
		1,15		1,09										
60	0,86		1,94		−0,066	0,288	−0,01	127	3,5	16	2,3	427	0,0171	7.
		1,22		1,10										
61	0,71		2,13		−0,149	0,328	−0,03	127	3,5	16	2,3	454	0,0170	7.

Tabelle 2 (Fortsetzung).

Sauerstoff, II. Reihe.

$M = 0{,}824$, $D_0 = 1{,}58$. Discontinuität bei $\Pi = 0{,}70$.

Nr.	p	p_1/p_2	d	d_2/d_1	$\log p$	$\log d$	δ	S	A	e	J	V	i	E
		1,18		1,14										
62	0,60		2,43		−0,222	0,386	−0,02	127	3,4	15	2,1	476	0,0156	7,4
		1,18		1,12										
63	0,51		2,72		−0,292	0,435	+0,03	127	3,5	16	2,3	520	0,0170	8,8
		1,19		1,16										
64	0,43		3,16		−0,367	0,500	+0,02	127	3,5	16	2,3	561	0,0169	9,5
		1,19		1,16										
65	0,36		3,68		−0,444	0,566	−0,01	127	3,4	17	2,3	611	0,0168	10,2
		1,33		1,26										
66	0,27		4,63		−0,569	0,666	+0,01	127	3,4	17	2,3	712	0,0167	11,9

Hier ist die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung eine noch vollkommenere als bei Reihe I; 0,04 mm ist die grösste vorkommende Abweichung. Der Curvenknick liegt genau bei 0,70 mm Druck ($\log p = -0{,}155$); vgl. auch namentlich die Fig. 2.

Hr. C. Bohr[1]) fand das bemerkenswerthe, von den Herren Baly und Ramsay[2]) vollkommen bestätigte Resultat, dass der *Sauerstoff bei niederen Drucken sehr wesentlich von dem Boyle-Mariotte'schen Gesetze abweicht;* er wies auf eine sehr eigenthümliche Discontinuität in den Beziehungen zwischen Druck p und Volumen v hin. Dieselbe tritt bei einem Drucke von 0,70 mm Hg ein und scheidet deutlich Gebiete von höheren Drucken von solchen von niederen, in denen die Abhängigkeit der beiden Grössen v und p verschiedenen Gesetzen folgt. Die diese Beziehungen darstellende Curve (p etwa als Abscisse, v als Ordinate gewählt) besitzt bei 0,70 einen Knick. Oberhalb desselben folgt das Gas dem Gesetze (vgl. l. c. p. 479)

$$(p + 0{,}109)\, v = k\,,$$

für niedrigere Drucke als 0,70 dem Gesetze

$$(p + 0{,}070)\, v = k\,.$$

1) C. Bohr, Wied. Ann. 27. p. 459. 1886.

2) E. C. C. Baly u. W. Ramsay, Phil. Mag. (5) 38. p. 307. 1894.

Für die Steilheit der beiden Curvenäste leitet man hieraus ab:

$$\text{für die höheren Drucke: } \frac{d\,v}{-d\,p} = \frac{k}{(p+0{,}109)^2},$$

$$\text{für die tieferen Drucke: } \frac{d\,v}{-d\,p} = \frac{k}{(p+0{,}070)^2},$$

und an der Knickstelle selbst geht die Curvenneigung von dem kleineren Werthe $k/(0{,}809)^2$ plötzlich in den grösseren $k/(0{,}770)^2$ über. Das Volumen wächst also bei $p = 0{,}70$ plötzlich stärker, als bei abnehmendem Drucke dem Mariotte'schen Gesetze entspricht.

Dass die beiden genannten Discontinuitäten, die von Hrn. Bohr entdeckte zwischen p und v und die hier hervortretende zwischen p und d, *genau an dieselbe Stelle der Druckscala* fallen, kann kein Zufall sein, sondern muss einen tieferen physikalischen Grund haben. Dass nicht etwa unser Knick unmittelbar durch die Bohr'sche Discontinuität veranlasst war, ergiebt eine einfache Betrachtung: *Erstens* könnte man an einen directen Einfluss auf die Druckmessung selbst denken. In der That wird ja bei dem Mac Leod'schen Manometer das Boyle-Mariotte'sche Gesetz als gültig vorausgesetzt. Da aber bei meinem Exemplare auf das Hundert- bez. Tausendfache comprimirt wurde, lag selbst bei Drucken weit unterhalb 0,70 der Druck, mit dem thatsächlich gemessen wurde, weit oberhalb jener Stelle, wo Unregelmässigkeiten eintreten. Vergleicht man hiermit die wirklich erhaltenen Druckverhältnisse p_1/p_2 vor und nach dem Passiren der Unstetigkeitsstelle, welche ja, da sie dem constant verbleibenden Verhältnisse von Recipientenvolumen und Gesammtvolumen entsprechen, constant sein müssen, so erkennt man in der That keine grösseren Abweichungen, als sie unvermeidlich auftreten, weil die beim Evacuiren zusammengepressten Gasblasen bald mehr bald weniger vollkommen entfernt werden; jedenfalls ist in den p_1/p_2-Werthen keine Unstetigkeit zu bemerken, dieselbe haftet vielmehr der d_2/d_1-Reihe allein an. *Zweitens* könnte man hinweisen auf den von Hrn. Bohr gleichfalls entdeckten Einfluss der Zeit, demzufolge das normale Verhältniss zwischen Druck und Volumen sich bei verdünntem Sauerstoff in der Nähe von $p = 0{,}70$ erst allmählich herstellt. Aber

ıch dieses kann nicht die Ursache der Discontinuität bei ıs sein, denn die Messungen wurden zwar überall unittelbar, nachdem der Druck p hergestellt war, angestellt, ıbei wurde aber immer von höheren zu niederen Drucken ›ergegangen. Für diesen Gang hat aber Hr. C. Bohr (l. c.) ıchgewiesen, dass die bei der Druckerniedrigung mit :m Sauerstoff etwa vor sich gehende Zustandsänderung omentan oder nur in sehr kurzer Zeit vor sich geht, während r die Veränderungen im entgegengesetzten Sinne allerdings ehrere Stunden nöthig gewesen wären. Hieraus etwa resul:ende Fehler waren also vermieden.

Auf den möglichen Zusammenhang dieser und analoger rscheinungen bei anderen Gasen kommen wir bei der „Disıssion" zurück.

(Fortsetzung und Schluss folgt in einem der nächsten efte.)

(Eingegangen 30. Juli 1899.)

12. *Beiträge zur Kenntniss der Becquerelstrahlen;*
von O. Behrendsen.

Seit der Entdeckung der Uranstrahlen durch Becquere wurde über deren Wesen und Eigenschaften namentlich nacl zwei Richtungen hin weiter gearbeitet. Einmal gelang e G. C. Schmidt[1]), die nämliche Strahlung an Thorverbindunger sowie dem Ehepaar Curie[2]) an neuen, ganz besonders radic activen Substanzen, dem Polonium und Radium nachzuweiser Andererseits bemühte man sich, die Energiequelle für die s räthselhafte Strahlung ausfindig zu machen; in dieser Richtun haben die Herren Elster und Geitel[3]) Versuche angestell

Meine hier mitzutheilenden Versuche sollten hauptsäcl lich den Einfluss der Temperatur auf die Intensität der Be querelstrahlen studiren, um dadurch zur Lösung der Energi frage einen geringen Beitrag zu liefern. Doch sollen auc noch einige andere, die Strahlung betreffende Fragen im Fo genden berührt werden.

I. Fluorescenzerregung durch Becquerelstrahlen und Polarisir barkeit derselben.

Eine Reihe von Vorversuchen, die ich mit Becquerelstrahle vornahm, bestätigten wiederum, dass sich dieselben ganz w Röntgenstrahlen verhalten. Dies zeigte sich auch darin, da die von Joachimsthaler Pechblende ausgesandten Strahlen i einer Flussspathplatte Fluorescenz zu erregen vermochte ähnlich wie Winkelmann[4]) dies bei Röntgenstrahlen zuer nachgewiesen hat.

Dazu wurde ein Blatt sehr empfindlichen Bromsilbe papiers (Negativpapier von Moh) mit der Schichtseite auf ein grosse Flussspathplatte gelegt. Auf die Rückseite des Papier legte ich ein Stück Joachimsthaler Pechblende so, dass es

---

1) G. C. Schmidt, Wied. Ann. 65. p. 141. 1898.
2) P. Curie, Mme Curie et Bémont, Compt. rend. 127. p. 1215. 1898.
3) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 66. p. 735. 1898.
4) A. Winkelmann, Wied. Ann. 59. p. 324. 1896.

twas über den Rand der unter dem Papier liegenden Platte inausragte. Nach 45 Stunden Belichtung zeigte sich dort, ro die Bromsilberschicht dem Flussspath aufgelegen hatte, ine sehr viel intensivere photographische Wirkung, als da, ro dies nicht der Fall gewesen war; es hob sich infolge essen die Contour der Platte deutlich auf dem Bilde ab.

Liess man die Strahlen der Pechblende auf der Rück-eite des Papiers durch die Schicht desselben hindurch auf ie Bromsilberschicht wirken, während diese dem Flussspath uflag, so erhielt man schon nach sechs Stunden (bei gleicher ntwickelungsdauer) die nämliche Schwärzung, wie in 24 Stunden, enn die empfindliche Schicht nur einer Glasplatte auflag.

In einer seiner ersten Abhandlungen über Uranstrahlen atte Becquerel[1]) auf photographischem Wege eine Polarisa-ion der Uranstrahlen nachgewiesen. Nachdem G. C. Schmidt[2]) ezeigt, dass ihm eine Polarisation bei Thorstrahlen nicht ge-ungen und auch Rutherford[3]) dieselbe nicht bei Uranstrahlen halten, berichtete Becquerel[4]), dass spätere Versuche, die sowohl mit Uran- als Radiumpräparaten ausgeführt habe, enfalls erfolglos verlaufen seien. Er schliesst daraus auf n verschiedenes dichroïtisches Verhalten der Turmalinplatten, e zur Verwendung kommen. Jch habe den Versuch *viermal*, lesmal mit ganz verschiedenen Plattencombinationen, *ohne len Erfolg* wiederholt. Ich möchte demnach doch annehmen, ss Becquerelstrahlen überhaupt nicht polarisirbar seien und ss es nicht an einer abweichenden Beschaffenheit mancher rmaline liegen kann, wenn der Versuch nicht gelingt. brigens giebt Becquerel nicht an, ob er später andere rmalinplatten verwandt habe, wie bei seinen ersten Ver-chen.

II. Einfluss der Temperatur auf die Strahlungsintensität.

A. Untersuchte Substanzen.

Zur Verwendung kamen als strahlengebende Substanzen nächst zwei tiefschwarze, sehr reine Stücke von Joachims-

1) H. Becquerel, Compt. rend. **122.** p. 767. 1896.
2) G. C. Schmidt, Wied. Ann. **65.** p. 141. 1868.
3) E. Rutherford, Phil. Mag. **47.** p. 109. 1898.
4) H. Becquerel, Compt. rend. **128.** p. 771. 1899.

thaler Uranpecherz, das eine 96,5 g, das andere 125 g schwer; diese Stücke sollen im Folgenden als Stein I und II bezeichnet werden. Stein III ist ein unreines, von Ganggestein durchsetztes Stück Joachimsthaler Pechblende.

Stein IV hat eine Masse von 38 g, Stein V von 30 g, Stein VI von 26 g. Diese drei letztgenannten Stücke sind weniger glänzend, mehr grauschwarz; ihr Fundort ist unbekannt. Einen Theil dieses Materials verdanke ich den Herren Prof. Dr. Liebisch und Dr. v. Braun in Göttingen, denen ich hiermit verbindlichst danke, ebenso Hrn. Dr. Goldschmidt in Essen, der mir ein 24 g schweres Stück von Uranmetall gütigst zur Verfügung stellte, welches Moissan in Paris in einem elektrischen Ofen durch Reduction von Uranoxyd mit Knochenkohle hergestellt hat. Diese Darstellung gestattet die Annahme, dass das Uranmetallstück keine Spur der Curie'schen Substanzen mehr enthält, welche schon bei viel niedrigeren Temperaturen, als sie im elektrischen Ofen auftreten, flüchtig sind.

Eine Substanz, die in weit höherem Maasse radioactiv sich zeigte, als das wirksamste Uranpecherz, wurde dadurch erhalten, dass in einem Tiegel ein nicht zu grosses Quantum möglichst sorgfältig gepulverten Pecherzes geglüht wurde, während der Tiegel sorgfältig mit einem Metallschälchen bedeckt war, welches Wasser enthielt und folglich keine höhere Temperatur als 100° annahm.

Es setzte sich dann an der Deckfläche eine bald schwarzbraune, bald mehr gelbliche oder röthliche Substanz an, die sehr radioactiv war und offenbar eine oder beide der Curie'schen Substanzen (Polonium, Radium) enthielt. Wir wollen im Folgenden diese Substanz mit dem Namen „*X*-Sublimat" bezeichnen.

Die Intensitäten der von diesen drei Substanzen, Uranmetall, Joachimsthaler Pechblende, *X*-Sublimat, ausgehenden Strahlungen wurden gemessen und verhielten sich wie 1 : 8,47 : 52,24.

Ich möchte hierbei bemerken, dass es keineswegs allein die Joachimsthaler Pechblende ist, welche diese radioactiven Substanzen liefert. Auch die Schneeberger und eine andere Pechblende unbekannter Herkunft (der die Stücke IV—VI

angehören) gaben das „*X*-Sublimat", wenn auch nicht so rein, sondern namentlich mit arseniger Säure vermengt.

B. Methode der Messung.

Zur Untersuchung der Intensität der Becquerelstrahlung und der Beeinflussung derselben durch Temperaturveränderungen der strahlenden Substanz wurde die Entladungsmethode verwandt. Dabei wurde die Zeit gemessen, welche verfloss, bis die Blättchen des Elektroskopes um zwei bez. einen Theilstrich einer willkürlichen Scala unter dem Einflusse der Strahlung zusammengingen. Dieser Entladungsvorgang wird bekanntlich durch eine Ionisirung der Gasart erklärt, in welcher die Strahlung stattfindet.

Zur Verwendung kam ein Goldblattelektroskop *E* mit nur 12 mm langen und 1,8 mm breiten Blättchen, welche an einem dünnen Drahte sitzen, der oben in ein kleines Kügelchen von nur 3 mm Durchmesser endet. Der obere Theil des Drahtes ist horizontal zur Seite gebogen. Das Ganze sitzt in einem Metallgehäuse *H*, dessen Deckel eine über dem Kügelchen befindliche Oeffnung *O* von 15 mm Durchmesser besitzt und unten mit zwei seitlichen, diametral angebrachten Löchern O_1 zur Beobachtung der Blättchen versehen ist. Das Instrument hat nur geringe Capacität, allerdings ist auch die Eigenentladung desselben verhältnissmässig erheblich. Dicht hinter einer der seitlichen Oeffnungen steht eine Mattscheibe mit einer aus verticalen Theilstrichen bestehenden Scala; vor die andere Oeffnung ist in einiger Entfernung eine Linse gestellt zur genauen Beobachtung der dadurch vergrösserten Blättchen und der Scalenstriche. Um eine Parallaxe zu vermeiden, wird durch einen wenige Centimeter vor der Loupe stehenden Diopter gesehen. Geladen wurde das Elektroskop durch eine Zambonisäule.

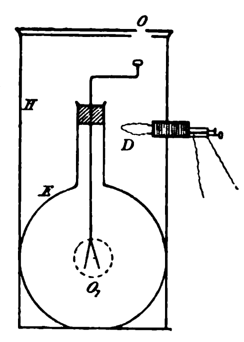


Fig. 1.

Auf die Oeffnung, welche durch eine aufgesetzte, mit einem Loche versehene Bleischeibe noch verkleinert werden konnte, wurde die strahlende Substanz stets mit derselben

Fläche gelegt. Die Entladungszeiten wurden in Secunden notirt, wobei zur Messung bei grösseren Zeiträumen die Taschenuhr, bei kürzeren ein Secundenpendel benutzt wurde, das hörbar die Secunden angiebt.

Den von den Herren Elster und Geitel[1]) zuerst angegebenen, bei Versuchen mit Becquerelstrahlen gewöhnlich gebrauchten Apparat, bei welchem die strahlengebende Substanz auf die untere zweier Platten in pulverförmigem Zustande gebracht wird, während die obere mit einem Elektrometer verbunden ist, glaubte ich bei meinen Versuchen nicht verwenden zu können. Einmal durfte ich manche der mir zur Verfügung stehenden Substanzen nicht pulverisiren, dann aber schien mir die Oberfläche eines pulverförmigen Materiales viel zu variabel zu sein und von zu vielen Nebenumständen abzuhängen, als dass sie für vergleichende Messungen hätte wünschenswerth sein können.

Vor allem aber hätte eine Erwärmung bez. Abkühlung der unteren Platte eine Convection der ionisirten Luft nach oben bez. unten zur Folge gehabt, welche eine Beschleunigung oder Verzögerung der Entladung mit sich gebracht hätte, derart, dass man kein rechtes Urtheil über den Einfluss der thermischen Variation hätte gewinnen können. Bei meiner Anordnung zeigt aber eine infolge von Erwärmung der strahlenden Substanz auftretende Beschleunigung der Entladung, oder eine Verlangsamung derselben bei Abkühlung an, dass *trotz der Convection* eine wirkliche Variation des Strahlungsvermögens eintritt.

C. Eigenentladung und Correction der zu beobachteten Zeiten.

Die schon vorher erwähnte Selbstentladung des Elektroskopes musste bei den beobachteten Entladungszeiten selbstredend mit in Rechnung gezogen werden, um die wirklichen, der Strahlung allein zukommenden Zeitwerthe zu ermitteln. Bezeichnet a die Zeit der Eigenentladung des Instrumentes, t die beobachtete Entladungszeit unter dem Einfluss der Strahlung,

---

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **44.** p. 722. 1891.

so ist die allein den Becquerelstrahlen zukommende Entladungszeit x durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \frac{1}{t},$$

mithin ist

$$x = t \cdot \frac{a}{a - t}.$$

Vermittelst dieser Formel wurden im Folgenden die beobachteten Zeiten sämmtlich umgerechnet. Die Zeit a der Eigenentladung des Elektroskopes wurde durch zahlreiche Versuche für trockenes und feuchtes Wetter bestimmt. — Um auch zu erfahren, ob dieselbe durch Temperaturdifferenzen in dem Luftraum alterirt wurde, in dem sich die Strahlung geltend macht, wurde unterhalb des Elektroskopkügelchens eine feine Platinspirale (Fig. 1, *D*) in das Gehäuse eingeführt, welche zu einem Ringe gebogen war. Durch diese Spirale wurde der Strom eines Bunsenelementes geleitet. Infolge der Erwärmung des Drahtes trat auch oberhalb des Knopfes Erwärmung der Luft ein, die in der Strecke zwischen dem Knopf und der über ihm liegenden Deckelöffnung 35—43° betrug. Die Zeiten der Eigenentladung sind für diese Fälle aus folgender Tabelle ersichtlich.

	trockene Luft		feuchte Luft
t	20°	55—63°	20°
3	615	619	600
2	350	358	330
1	—	—	—

In dieser und allen folgenden Tabellen bedeuten die Zahlen in der Reihe mit t die Temperaturen, in der Columne vor dem Verticalstrich stehen die Scalentheile, rechts davon die Entladungszeiten in Secunden.

Es zeigt sich somit, dass bei einer Erwärmung des Strahlungsraumes keine wesentliche Aenderung der Eigenentladung eintritt. Auch bei feuchtem Wetter ist der Einfluss desselben auf die Eigenentladung nicht erheblich.

D. Erwärmung und Abkühlung der strahlenden Substanzen.

Die untersuchten Stücke von Uranpecherz wurden, nachdem ihr Verhalten bei Zimmertemperatur beobachtet worden

war, in einem Trockenschranke erwärmt; ein das Stück jedesmal berührendes Thermometer zeigte wohl mit ziemlicher Sicherheit die Temperatur, bis zu welcher das Pecherzstück erwärmt worden war. Dasselbe wurde dann mit Watte bedeckt auf die Elektroskophülle über die Oeffnung gelegt und zwar stets mit der nämlichen Fläche. Die Stücke III—IV wurden ausserdem in einem Gasgebläse bis zum Rothglühen erhitzt und dann hinsichtlich ihrer Strahlungsfähigkeit beobachtet. Jeder weiteren Beobachtung ging ein erneutes Glühen des Stückes voraus.

Das Uranmetallstück wurde in ein weites Reagenzrohr gebracht, in welches gleichzeitig ein Thermometer hineingesteckt war; das Reagenzrohr wurde dann in heisses Oel getaucht und gewartet bis das Thermometer die gewünschte Temperatur anzeigte. Darauf wurde das Uranstück mit Watte überdeckt auf die Elektroskopöffnung gelegt.

Um die Erwärmung des *X*-Sublimats vornehmen zu können, wurde ein röhrenförmiges, 20 cm langes und 3,5 cm breites, unten geschlossenes Gefäss aus Weissblech benutzt, welches unten mit etwas übergreifendem Rande auf einen Tiegel passte. So wurde auf die äussere Bodenfläche ein Ueberzug von *X*-Sublimat niedergeschlagen. Zur Erwärmung wurde heisses Oel in das Gefäss gegossen. Die strahlende Fläche erhielt auf diese Weise (vielleicht bis auf eine geringe Differenz) die Temperatur des Oeles.

Zur Abkühlung wurde für das Pecherz ein cylindrisches Metallgefäss construirt, 20 cm im Durchmesser und 15 cm hoch, in dessen Mitte ein kleineres, nur 6 cm im Durchmesser haltendes, und 5 cm hohes Gefäss *a* eingefügt war. Durch den Deckel desselben ging ein Toluolthermometer für tiefe Temperaturen hindurch. Im Boden dieser inneren Zelle befand sich eine 2 cm grosse Oeffnung *o*, durch welche die Strahlung hinaustreten konnte. In der Zelle wurde ein Stück Pechblende nebst einem Stück Chlorcalcium untergebracht; die Bodenöffnung wurde über die Oeffnung der Elektroskophülle gestellt.

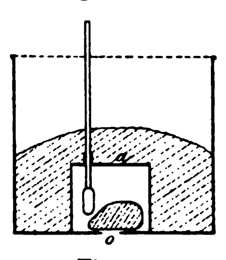


Fig. 2.

Die Abkühlung wurde zunächst durch eine Kältemischung

salz und Eis, dann durch feste Kohlensäure besorgt, er die innere Zelle umgeben wurde.

ein Beschlagen der strahlenden Fläche thunlichst zu 1, wurde bei der Abkühlung mit fester Kohlensäure, er die Temperatur des Uranpecherzes auf —53 bis ık, der ganze Apparat in einen Glaskasten (kleiner estellt, dieser überall möglichst luftdicht gemacht. sste eine Oeffnung zum Durchstecken der Hand gerden, die indessen durch eine doppelte Sammetdecke hlossen und jedesmal nur wenige Secunden geöffnet n dem Glaskasten befanden sich vier grosse, flache mit Schwefelsäure, auch das Kühlgefäss mit der le stand stets auf einer solchen; sie wurde nur auf Zeit von derselben abgehoben, während sie zur Strahachtung über das Elektroskop gesetzt wurde. —

die Strahlungsversuche mit abge- Uranmetall und X-Sublimat wurde zur Verhütung eines Beschlagens lenden Fläche folgende Einrichtung In ein grosses cylindrisches Stand- 1 Glas G wurde das Elektroskop E Glasfuss F gesetzt, welcher von äure S umflossen war (vgl. Fig. 3). Oeffnung des Standgefässes wurde B von Gummizeug gebunden; in ren durch zwei Löcher hineingesteckt falls fest und luftdicht eingebunden, ne dickere Glasröhre R, in welche Uranmetall eingekittet war, sodass ne, metallische Oberfläche U unten te, zweitens eine ganz dünne Glas- in die ein mit zwei Kügelchen Platindraht eingeschmolzen war, zur les Elektroskopes bestimmt.

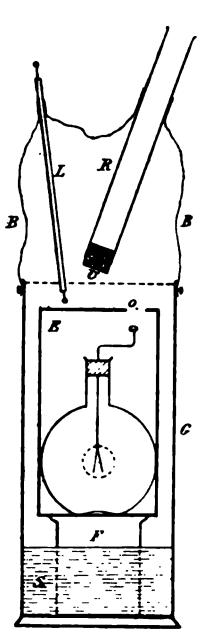


Fig. 3.

der Uranröhre wurde das oben er- öhrenförmige Metallgefäss in den :k eingefügt, als es sich um Abkühlungsversuche des ates handelte, welches ja als Niederschlag auf der Bodenfläche sich befand. In dieses Metallrohr, bez.

in die Glasröhre mit dem eingekitteten Uranmetall wurde feste Kohlensäure hineingestopft — bei der *X*-Sublimatuntersuchung noch mit Aether vermischt — sodass die Temperatur hier bis auf —80° sank. Vorher wurde jedoch der Apparat jedesmal 48 Stunden stehen gelassen, ehe er zur Messung gebraucht wurde. Es konnte dann auf ein völliges Trockenwerden der Luft gerechnet werden.

E. Messungsresultate.

1. Uranpecherz.

Die einzelnen Stücke wurden stets bei Zimmertemperatur (17—21°) untersucht, dann erwärmt beobachtet und wiederum erkalten gelassen, wobei oft mehrere Tage zwischen Erwärmung und darauffolgender Wiederabkühlung lagen. Die hier mitgetheilten Zahlen sind Mittelwerthe aus einer ganzen Reihe von gewöhnlich sehr gut untereinander stimmenden Zahlen. Bei der Erwärmung der Pechblende auf 110—130° wurde meist ein leichter Geruch nach schwefliger Säure bemerkt; derselbe steigerte sich zunächst beim Glühen der Steine erheblich, wobei dann ausserdem meist noch eine durch ihren Knoblauchsgeruch sich verrathende Ausscheidung von arseniger Säure auftrat. Nach längerem Glühen verschwand beides.

a) Erwärmungen.

	Stein I.			Stein II.			Stein III.					
t	20°	110°	18°	20°	110°	20°	20°	130°	glühend			
3	63	53	60	57	51	58	100	79	99	105	119	108
2	36	32	34	32	29	31	58	44	57	62	77	64
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Stein IV.

t	20°	135°	glühend		20°	glühend	20°
3	101	88	188	181	142	162	90
2	52	45	104	104	75	80	51
1	—	—	—	—	—	—	—

Stein V.

t	17°	120°	16°	glühend			
3	92	89	91	181	206	213	254
2	58	44	49	88	104	111	149
1	—	—	—	—	—	—	—

Stein VI.

t	19°	20°	glüh.	20°	glüh.	21°	glüh.	20°	glüh.	20°	glüh.	20°
3	162	163	169	159	174	167	182	167	189	191	223	166
2	93	93	99	86	91	88	100	87	97	101	113	89
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

b) Abkühlungen.

Stein I.

t	+19°	−15°	−16°	−16,5°	−17°	−17°	+20°
3	60	64	66	65	69	76	67
2	34	40	39	77	38	52	40
1	—	—	—	—	—	—	—

Stein II.

t	15°	15°	−53°	−61°	−58°	−53°	15°	15°	−57°	−65°	−66°
3	122	124	235	220	215	195	109	128	173	169	160
2	69	71	120	126	121	115	60	77	100	95	91
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Für diese letzte Beobachtungsreihe ist zu bemerken, dass dabei die Entfernung der strahlenden Fläche vom Elektroskopkügelchen grösser war als bei der ersten (Stein I).

Fassen wir die in den obenstehenden Tabellen zum Ausdruck kommenden Erscheinungen zusammen, so ist folgendes hervorzuheben: Bei tieferen Temperaturen (−60°) findet eine auffällige Verminderung der Strahlungswirkung statt. Bei darauffolgender Erwärmung auf normale Temperaturen (+20°) erhebt sie sich wieder auf ihre alte Intensität. Findet eine abermalige Steigerung um etwa 80—100° statt, so pflegt eine Erhöhung der Strahlungsfähigkeit einzutreten. Dieselbe sinkt aber bei einer Steigerung der Temperatur bis zum Rothglühen

nicht allein auf die alte Grösse, sondern oft noch wesentlich weiter. Angesichts der Curie'schen Entdeckung lässt sich vermuthen, dass beim Glühen der Pechblende eine Ausscheidung der so viel radioactiveren Substanzen eintritt und hierauf das Herabgehen der Strahlungsfähigkeit beruht.

c) Convectionseinflüsse bei der Strahlung der Pechblende.

Durch die Erwärmung der strahlenden Substanzen muss eine Convection der ionisirten Luft nach oben hin zu Stande kommen, welche eine Verlangsamung der Strahlungswirkung zur Folge haben muss. Um über dieselbe wenigstens bis zu einem gewissen Grade ein Urtheil zu gewinnen, wurde durch die oben erwähnte Platinschlinge (*D*, Fig. 1) wiederum ein Strom geleitet, während gleichzeitig eine Entladung durch die Strahlen der Plechblende vorgenommen wurde.

Die Erwärmung der Luft im Strahlungsraume betrug ca. 40°. Dieser aufsteigende warme Luftstrom brachte dann freilich bei längerer Bestrahlungszeit ein Erwärmen der strahlenden Fläche zu wege, ein Umstand, der möglicherweise seinerseits wieder eine beschleunigte Strahlung zur Folge haben konnte, die der Convectionswirkung wieder entgegen wirken mochte. Andererseits könnte auch nach längerer Zeit im Elektroskopgehäuse ein Ausgleich der Temperatur und damit ein Aufhören der Convection auftreten.

Stein I.

t	20°	63° mit Convection											
3	60	70	67	68	65	64	62	61	61	62	64	63	62
2	35	40	38	38	37	36	33	33	34	33	34	36	35
1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Stein II.

t	20°	59° mit Convection		
3	55	69	64	63
2	27	35	36	35
1	—	—	—	—

Es tritt also zunächst beim Einsetzen der Convection eine *deutliche Verzögerung* ein. — Allmählich geht dieselbe

aber zurück, theils weil die Convection geringer wird, theils auch wegen eintretender Erwärmung der strahlenden Fläche, obschon dieser letztgenannte Einfluss nicht erheblich sein kann.

2. Uranmetall.

a) Erwärmung.

Da die 15 mm im Durchmesser haltende Oeffnung im Elektroskopgehäuse als zu gross für das Uranmetallstück sich erwies, wurde eine Bleiplatte mit einer nur 7,5 mm grossen Oeffnnng daraufgelegt. Wegen der grösseren Bestrahlungszeit boten die Beobachtungen hier eine gewisse Unsicherheit dar, obschon nur die Entladung um einem Theilstrich (3—2) in Betracht gezogen wurde. Folgende Tabelle giebt die beobachteten Zeiten zweier Versuchsreihen, I nicht corrigirt, II corrigirt.

	I direct beobachtet				II		I corrigirt				II	
t	15°	120°	130°	150°	20°	150°	15°	120°	130°	150°	20°	150°
3	153	120	130	137	180	178	361	218	254	274	558	514
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Es lässt sich aus diesen Zahlen eine ganz sichere Vermehrung der Strahlungswirkung zwar nicht entnehmen, doch glaube ich mich ohne weiteres nicht zu dem Schlusse berechtigt, dass bei dem regulinischen Uran infolge der Erwärmung eine solche nicht einträte. Man könnte sich vorstellen, dass bei den langen Entladungszeiten eine Convection der erwärmten, ionisirten Luft sich besonders fühlbar macht und die etwaige Erhöhung der Strahlung ausgleicht. — Bei den Versuchen mit Uranpecherz wurde ja dieser Convectionseinfluss thatsächlich gefunden. Die entsprechenden Versuche mit Uranmetall zeigten keine Verlangsamung durch Convection. Es scheint eben bei der verhältnissmässig grossen Dauer der Entladung eine so complicirte Wechselwirkung zwischen Convection, Erwärmung der strahlenden Fläche und Eigenentladung des Instrumentes aufzutreten, dass eine sichere Beurtheilung der Erscheinungen einstweilen nicht möglich wird. Indessen möchte ich doch aus dem Umstande, dass 1. eine Zunahme der Entladungszeit bei der Strahlung des erwärmten Uranmetalles nie wahrgenommen wurde, 2. eine deutliche Verlang-

samung der Entladung infolge künstlich eingeleiteter Convection sich bei Uranpecherz zeigt, den Schluss *nicht für unberechtigt* erachten, dass auch bei Uranmetall eine, wenn auch nicht erhebliche Erhöhung der Strahlungswirkung bei gesteigerter Temperatur des Metalles auftritt.

b) Abkühlung.

Hier wurde ebenfalls nur die Entladungszeit um einen Scalentheil (3—2) beobachtet. Die Temperatur der strahlenden Fläche lässt sich nicht bestimmen; doch mag sie, da die feste Kohlensäure im Gefässe die Temperatur von -62° besass, immerhin auf etwa -50° geschätzt werden.

t	19°	circa -50					
3	615	677	660	657	502	677	758
2	—	—	—	—	—	—	—

Es tritt zunächst eine, wenn auch nicht sehr erhebliche Verzögerung auf, die wohl sicher der Abkühlung zuzuschreiben ist, dann infolge gesteigerter Convection (nach unten) ein Ausgleich zwischen Convectionsbeschleunigung und Strahlungsverminderung, endlich nach Aufhören (bez. Abnahme) der Convection eine wieder hervortretende Verlangsamung.

3. *X*-Sublimat.

a) Erwärmung.

t	21°	125°	118°	100°	96°
3	52	46	47	44	49
2	33	30	28	27	31
1	—	—	—	—	—

Diese Zahlen wurden bei Anwendung der engen Oeffnung (7,5 mm) beobachtet. Bei Anwendung der weiten Oeffnung (15 mm) konnte nur die Entladung um das Intervall von zwei Scalentheilen (3—1) beobachtet werden. Bei 21° vollzog sich diese Entladung in 11,2 sec. Bei einer Erwärmung der strahlen-Fläche auf 100° vollzog sich die Entladung schon in 10 sec. Es nimmt also in beiden Fällen die Intensität um *9—10 Proc. zu.* Allerdings ist hierbei die Convectionsverzögerung nicht berücksichtigt. Um von dem Einflusse derselben auch hier

ein Bild zu erhalten, wurde wieder die oben erwähnte stromdurchflossene Platinspirale benutzt. Die Erwärmung im Strahlungsraum betrug im Mittel 33°.

Anfangs trat Zunahme der Entladungszeit ein. Durch Abnahme der Convection und auch durch Erwärmung der strahlenden Fläche geht diese Verlangsamung wieder zurück. Wurde in das Gefäss (dessen äussere Bodenseite den radioactiven Niederschlag trägt) eine genügende Menge Wasser von Zimmertemperatur gegossen, sodass eine Erwärmung seitens des aufsteigenden, warmen Luftstromes ausgeschlossen war, so blieb die Verzögerung fast constant.

t	21°	Convection 54°			Conv. + 54°, strahl. Fläche + 21°				
3	46	57	50	49	55	55	55	53	55
2	27	32	28	29	32	29	29	29	29
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—

b) Abkühlung.

t	20°	– 81 bis – 76°						
3	46	59	57	59	56	53	46	42
2	25	34	33	33	32	30	28	27
1	—	—	—	—	—	—	—	—

Eine deutliche, anfängliche Verzögerung wird durch fortschreitende Convection ausgeglichen.

F. Kurze Uebersicht der beobachteten Erscheinungen.

Bei *Uranpecherz* tritt ein Einfluss der Temperatur auf die Strahlung besonders deutlich hervor. Bei Abkühlung auf – 50 bis – 60° eine Verminderung der Strahlung, bei Erwärmung auf Temperaturen von 100°—130 eine Erhöhung der Intensität. Ein Rothglühen der Substanz bringt ein erhebliches Zurückgehen der Strahlung mit sich. Hierbei treten augenscheinliche, chemische Zersetzungen auf.

Uranmetall zeigt zwar auch eine Abnahme der Strahlung bei tieferen Temperaturen (– 50°?), eine Erhöhung der Intensitat bei Erwärmung lässt sich nicht ganz sicher beobachten, ist aber unter Berücksichtigung der Convectionswirkungen nicht unwahrscheinlich.

Bei dem *X-Sublimat* tritt die nämliche Temperaturbeeinflussung auf wie bei dem Uranpecherz.

G. Schlussbemerkungen.

Das Uranpecherz scheint ein Körper zu sein, dessen Molecüle die Atome des Urans, der Curie'schen Elemente (?) des Sauerstoffes und anderer in wahrscheinlich instabiler Verbindung enthält. Die langsame Umwandlung in einen stabileren Zustand ist Quelle der Strahlungsenergie. Durch thermische Variation wird dieser Umwandlungsprocess beeinflusst.

Vielleicht kann dies Verhalten mit dem der bekannten Balmain'schen Leuchtfarbe und sonstiger verwandter Substanzen verglichen werden, deren Phosphorescenz durch eine ähnliche Annahme erklärt wird. Auch hier ist eine deutliche Beeinflussung der Strahlung durch die Temperatur zu bemerken (Thermoluminescenz), d. h. eine Erhöhung der Intensität der Strahlung durch Erwärmung (schon durch die Hand), Abnahme durch Abkühlung, völliger Erlöschung bei sehr niedrigen Temperaturen (flüssige Luft). Gleichgültig ist es für diese Analogie mit dem Verhalten der Pechblende, ob der instabile Zustand schon lange Zeiten hindurch bestanden hat (wie beim Uranpecherz) oder erst durch Belichtung hervorgerufen wird, wie bei der Leuchtfarbe, und dann verhältnissmässig schnell unter Abgabe von Strahlungsenergie rückgängig gemacht wird.

Beim Uranpecherz, welches doch seit langen Zeiträumen im Schosse der Erde geruht hat, scheint es freilich schwer begreiflich, dass der stabile Zustand noch immer nicht eingetreten ist.

Das Ehepaar Curie[1]), sowie die Herren Elster und Geitel[2]) sind der Ansicht, dass bei der Becquerelstrahlung *kein Chemismus* mitspiele, sondern dass sie, weil eben die Strahlungsfähigkeit allen Verbindungen zukomme, eine *Atomeigenschaft* der strahlenden *Elemente* sein müsse. Das *Atom* eines radioactiven Elementes sei nach Art der Molecüle einer instabilen Verbindung gebaut, derart, dass es unter Energieabgabe in einen stabilen Zustand übergehe.

---

1) P. Curie u. Mme Curie, Compt. rend. 127. p. 1225. 1898.

2) J. Elster u. H. Geitel, Jahresber. d. ver. Naturw. Braunschweig. 1899.

Gegen diese Ansicht scheint mir vor allem zu sprechen, dass die Annahme eines instabil gebauten „Atomes“ nicht mit dem Atombegriff als solchem vereinbar sein dürfte. Auch würde es, wenn jeder Chemismus ausgeschlossen wäre, nicht verständlich sein, wie eine Verbindung des Urans, etwa des Urankaliumsulfat, welches nach Elster und Geitel[1]) sogar *sichbare* Strahlen abgiebt, so wesentlich höhere Strahlungsintensität besitzen sollte, wie das metallische Uran selbst, wenn eben *nur* das *Uranatom als solches* Quelle der Strahlungsenergie wäre. Diesem Einwurf begegnet die Annahme, dass derartige Verbindungen eben nicht reine Uranverbindungen seien, sondern neben Uran noch radioactivere Elemente enthielten, etwa Polonium oder Radium und dass auf die Atome dieser Stoffe die erhöhte Strahlung zu schieben wäre.

Hätte man die Strahlung der vier radioactiven Elemente wirklich schon genau untersucht und sie mit der ihrer sämmtlichen Verbindungen verglichen, und hätte es sich dabei ergeben, dass keine der Verbindungen wirksamer wäre als das in ihr enthaltene Element — dann stünden die Chancen für eine Negirung des Chemismus und für die „Atomtheorie“ etwas günstiger. Thatsächlich aber wissen wir noch sehr wenig davon. Nur bei dem einzigen Uranmetall ist bislang die Strahlung beobachtet und diese ist verhältnissmässig gering. Die Elemente Radium und Polonium sind noch nicht dargestellt.

Sollte sich aber das von mir eben präcisirte Untersuchungsresultat wirklich ergeben, so braucht auch dann noch nicht an ein labil gebautes Atom gedacht zu werden.

Immer bliebe noch die Vorstellung (die an Bekanntes anknüpft), dass die Atome der radioactiven Elemente die Fähigkeit besässen, *miteinander und auch mit fremden Atomen zu instabil gebauten Molecülen* zusammmen zu treten. — Ich erinnere an die offenbar labilen Molecüle mancher Allotropien von bekannten Elementen (Schwefel, Selen).

Eine thermische Beeinflussung wäre mit dieser Annahme wohl zu vereinbaren.

Göttingen, August 1899.

3) J. Elster u. H. Geitel, l. c.

(Eingegangen 10. August 1899.)

13. *Magnetisirungszahlen anorganischer Verbindungen; von Stefan Meyer.*[1])

(Hierzu Taf. II.)

Nachdem ich vor kurzem die Susceptibilitätscoefficienten zahlreicher Elemente bestimmt habe[2]), habe ich nun in gleicher Weise mittels der Waage eine Reihe anorganischer Verbindungen in Pulverform untersucht, wobei wieder Quecksilber als Bezugssubstanz diente.

Die angewandte Methode giebt freilich nur vollständig richtige Resultate, solange die Substanzen, welche im Gläschen in das Feld hineinhängen, selbst schwach magnetisch sind und die magnetische Kraftlinienvertheilung nicht wesentlich verändern. Bei stärker magnetischen Körpern wird das Feld wohl etwas geändert, ich habe aber dennoch bei einigen Substanzen, wie den Verbindungen von Erbium, Gadolinium etc. dieselbe Anordnung beibehalten, in der Ueberzeugung, dass die eventuellen uncontrolirbaren Verunreinigungen der Substanzen von weit grösserem Einflusse sein können, als die durch die Versuchsanordnung bedingten Fehler.

Die Susceptibilitätscoefficienten der stark paramagnetischen Verbindungen machen sonach bezüglich ihrer absoluten Grösse keinen Anspruch auf völlige Genauigkeit, doch genügen eben bei diesen Substanzen die Werthe auch ohne diese Exactheit, um ein deutliches Bild ihres magnetischen Wesens zu erhalten.

Bei der Auswahl des Versuchsmateriales habe ich in erster Linie die Oxyde, Sulfide und Halogenverbindungen, d. h. Verbindungen aus bloss zwei Componenten berücksichtigt, dann aber auch complicirtere Salze untersucht. Dieselben wurden zum Theil von Merck-Darmstadt bezogen,

1) In Betreff der von früheren Forschern erhaltenen Resultate, soweit sie nicht citirt sind, sei auf die Elektricitätslehre von G. Wiedemann verwiesen.

2) St. Meyer, Wied. Ann. 68. p. 325. 1899.

theils mir freundlichst von den Herren Prof. F. **Exner**-Wien, Prof. G. **Goldschmiedt**-Prag und Prof. M. **Bamberger**-Wien überlassen. Einige besonders reine Präparate aus der Gruppe der seltenen Erden verdanke ich der Liebenswürdigkeit des Hrn. Prof. B. **Brauner**-Prag, einige Kupferverbindungen Hrn. E. **Murmann**-Wien. In der Zusammenstellung bedeuten in der letzten Rubrik die Anfangsbuchstaben M., E., G., B., Br. und Mu. die Herkunft.

Die folgenden Tabellen enthalten zunächst das gesammte gewonnene Material nach den Elementen, aufsteigend mit dem Atomgewicht, geordnet. In denselben bedeutet μ das Moleculargewicht, g die zur Verwendung gelangte Gewichtsmenge Substanz in Grammen, a die Anzahl von Grammen, die bei gleicher Raumerfüllung auf 1000 cm^3 kämen, n die Zahl der Grammmolecüle im Liter; ferner ist p der direct an der Waage abgelesene Zug in Grammen, $\varkappa$ die Magnetisirungszahl, k der Molecularmagnetismus für ein Grammmolecül, beide letzteren Werthe in absoluten Einheiten, und t die Versuchstemperatur.

Die Feldstärke betrug in allen Fällen rund 10000 (C.G.S.).

Bei Stickstoff, Sauerstoff und den Halogenen sind die Verbindungen nicht unter diesen Elementen, sondern vertheilt bei den zweiten Bestandtheilen eingetragen.

Beifügung eines Sternes * zur Formel besagt, dass die Substanz vor der Messung über Schwefelsäure getrocknet wurde, zwei Sterne ** bedeuten, dass die Verbindung in Form kleiner Kryställchen vorlag. Ein Fragezeichen deutet an, dass vermuthlich Verunreinigungen das Resultat beeinflusst haben.

Substanz	μ	g	a	n	p	$\varkappa . 10^6$	$k . 10^6$	t	Herkunft
Li_2O	20,1	0,795	753	37,5	−0,0120	−0,350	−0,009	20°	M.
$LiCl$*	42,5	1,020	973	22,6	−0,0154	−0,449	−0,020	17	B.
Li_2CO_3	74,0	{0,817	788	10,7	−0,0069	−0,230	−0,022	15	E.
		{0,519	494	6,7	−0,0041	−0,119	−0,018	16	G.
Li_2SO_4*	110,1	1,430	1362	12,4	−0,0164	−0,478	−0,039	15	G.
$Li_2SO_4 + H_2O$**	128,2	1,053	1005	7,8	−0,0114	−0,338	−0,043	17	M.
$LiNO_3$	69,1	1,046	991	14,3	−0,0135	−0,367	−0,026	19	B.

Substanz	μ	g	a	n	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$	t	Herkunft
BeO	25,1	0,242	230	9,2	±0	±0	±0	16°	G.
BeO_2H_2	43,1	0,334	318	7,4	±0	±0	±0	16	G.
$BeCl_2$	79,8	1,020	983	12,3	−0 014	−0,463	−0,038	17	M.
$BeCO_3$ (?)	69,1	0,375	357	5,2	+0,0031	+0,090	+0,017	16	G.
$BeCO_3 . 2BeO$	119,3	0,207	197	1,7	−0,0020	−0,058	−0,035	15	E.[1]
$BeSO_4$*	105,2	0,9475	906	8,6	−0,0108	−0,326	−0,038	18	M.
$BeSO_4 + 4H_2O$**	177,2	0,815	780	4,4	−0,010	−0,314	−0,071	17	M.
B_2O_3	70	1,026	977	14,0	−0,014	−0,418	−0,030	14	G.
B_4Al_2 (?)	98,2	0,776	740	7,5	+0,218	+6,4	+0,86	15	G.
BN	25	0,202	400	16	±0	±0	±0	15	G.
$B(OH)_3$*	62	0,746	710	11,5	−0,010	−0,293	−0,026	16	B.
NaOH*	40,1	1,002	954	28,8	−0,0155	−0,451	−0,019	17	B.
NaFl	42,1	1,415	1285	30,5	−0,015	−0,502	−0,017	21	M.
NaCl**	58,5	1,346	1288	22,0	−0,0174	−0,521	−0,024	19	B.
NaBr**	103	1,424	1356	13,2	−0,0174	−0,506	−0,038	18	B.
NaJ**	150	1,934	1833	12,2	−0,0196	−0,572	−0,047	21	M.
Na_2CO_3	106,1	0,748	716	6,8	−0,0044	−0,132	−0,020	17	M.
$Na_2CO_3 + 10H_2O$**	286,3	0,946	905	3,2	−0,0140	−0,420	−0,133	17	M.
MgO	40,4	0,288	274	6,8	−0,0018	−0,055	−0,008	17	B.
$MgCl_2$	95,3	0,9545	913	9,6	−0,0140	−0,420	−0,044	18	M.
$MgCl_2 + 6H_2O$**	203,3	0,8015	766	3,8	−0,0115	−0,347	−0,092	18	M.
$MgBr_2$**	184,3	1,050	995	5,4	−0,0154	−0,449	−0,083	20	M.
$MgCO_3$	84,4	0,997	950	11,3	−0,013	−0,381	−0,034	15	G.
$MgSO_4$	120,4	0,987	944	7,8	−0,0110	−0,340	−0,043	18	M.
$MgSO_4 + 7H_2O$**	246,5	0,879	840	3,4	−0,010	−0,303	−0,089	20	M.
Al_2O_3	102,2	0,743	708	6,9	−0,0095	−0,279	−0,040	14	M.
$AlCl_3$*	133,2	0,9093	876	6,6	−0,0126	−0,416	−0,063	19	E.
$AlBr_3$	257,0	1,232	1168	4,54	−0,010	−0,289	−0,064	19	M.
Al_2B_4(?)**	98,2	0,776	740	7,5	+0,218	+6,4	+0,86	15	G.
$Al_2(SO_4)_3$	342,5	0,989	946	2,8	−0,012	−0,361	−0,130	18	M.

1) Besonders rein, stammt von Hrn. L. F. Nilson und trägt die Notiz: gereinigt von Krüss.

Substanz	μ	g	a	n	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$	t	Herkunft
SiO_2 [1]	60,3	0,0748	72	1,2	−0,0004	−0,012	−0,01	15	G.
SiO_2 [2]	60,3	1,302	1254	20,8	−0,0012	−0,086	−0,004	15	
SiCu (?)	91,5	0,795	766	8,4	+0,0451	+1,492	+0,178	15	M.
P_2Cu_3	252,8	1,341	2680	10,6	−0,010	−0,50	−0,047	18	Mu.
P_2O_5 [3]	142	0,4359	415	2,9	−0,0051	−0,149	−0,051	18	B.
SCu (?)	95,7	1,706	1631	17,0	+0,3026	+9,07	+0,532	18	M.
		0,930	886	9,3	+0,054	+1,572	+0,170	15	G.
SCu_2	159,3	2,935	2665	16,7	−0.0115	−0,388	−0,023	18	Mu.
S_3As_2	246,2	2,190	2086	8,4	−0,0014	−0,041	−0,005	18	M.
S_2Mo	192,2	0,811	772	4,0	−0,007	−0,205	−0,051	16	B.
		1,470	1400	7,3	−0,0123	−0,361	−0,050	15	G.
SSn (?)	150,6	2,393	2279	15,1	+0,270	+7,85	+0,519	15	G.
		1,268	1208	8,0	+0,0016	+0,227	+0,026	15	M.
SBa	169,4	1,736	1653	9,8	−0,014	−0,410	−0,042	18	B.
SHg	232,4	2,914	2775	12,0	−0,016	−0,465	−0,039	16	G.
KFl	58,2	1,271	1205	20,7	−0,015	−0,437	−0,021	21	M.
KCl	74,6	1,245	1186	15,9	−0,0194	−0,566	−0,035	17	B.
KBr	119,1	1,626	1477	12,4	−0,0155	−0,515	−0,042	18	B.
KJ	166	1,742	1666	10,0	−0,0174	−0,521	−0,052	17	M.
CaO	56	1,287	1226	21,9	−0,0105	−0,310	−0,015	16	B.
$Ca(OH)_2$	74	0,752	716	9,5	−0,0094	−0,275	−0,029	16	B.
$CaFl_2$	78	1,173	1111	14,2	−0,011	−0,320	−0,023	19	M.
$CaCl_2$	110,9	1,240	1184	10,7	−0,0149	−0,442	−0,043	17	M.
$CaCl_2 + 6H_2O$ **	218,9	1,115	1067	4,9	−0,0154	−0,461	−0,094	17	M.
$CaSO_4$	136,1	1,227	1173	8,6	−0,0115	−0,447	−0,052	17	M.
$CaSO_4 + 2H_2O$	172,1	0,836	800	4,7	−0,0094	−0,290	−0,062	17	M.
Sc_2O_3 [4]	136,2	0,081	185	1,4	−0,0001	−0,006	−0,004	17	E.
$Sc(NO_3)_3$ [5]	230	0,03	—	—	±0	±0	±0	21	E.

1) Künstlich. 2) Natürlich.

3) Hier, wie bei einigen anderen hygroskopischen Substanzen wurde das Gläschen mit einem kleinen Korke zugestöpselt und bei der Bestimmung von p der magnetische Werth des Stöpsels entsprechend berücksichtigt.

4) Vgl. St. Meyer, Wied. Ann. **68.** p. 331. 1899.

5) Formel unsicher, die Substanz ist sehr hygroskopisch, wurde aus der vorhergehenden gewonnen.

Substanz	μ	g	a	n	p	$\varkappa . 10^6$	$k . 10^6$	t	Herkunft
TiO_2	80,1	1,000	952	11,9	+ 0,0126	+ 0,37	+ 0,031	15	M.
$Ti_{10}C_2N_8$ (?)	617,3	2,472	2343	3,80	+14,49	+420,9	+117,5	20	B.
V_2O_5	182,4	1,785	1692	9,28	+ 0,055	+ 1,60	+ 0,173	20	B.
VO_3NH_4	117,3	0,821	782	6,7	+ 0,0022	+ 0,064	+ 0,010	15	G.
Cr_2O_3	152,2	1,8115	1725	11,3	+ 1,408	+ 41,0	+ 3,62	17	B.
CrO_4H_2 **	118,1	1,185	1129	9,6	+ 0,0214	+ 0,623	+ 0,065	17	B.
$CrCl_2$	133,0	0,710	685	5,2	+ 0,975	+ 31,8	+ 6,18	19	M.
Cr_2Cl_3	210,6	1,136	1032	4,9	+ 1,0625	+ 35,48	+ 7,24	18	M.
MnO_2	87	2,078	1979	22,6	+ 1,846	+ 53,75	+ 2,38	17	B.
FeO 1)	72	0,612	860	12	+ 157	+6474	+540	17	E.
Fe_2O_3	160	0,542	519	3,2	+ 1,963	+ 56,9	+ 17,6	18	E. 2)
		0,939	890	5,6	+ 4,42	+128,3	+ 23,0	21	M.
$FeSO_4 + 7\,H_2O$	278,1	1,135	1076	3,87	+ 1,60	+ 46,5	+ 12,0	19	M.
Co_2O_3	166	1,563	1482	8,9	+ 2,17	+ 62,9	+ 7,05	21	M.
Co_3O_4	241	2,288	2179	9,0	+ 6,70	+195,0	+ 21,6	15	B.
NiO	74,7	0,691	655	8,8	+ 1,04	+ 30,1	+ 3,44	21	M.
Ni_2O_3 3)	165,4	2,475	2357	14,3	+ 0,763	+ 22,2	+ 1,55	15	B.
CuO (?)	79,6	0,981	934	11,7	+ 0,0986	+ 2,90	+ 0,247	16	M.
Cu_2O (?)	143,2	1,733	1650	11,5	+ 0,0416	+ 1,21	+ 0,105	16	M.
CuS (?)	95,7	1,706	1631	17,0	+ 0,3026	+ 9,07	+ 0,532	18	M.
		0,930	886	9,3	+ 0,054	+ 1,572	+ 0,170	15	G.
Cu_2S	159,3	2,935	2665	16,7	− 0,0115	− 0,388	− 0,023	18	Mu.
CuSi (?)	91,5	0,795	766	8,4	+ 0,0451	+ 1,492	+ 0,178	15	M.
Cu_2Se	206,3	3,393	3082	14,5	− 0,0135	− 0,450	− 0,031	18	Mu.
Cu_3P_2	252,8	1,341	2680	10,6	− 0,010	− 0,50	− 0,047	18	Mu.
$CuCl_2 + H_2O$ (?)	170,5	1,434	1371	8,0	+ 0,2766	+ 8,29	+ 1,031	17	M.
$CuBr_2$ (?)	223,5	2,624	2509	11,2	+ 0,204	+ 6,13	+ 0,546	18	M.

1) Die Messungen in dieser Gruppe sind durch die eingangs erwähnten Mängel der Versuchsanordnung stark beeinflusst, doch haben die Werthe mit Rücksicht auf die Vergleichbarkeit mit den übrigen stark magnetischen Substanzen hier Platz gefunden.

2) Durch starkes Glühen an der Luft aus dem FeO erhalten, welches besonders rein war.

3) Vermuthlich ein Gemenge verschiedener Oxyde.

Substanz	μ	g	a	n	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$	t	Herkunft
$CuCl_2.3CuO + 4H_2O$ (?)	445,3	1,954	1361	4,2	+0,055	+ 1,601	+0,383	18	B.
$CuSO_4$ (?)	159,7	1,336	1272	8,0	+0,222	+ 6,47	+0,81	13	G.
$CuSO_4 + 5H_2O$ (?)	249,7	1,378	1313	5,2	+0,208	+ 6,23	+1,19	18	M.
ZnO	81,4	1,567	1492	18,3	−0,0132	− 0,388	−0,021	16	B.
ZnO_2H_2	99,4	1,326	1269	13,8	−0,0194	− 0,583	−0,042	18	B.
$ZnBr_2$	225,3	2,025	1919	8,52	−0,021	− 0,613	−0,072	19	B.
As_2O_3	198	2,522	2402	12,1	−0,017	− 0,494	−0,042	18	M.
As_2S_3	246,2	2,190	2086	8,4	−0,0014	− 0,041	−0,005	18	M.
$SeCu_2$	206,3	3,393	3082	14,5	−0,0135	− 0,450	−0,031	18	Mu.
SeO_3H_2	129,1	2,098	1998	15,5	−0,019	− 0,55	−0,036	18	B.
$RbCl$	120,6	1,002	1293	10,3	−0,010	− 0,381	−0,037	19	M.
SrO	103,6	1,032	983	9,5	−0,0159	− 0,463	−0,049	18	B.
SrO**	103,6	1,259	1193	11,5	−0,019	− 0,550	−0,048	20	B.
$SrFl_2$	125,6	1,642	1556	12,4	−0,014	− 0,408	−0,033	19	M.
$SrCl_2$	158,5	1,246	1132	7,1	−0,015	− 0,502	−0,070	20	M.
$SrBr_2$	247,5	1,851	1754	7,1	−0,019	− 0,554	−0,078	19	M.
SrJ_2	341,3	1,770	1678	4,92	−0,020	− 0,582	−0,118	19	M.
Y_2O_3	226	1,1796	1137	5,03	+0,1745	+ 5,77	+1,15	15	Br.[1]
		0,303	288	1,28	+0,115	+ 3,34	+2,61	20	B.
YCl_3	195,2	1,189	1146	5,4	+0.5146	+17,02	+3,18	17	M.
$Y_2(CO_3)_3 + 3H_2O$	412	0,393	372	0,90	+0,073	+ 2,70	+3,0	20	B.
ZrO_2	122,4	2,5336	2441	19,9	−0,0020	− 0,066	−0,003	15	Br.[1]
$Zr(NO_3)_4 + 5H_2O$[2]	428,8	1,337	1289	3,0	−0,0064	− 0,211	−0,070	18	E.
		1,405	1354	3,16	−0,0070	− 0,232	−0,073	16	Br.
Nb_2O_5	268	0,1846	613	2,3	−0,0010	− 0,051	−0,022	20	M.
Mo_2O_3**	240	1,455	1386	5,8	−0,0076	− 0,39	−0,067	16	G.
MoO_4H_2**	162	1,249	1190	7,3	−0,0004	− 0,012	−0,002	14	G.
MoS_2	192,2	0,811	772	4,0	−0,007	− 0,205	−0,051	16	B.
		1,470	1400	7,3	−0,0123	− 0,361	−0,050	15	G.

1) Vor der Messung im Platintiegel frisch geglüht.

2) Die Formel ist nicht ganz sichergestellt.

Substanz	μ	g	a	n	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$	t	Herkunft
AgCl**	143,4	2,462	2345	16,4	−0,0226	−0,658	−0,040	17	B.
AgBr	187,5	2,444	2355	12,6	−0,0184	−0,610	−0,049	19	E.
AgJ	234,8	2,651	2512	10,7	−0,0260	−0,726	−0,068	19	M.
CdO	128	2,881	2791	21,8	−0,023	−0,670	−0,031	15	B.
$CdCl_2$	182,9	3,180	3040	16,6	−0,0254	−0,761	−0,046	18	E.
$CdBr_2$	271,9	1,912	1828	6,7	−0,0184	−0,552	−0,082	18	E.
CdJ_2	365,7	2,884	2758	7,5	−0,0896	−0,675	−0,090	18	E.
$InCl_3$	219,8	0,8660	990	4,5	−0,0084	−0,310	−0,069	18	M.
In_2S_3	324,2	0,136	530	1,64	−0,0014	−0,080	−0,049	20	B.
SnO	134,5	1,813	1727	12,9	−0,0054	−0,158	−0,012	17	M.
SnO_2	150,5	2,083	1984	13,2	−0,0028	−0,082	−0,006	15	G.
Sn_2O_3	285	2,411	2296	8,1	−0,0214	−0,614	−0,076	16	G.
SnS (?)	150,6	2,393	2279	15,1	+0,270	+7,85	+0,519	15	G.
		1,268	1208	8,0	+0,0016	+0,227	+0,026	15	M.
$SnCl_2$	189,4	1,217	1159	6,1	−0,0114	−0,334	−0,055	18	B.
SnJ_2**	372,2	1,726	1644	4,4	−0,006	−0,176	−0,040	15	G.
$SnSO_4$	214,6	2,080	1989	9,3	−0,0154	−0,461	−0,050	18	M.
Sb_2O_3	288	2,412	2297	8,0	−0,0114	−0,334	−0,042	14	B.
TeO_2	159	1,737	2069	13,0	−0,0064	−0,230	−0,018	18	B.
TeO_3 (?)	175	1,207	1150	6,6	+0,058	+1,679	+0,256	17	G.
TeO_3H_2	177	2,813	2679	15,1	−0,0174	−0,506	−0,034	15	G.
TeO_4H_2	193	1,962	1876	9,7	−0,0214	−0,642	−0,066	18	B.
CsCl	165,5	1,744	1680	10,0	−0,014	−0,47	−0,047	17	M.
$Cs_2(SO_4) + Al_2(SO_4)_3$*	704,6	1,331	1268	1,80	−0,0174	−0,506	−0,281	15	G.
$Cs_2(SO_4) + Al_2(SO_4)_3 + 24\,H_2O$**	1137,1	1,084	1032	0,91	−0,0138	−0,404	−0,444	14	G.
BaO	153,4	2,515	2285	14,9	−0,008	−0,236	−0,016	20	M.
BaO_2 (?)	169,4	1,297	1235	7,3	+0,0086	+0,252	+0,035	18	B.
		1,6745	1601	9,45	+0,009	+0,270	+0,029	18	M.
$Ba(OH)_2$	171,4	1,536	1470	8,58	−0,0120	−0,361	−0,042	18	M.
$BaFl_2$	175,4	2,183	2070	11,8	−0,009	−0,260	−0,022	19	M.
$BaCl_2$*	208,3	2,140	2046	9,8	−0,0217	−0,643	−0,066	17	M.
$BaCl_2 + 2H_2O$**	244,3	1,910	1826	7,1	−0,0184	−0,552	−0,078	17	M.

Substanz	μ	g	a	n	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$	t	Herkunft
$BaBr_2$*	297,3	2,191	2077	7,0	−0,0220	− 0,638	−0,091	20	M.
$BaJ_2 + 2H_2O$**	427,1	2,273	2154	5,04	−0,022	− 0,638	−0,127	19	M.
BaS	169,4	1,736	1653	9,8	−0,014	− 0,410	−0,042	18	B.
La_2O_3	324,4	1,027 1,024	1447 1443	4,5 4,4	+0,0024 +0,0027	+ 0,098 + 0,111	+0,022 +0,025	15	Br.[1]
$LaCl_3$*	244,4	1,278	1231	5,0	+0,1626	+ 5,38	+1,07	15	E.
$La(NO_3)_3 + 2(NH_4)NO_3$*	466,3	1,3156	1268	2,7	−0,009	− 0,297	−0,108	15	E.[2]
CeO_2	172	1,760	1700	9,9	+0,0034	+ 0,113	+0,011	15	Br.
$CeCl_3$*	246,2	1,1174	1077	4,4	+0,1573	+ 5,20	+1,19	19	M.
$Ce_2(CO_3)_3$*	460	0,750	714	1,6	+0,175	+ 5,10	+3,28	15	G.
$Ce(CO_3)_2$	260	1,072	1016	3,9	+0,094	+ 2,73	+0,698	20	B.
$Ce_2(SO_4)_3$	568,3	1,252	1187	2,1	+0,264	+ 7,68	+3,68	20	B.
$Ce(NO_3)_3 + 2(NH_4)NO_3$*	468,3	1,345	1296	2,8	+0,1296	+ 4,28	+1,53	16	E.
Pr_4O_7	672	1,3682	1319	1,96	+0,512	+16,95	+8,64	15	Br.[3]
$PrCl_3$	246,4	0,226	697	2,83	+0,194	+ 9,52	+3,36	19	E.[4]
Nd_2O_3	336	0,302	524	1,56	+0,2911	+13,88	+8,9	16	Br.[5]
$Nd(NO_3)_3 + 2(NH_4)NO_3$*	490,4	1,3205	1199	2,45	+0,3125	+10,43	+4,27	18	E.[6]
$Nd(NO_3)_3 + 2(NH_4)NO_3 + 4H_2O$**	562,4	1,166	1059	1,88	+0,220	+ 7,345	+3,90	18	E.[6]
$DiCl_3$*	248,3	1,395	1344	5,4	+0,331	+10,93	+2,02	15	M.[7]

1) Die zweite Angabe bezieht sich auf unmittelbar vor der Messung nochmals im Platintiegel frisch geglühte Substanz (weisses Pulver).

2) Diese Substanz wurde von den Herren F. Exner und E. Haschek auf ihr Funkenspectrum untersucht und erwies sich als nahe absolut rein.

3) Schwarzes Pulver.

4) Aus einem Oxyd, das von Hrn. L. F. Nilson stammte.

5) Weisses Pulver, enthält nach Angabe des Hrn. Brauner noch etwa 3 Proc. Pr_2O_3.

6) Die Formel ist nicht ganz sichergestellt.

7) Nach den Ergebnissen der Spectraluntersuchung stark lanthanhaltig.

Substanz	μ	g	a	n	p	$\varkappa \cdot 10^6$	$k \cdot 10^6$	t	Herkunft
Sa_2O_3	348	1,202	1160	3,33	+2,023	+ 66,8	+20,1	17	E. [1])
$Sa(NO_3)_3$ ** [9])	336	0,212	610	1,82	+0,433	+ 21,9	+12,1	20	E. [2])
Gd_2O_3	360,3	0,366	1344	3,73	+2,65	+172,0	+46,3	18	E. [3])
$Gd(NO_3)_3$ ** [9])	342	0,111	439	1,28	+0,422	+ 24,7	+19,3	21	E. [2])
Er_2O_3	380	0,949	1998	5,26	+8,64	+417,8	+79,4	15	E. [4])
Er_2O_3 (?)	380	0,387	812	2,14	+0,1318	+ 63,8	+29,8	17	G. [5])
$Er(NO_3)_3 + 5H_2O$(?)**	442	1,202	1158	2,62	+0,5040	+ 16,67	+ 6,36	16	M. [6])
$Er(NO_3)_3 + 5H_2O$ ** [9])	442	0,475	970	2,2	+2,225	+ 97,9	+44,5	20	E. [7])
Yb_2O_3	394	2,676	2549	6,47	+2,66	+ 77,46	+11,97	17	E. [8])
$Yb(NO_3)_3$ ** [9])	359	0,215	717	2,0	+0,204	+ 10,85	+ 5,43	21	E. [2])
$Ta_4O_7H_4$	482	1,673	1586	3,29	+0,0125	+ 0,364	+ 0,111	20	B.
WO_2 (?)	216	1,975	1881	8,71	+0,0136	+ 0,398	+ 0,046	17	G.
WO_3	232	1,834	1747	7,53	−0,0066	− 0,193	− 0,025	17	G.
WO_4H_2	250	1,920	1829	7,32	−0,0056	− 0,164	− 0,022	16	G.
$PtCl_2$	265,7	1,646	1568	5,9	−0,0010	− 0,029	− 0,005	15	G.
$AuCl_3$ **	303,6	0,853	1351	4,45	−0,0116	− 0,455	− 0,102	21	M.
HgO	216,3	4,760	4533	21,0	−0,0299	− 0,869	− 0,042	16	G.
HgCl	235,8	3,550	3384	14,35	−0,0210	− 0,613	− 0,043	19	M.
$HgCl_2$	271,2	3,626	3468	16,5	−0,027	− 0,654	− 0,040	17	M.
$HgBr_2$	360,2	1,872	1783	5,0	−0,015	− 0,437	− 0,088	15	G.
HgJ_2	454	3,173	3022	6,7	−0,0264	− 0,771	− 0,116	17	G.
HgS	232,4	2,914	2775	12,0	−0,016	− 0,465	− 0,039	16	G.

1) Gelbes Pulver, stammt von Hrn. P. T. Cleve.
2) Aus dem vorhergehenden gewonnen.
3) Gelbes Pulver, stammt von Hrn. L. F. Nilson, der es selbst von H. Marignac erhielt.
4) Hellrosa Pulver, stammt von Hrn. P. T. Cleve.
5) Altes Präparat, Gemisch verwandter Erden, gelbes Pulver.
6) Enthält vorzüglich Yttrium.
7) Aus dem Er_2O_3 von H. Cleve.
8) Weisses Pulver, stammt von Hrn. L. F. Nilson.
9) Formel nicht ganz sicher.

…anz	μ	g	a	n	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$	t	Herkunft
	456,2	2,0035	1930	4,23	+0,0030	+0,009	+0,023	17	M.
	239,6	0,550	1240	5,22	−0,0044	−0,193	−0,037	20	B.
	310,5	0,439	1108	3,57	−0,0040	−0,195	−0,055	20	B.
*	504,3	1,286	2760	5,47	−0,0120	−0,541	−0,099	20	B.
*	266,1	2,598	2463	9,26	−0,0140	−0,408	−0,044	20	B.
Cl	505,3	0,273	783	1,55	−0,0040	−0,205	−0,132	20	B. [1]
	222,9	{ 3,662	3488	15,7	−0,0130	−0,381	−0,024	18	B.
		{ 4,091	3896	17,5	−0,0154	−0,449	−0,026	18	E. [2]
	684,7	3,026	2882	4,2	−0,0164	−0,478	−0,114	18	B.
	238,9	{ 3,095	2948	12,34	+0,1026	+3,02	+0,245	18	B.
		{ 3,350	3175	13,3	+0,036	+1,05	+0,079	19	M.
	244,9	2,933	2792	11,4	−0,0178	−0,519	−0,046	16	B.
	277,8	2,306	2196	7,9	−0,0184	−0,535	−0,068	15	G.
	436,8	2,541	2409	5,52	−0,0180	−0,525	−0,095	20	M.
	460,6	2,547	2414	5,24	−0,0215	−0,623	−0,118	19	M.
	497	3,342	3183	6,4	−0,0138	−0,404	−0,063	15	B.
	241,5	2,397	2283	9,5	−0,0134	−0,390	−0,041	15	B.
	589,1	3,754	3558	6,04	−0,048	−1,39	−0,230	20	M.
s	597	1,719	1637	2,74	−0,0074	−0,217	−0,079	15	B.
	264	{ 1,1064	1066	3,8	−0,0028	−0,092	−0,024	18	E.
		{ 1,861	1793	6,8	−0,0027	−0,089	−0,013	15	Br.
$_4$	480,2	1,7412	1678	3,5	−0,0112	−0,180	−0,051	18	M.
	271,5	2,904	2766	10,2	+0,0846	+2,46	+0,243	16	G.
	346,5	1,485	1414	1,67	+0,012	+0,351	+0,210	16	G.
	287,5	1,648	1570	5,49	+0,005	+0,146	+0,027	16	G.
	381,3	1,911	1811	4,75	−0,002	−0,060	−0,013	19	B.
$_3)_2$ *	395,6	1,7112	1649	4,17	−0,0016	−0,053	−0,013	15	E.
n- a- }	—	0,0951	842	—	+0,0015	+0,10	—	19	E. [3]
a- a- at }	—	0,0296	668	—	+0,0010	+0,16	—	20	E. [3]

Formel nicht ganz sichergestellt.
Schwefelgelbe Modification.
Stammen von Hrn. Curie-Paris.

Im Anschlusse folgen noch einige Nachtragsbestimmungen an Elementen.

Substanz	μ	g	α	n	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$	t
Rother Phosphor (amorph)	31	1,791	1706	55,0	−0,013	−0,392	−0,007	18
Schwefel (gepulverte Krystalle)	32,1	1,320	1263	39,4	−0,144	−0,431	−0,011	18
Silicium (Krystalle)	28,4	0,970	933	32,9	+0,0002	+0,006	+0,0002	16
Magnesium[1]) (Krystalle)	24,4	0,718	758	31,1	+0,012	+0,435	+0,014	20

Ferners wurde Kohlenstoff in Form von Diamanten untersucht, von denen mir vier grössere Exemplare, drei helle und ein gelblicher, zur Verfügung standen. Für das specifische Gewicht $\gamma = 3,52$ ergiebt sich $n = 293$ und fand ich in der Weise, wie dies für kleine Stückchen bereits beschrieben wurde[2]), bei 13° C.:

$$\varkappa = -1,14.10^{-6}, \quad k = -0,0039.10^{-6}.$$

Aus dieser Zusammenstellung lassen sich die folgenden allgemeinen Schlüsse ziehen.

A. Qualitative Beziehungen.

1. Die Verbindung aus zwei diamagnetischen Elementen ist immer diamagnetisch.

Scheinbare Ausnahmen hiervon bilden bloss eine Reihe von Kupferverbindungen und Zinnsulfid (Musivgold). Die Kupferverbindungen sind nun im Handel niemals frei von Beimengungen der benachbarten stark magnetischen Metalle, insbesondere von Nickel, erhältlich. Die thatsächlich nahezu absolut reinen Verbindungen, die ich von Hrn. E. **Murmann** erhielt, sind dagegen sämmtlich unzweifelhaft diamagnetisch. Dass man es bei den genannten paramagnetischen Substanzen

1) Stammen von einer Argondarstellung, wobei sich grössere Mg-Kryställchen ausbilden.

2) St. Meyer, l. c. p. 329.

vermuthlich nicht mit einheitlich definirten Körpern zu thun hat, geht übrigens auch daraus hervor, dass man für die gleiche Verbindung, wenn sie aus verschiedener Quelle stammte, sehr stark verschiedene Werthe erhielt, wie bei CuS und SnS, während andere Materialien wie Li_2CO_3, MoS_3, SrO, $Zr(NO_3)_4 + 5H_2O$, PbO recht gute Uebereinstimmung zeigen.

Man kann sonach annehmen, dass überall, wo der angeführte Satz nicht zutrifft, die Abweichungen sich auf Verunreinigungen zurückführen lassen.[1])

2. Die Verbindung zweier paramagnetischer Componenten ist in der Regel gleichfalls paramagnetisch. Bei schwach magnetischen Elementen kann jedoch hier auch Diamagnetismus entstehen.

Beispiele hierfür bilden

Be_2O_3, MgO, Al_2O_3, SiO_2, Mo_2O_3, WO_3 und ThO_2,

wobei zu bemerken ist, dass aus später zu erörternden Gründen nicht anzunehmen ist, dass die positiven Ergebnisse der Magnetisirungszahlen der Metalle in obigen Oxyden durch Verunreinigungen hervorgerufen seien.

Diese Erscheinung scheint mit der Vergrösserung des Atomvolumens bei Eintritt in die Verbindung zusammenzuhängen, worauf später noch näher eingegangen werden soll.

Ein directer Rückschluss auf die Qualität eines Elementes ist also aus der Qualität der Verbindung nur bedingungsweise gestattet.[2])

3. Es giebt ausser der Gruppe Cr, Mn, Fe, Co, Ni eine Reihe von stark magnetischen Elementen und zwar La, Ce, Pr, Nd, Yb, Sa, Gd, Er in aufsteigender Folge stärker werdend. In analogen Verbindungen sind die letztgenannten Elemente von Praseodym angefangen ebenso stark, oder sogar stärker magnetisch als diejenigen der erstgenannten Gruppe. Erbium,

1) Immerhin wäre es möglich, dass für Kupfer ganz besondere Verhältnisse vorliegen und hoffe ich aus den im Zuge befindlichen Untersuchungen an Lösungen und Amalgamen bestimmte Resultate zu erhalten.

2) Die Schlüsse des Hrn. J. Königsberger, Wied. Ann. **66.** p. 732 sind demnach für Li, Na, K, Rb, Ca, Sr, Ba und Mg nicht ohne weiteres zulässig und ergeben für Mg wahrscheinlich ein unrichtiges Resultat.

das den Höhepunkt erreicht, ist im Er_2O_3 etwa viermal so stark als Eisen in Fe_2O_3.[1])

Dass das früher untersuchte metallische Erbium kaum stärker magnetisch war als das Oxyd, erklärt sich daraus, dass mir damals nicht reines Er, sondern eine Legirung von verwandten Elementen vorlag. Wie nun bekanntlich Zusatz von Mangan oder eines anderen paramagnetischen Elementes das *k* des reinen Eisens sehr beträchtlich herabdrückt, so liegen offenbar ähnliche Verhältnisse auch hier vor. Die inzwischen erfolgte Untersuchung des Funkenspectrums dieses Metalles durch die Herren F. Exner und E. Haschek hat übrigens ergeben, dass dieses Material vorzüglich Yttrium und Ytterbium enthielt.

4. Von Polonium und Radium lagen mir Spuren in Form von Doppelsalzen, die Hr. Curie an die Wiener kais. Akademie der Wissenschaften geschickt hatte, vor. Beide erwiesen sich unzweideutig als paramagnetisch, die quantitativen Angaben sind freilich mit Rücksicht auf die ausserordentlich geringen Mengen nur ganz approximative.

B. Quantitative Beziehungen.

1. Der Molecularmagnetismus k der paramagnetischen Verbindungen ist kleiner als die Summe der Atommagnetismen der Bestandtheile.

Als auffallende Beispiele hierfür dienen die Oxyde der Gruppe Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co und Ni.

Die diamagnetischen Substanzen scheinen sich hingegen in erster Annäherung additiv zu verhalten, wie aus der Tab. 1 (vgl. p. 249) hervorgeht, in der $k.10^6$ die gefundenen Werthe, $k'.10^6$ die aus der Summe $n\,k_1.10^6 + m\,k_2.10^6$ berechneten bedeuten, wenn wir die Verbindung in der Form $C = n\,A_1 + m\,A_2$ schreiben. Hierbei wurden der Berechnung diejenigen Werthe von $k.10^6$ für Ag, Cd, Hg, Pb, Bi, Br und J zu Grunde ge-

1) Wäre Erbium als reines Metall in gleichem Maasse stärker magnetisch als Eisen, wie es die Oxyde sind, und berücksichtigt man, dass das specifische Gewicht nur etwa $^2/_3$ desjenigen von Eisen ist, so liessen sich aus Erbium Dynamomaschinen und andere Apparate bauen, die sich bei gleicher Leistung auf etwa $^1/_6$ des Gewichtes derjenigen aus Eisen reduciren würden.

Tabelle 1.

Substanz	$k.10^6$	γ	μ	α	Componenten $n A_1$	Componenten $m A_2$	α_1	α_2	$n k_1.10^6$	$m k_2.10^6$	$k'.10^6$	$\alpha_1+\alpha_2$
Cu_2S	— 0,023	5,58	159,3	28,5	S	2 Cu	15,7	14,2	— 0,011	— 0,012	— 0,023	29,9
AgBr	— 0,049	6,33	187,5	29,6	Ag	Br	10,2	26,9	— 0,016	— 0,033	— 0,049	37,1
AgJ	— 0,068	5,62	234,8	41,8	Ag	J	10,2	25,6	— 0,016	— 0,040	— 0,056	35,8
$CdBr_2$	— 0,082	4,79	271,9	56,8	Cd	2 Br	12,9	53,8	— 0,015	— 0,066	— 0,081	66,7
CdJ_2	— 0,090	5,98	365,7	61,2	Cd	2 J	12,9	51,2	— 0,015	— 0,080	— 0,095	64,1
$HgBr_2$	— 0,088	5,74	360,2	62,8	Hg	2 Br	14,1	53,8	— 0,030	— 0,066	— 0,096	67,9
HgJ_2	— 0,116	6,26	454,0	72,3	Hg	2 J	14,1	51,2	— 0,030	— 0,080	— 0,110	65,3
$PbBr_2$	— 0,095	6,57	436,8	66,5	Pb	2 Br	18,1	53,8	— 0,025	— 0,066	— 0,091	71,9
PbJ_2	— 0,118	6,16	460,6	74,8	Pb	2 J	18,1	51,2	— 0,025	— 0,080	— 0,105	69,3
BiJ_3	— 0,230	5,82	589,1	101,2	Bi	3 J	21,1	76,8	— 0,203	— 0,120	— 0,323	97,9

Tabelle 2.

Verbindung	$-k.10^6$	Verbindung	$-k.10^6$	Verbindung	$-k.10^6$	Verbindung	$-k.10^6$	Verbindung	$-k.10^6$
NaFl	0,017	KFl	0,021	$CaFl_2$	0,023	$SrFl_2$	0,033	$BaFl_2$	0,022
NaCl	0,024	KCl	0,035	$CaCl_2$	0,043	$SrCl_2$	0,070	$BaCl_2$	0,066
NaBr	0,038	KBr	0,042	—	—	$SrBr_2$	0,078	$BaBr_2$	0,091
NaJ	0,047	KJ	0,052	—	—	SrJ_2	0,118	BaJ_2	0,103
—	—	—	—	—	—	—	—	$PbFl_2$	0,046
AgCl	0,040	$CdCl_2$	0,046	$SnCl_2$	0,055	$HgCl_2$	0,040	$PbCl_2$	0,068
AgBr	0,049	$CdBr_2$	0,082	—	—	$HgBr_2$	0,088	$PbBr_2$	0,095
AgJ	0,068	CdJ_2	0,090	SnJ_2 (?)	0,040	HgJ_2	0,116	PbJ_2	0,118

legt, die in der kürzlich gegebenen Tabelle der Atommagneti men[1]) angeführt sind, für S der oben gewonnene Werth u für Cu —0,006 gewählt.

In der Zusammenstellung bezeichnen γ die Dichte, μ d Moleculargewicht, α das Molecularvolumen (α_1 und α_2 be für $n A_1$ und $m A_2$).

Man erkennt, dass, wo eine auffällige Vergrösserung de Volumens bei der Verbindung eintritt, wie bei AgJ, HgJ, PbJ_2, die Summe der Atommagnetismen noch hinter dem direc gefundenen Werthe des Diamagnetismus zurückbleibt. Wismuth trijodid folgt dieser Regel nicht, allerdings lässt sich nich erweisen, ob das Resultat für diese Substanz nicht durch Ver unreinigungen beeinflusst wurde.

In den Fällen hingegen, in denen die Summe der Atom volumina grösser ist, als das thatsächliche Volumen der Ver bindung, wird die Additivität ziemlich gut erfüllt.

2. Die Halogenverbindungen zeigen ganz bestimmte Regel mässigkeiten der Susceptibilitätscoefficienten, indem, wie au der Tab. 2 (vgl. p. 249) ersichtlich ist, das k für Verbindunge desselben Metalles mit steigendem Atomgewicht wächst.

Es erscheint mir beachtenswerth, dass sich in sämmt lichen Fällen in besserer (Na, K, Ba, Ag, Pb) oder rohere Annäherung die k der Fluoride, Chloride, Bromide und Jodid verhalten wie 2 : 3 : 4 : 5.

Auch für gleiche Halogenverbindung verschiedener Metall lassen sich Gesetzmässigkeiten erkennen. So ergiebt

	LiCl	NaCl	KCl	RbCl	CsCl
$-k.10^6$	0,020	0,024	0,035	0,037	0,047

Mit steigendem Atomgewicht des Alkalimetalles steigt auc hier die Magnetisirungszahl.

Es ist fraglich, ob in diesem Falle gleichfalls eine ein fache Zahlenbeziehung existirt, doch möchte ich darauf hin weisen, dass für die Relation 2 : 3 : 4 : 5 : 6 die Reihe

0,016 0,024 0,032 0,040 0,048

entstände. Der zu grosse Werth bei LiCl und KCl liesse sic eventuell dadurch erklären, dass die Substanzen nicht gan wasserfrei gewesen sein mögen.

1) St. Meyer, l. c. p. 332.

Regelmässiges Ansteigen des k lässt sich auch sonst, z. B. in der paramagnetischen Gruppe der seltenen Erden zeigen:

	$LaCl_3$	$CeCl_3$	$PrCl_3$
$+k.10^6$	1,07	1,19	3,36

3. Mit Rücksicht auf die nahezu erfüllte Additivität lassen sich in erster Annäherung Schlüsse für den Atommagnetismus von Fl und Cl, dann Li, Na, K, Rb, Cs, ferners Ca, Sr, Ba und auch In, für welche Elemente keine directen Angaben vorliegen, ziehen.

So berechnet sich das $k.10^6$ für Chlor aus

AgCl	zu	— 0,023	HgCl	zu	— 0,013
$CdCl_2$	zu	— 0,016	$AuCl_3$	zu	— 0,024
$HgCl_2$	zu	— 0,005	$PbCl_2$	zu	— 0,021

Die Werthe aus den Quecksilberverbindungen dürften zu gering sein, worauf auch die vorerwähnte Zahlenbeziehung deutet.

In erster Annäherung genügt demnach der Werth —0,02.

Aehnlich erhält man für Fluor in erster Annäherung aus dem Bleifluorid $k.10^6 = -0,01$.

Berechnet man unter Zugrundelegung dieser Zahlen und der für Brom (—0,033), Jod (—0,040) und Schwefel (—0,011) direct gefundenen Werthe nunmehr weiter die Näherungswerthe der oben angeführten Metalle, so ergiebt sich $-k.10^6$ aus der Verbindung mit

	Fl	Cl	Br	J	S	Mittel für $-k.10^6$
Li	—	sehr schwach	—	—	—	sehr schwach
Na	0,007	0,004	0,005	0,007	—	0,006
K	0,011	0,015	0,009	0,012	—	0,01
Rb	—	0,017	—	—	—	0,02
Cs	—	0,027	—	—	—	0,03
Ca	0,003	0,003	—	—	—	0,003
Sr	0,013	0,030	0,012	0,038	—	0,02
Ba	0,002	0,026	0,010	0,023	0,026	0,02
In	—	0,016	—	—	0,009	0,01

4. In der nachstehenden Tabelle (vgl. p. 252 u. 253) sind die Magnetisirungszahlen der Oxyde, und zwar immer auf ein

Molecularmagnetismen der Oxyde u

				Li – $\frac{1}{2}Li_2O$ −0,010	Be +0,72 BeO ±0	B +0,05 $\frac{1}{2}B_2O_3$ −0,015	C −0,0
				Na *−0,005*	Mg +0,014 MgO −0,008	Al + $\frac{1}{2}Al_2O_3$ −0,020	Si +0,00 SiO_2 −0,00
K *−001*	Ca *−0,003* CaO −0,015	Sc ? $\frac{1}{2}Sc_2O_3$ −0,002	Ti +0,09 TiO_2 +0,031	V +0,17 $\frac{1}{2}V_2O_5$ +0,086	Cr + $\frac{1}{2}Cr_2O_3$ +1,81	Mn + MnO_2 +2,38	Fe + FeO +540 $\frac{1}{2}Fe_2O_3$ +10,9
Rb *−0,02*	Sr *−0,02* SrO −0,019	Y +3,2(?) $\frac{1}{2}Y_2O_3$ +0,58	Zr −0,014 ZrO_2 −0,003	Nb +0,49 (?) $\frac{1}{2}Nb_2O_5$ −0,011	Mo +0,024 $\frac{1}{2}Mo_2O_3$ −0,034		Ru +
Cs *−0,03*	Ba *−0,02* BaO −0,016 BaO_2 +0,029 (?)	La +13,0 $\frac{1}{2}La_2O_3$ +0,013	Ce +34,0 ClO_2 +0,011	Pr + $\frac{1}{2}Pr_4O_7$ +2,16	Nd + $\frac{1}{2}N_2O_3$ +4,6	Sa + $\frac{1}{2}Sa_2O_3$ +10,1	
					Er +41,8 (?) $\frac{1}{2}Er_2O_3$ +39,7		
		Yb + ? $\frac{1}{2}Yb_2O_3$ +5,99		Ta +1,02 (?) $\frac{1}{4}Ta_4O_5$ +0,034[2])	W +0,1 WO_2 +0,046 (?) WO_3 −0,025		Os +0,0
			Th +16,0 (?) ThO_2 −0,024		U +0,21 UO_2 +0,243 UO_3 +0,027 $\frac{1}{3}U_3O_8$ +0,07		

1) In erster Annäherung unter Abzug des Werthes von Wasser aus SeO_2...

2) In erster Annäherung unter Abzug des Werthes von 2 H_2O aus $Ta_4O_7H_4$

nmagnetismen der Elemente.

	O +	Fl *−0,01**)						
07)$_5$ 26	S −0,011	Cl *−0,02*						
)$_3$;)$_4$:	Ni + NiO +1,55 (?) $\frac{1}{2}Ni_2O_3$ +1,7 (?)	Cu −0,006	Zn −0,010 ZnO −0,021	Ga —	Ge —	As $\frac{1}{2}As_2O_3$ −0,021	Se −0,025 SeO_2 −0,024 [1]	Br −0,033
	Pd +0,55	Ag −0,016	Cd −0,015 CdO −0,031	In *−0,01*	Sn +0,004 (?) SnO −0,012 $\frac{1}{2}Sn_2O_3$ −0,038 (?) SnO_2 −0,006	Sb −0,069 $\frac{1}{2}Sb_2O_3$ −0,042	Te −0,039 TeO_2 −0,018	J −0,040
O$_3$,2								
	Pt +0,227	Au −0,031	Hg −0,030 HgO −0,042	Tl −0,093 $\frac{1}{2}Tl_2O_3$ −0,012 (?)	Pb −0,025 PbO −0,025 $\frac{1}{3}Pb_3O_4$ −0,038 PbO_2 +0,08 (?)	Bi −0,203 $\frac{1}{2}Bi_2O_5$ −0,063		

*) Die durch den Druck gekennzeichneten Werthe sind nicht direct be-
ıt, sondern berechnet.

Atom des Metalles reducirt, eingetragen und mit den Atommagnetismen der Elemente zusammengestellt.[1])

Oxydation ganz scheint allgemein das *k* des Elementes herunterzudrücken, und zwar soweit, dass paramagnetische Metalle diamagnetische Oxyde liefern können, wie dies schon oben erwähnt wurde. Die negativen Susceptibilitätscoefficienten von P, Zn, Cd, Hg, Pb werden noch stärker negativ, trotzdem die positive Natur des Sauerstoffs feststeht.

Ein unmittelbarer Rückschluss lässt sich also aus den Oxyden auf die Elemente nicht ziehen und es ist daher z. B. die Annahme[2]), dass Scandium diamagnetisch sei, weil Sc_2O_3 einen negativen Werth ergab, nicht berechtigt gewesen.

Hingegen zeigen die Oxyde untereinander deutliche Beziehungen.

Je mehr Einheiten Sauerstoff auf eine Einheit des Metalles kommen, desto stärker wird der Werth des *k* vermindert. Bezeichnet *M* das Metall, so nimmt demnach der Molecularmagnetismus in der Reihe

$$MO, \ \tfrac{1}{3}M_3O_4, \ \tfrac{1}{2}M_2O_3, \ MO_2$$

von links nach rechts ab.

Besondere Regelmässigkeiten zeigen die Sesquioxyde insbesondere bei den seltenen Erden. Beachtet man, dass nach dem Gesagten der Susceptibilitätscoefficient von $\frac{1}{2}Ce_2O_3$ grösser sein muss als derjenige von CeO_2, so giebt die Folge der Oxyde von La, Ce, Pr, Nd, Sa und Gd eine regelmässig ansteigende Reihe. Speciell lässt sich daraus schliessen, dass das Gadolinium sehr gut an die Stelle eines oder mehrerer Elemente der Triade unterhalb der Ru-, Rh-, Pd-Gruppe passt.

C. Einfluss des Krystallwassers.

Um den Einfluss des Krystallwassers auf das *k* zu studiren, habe ich die Magnetisirungszahlen einer Reihe von Salzen mit verschiedenem Gehalte an H_2O bestimmt.

---

1) Bei dieser Gelegenheit sei darauf hingewiesen, dass in vielen Lehrbüchern der Chemie, wie demjenigen von Dammer, Kraft u. a. die Kobaltoxyde immer ausdrücklich als unmagnetisch bezeichnet werden, wozu gar keine Veranlassung vorliegt.

2) St. Meyer, l. c. p. 331.

In einem Liter sind (1000/18) = 55,56 g-Molecüle H_2O enthalten. Das $\varkappa . 10^6$ desselben ist für Zimmertemperatur $-0,67$[1]), also die moleculare Magnetisirungszahl für Wasser $k . 10^6 = -0,012$ (C.G.S.).

Bezeichnet n die Zahl der Krystallwassermolecüle, so ist demnach $n . k_{H_2O}$ der magnetische Werth des Wassers in der Verbindung, wenn dasselbe sich im Salze so verhielte, als ob es frei wäre.

Die folgende Tabelle ergiebt die gewonnenen Resultate, k bedeutet den Susceptibilitätscoefficienten des wasserhaltigen, k_1 denjenigen des wasserfreien Salzes. $\varDelta$ ist die Differenz zwischen dem thatsächlich gefundenen Werthe k und dem berechneten $k_1 + n k_{H_2O}$, $\varDelta / n$ diese Differenz für ein Molecül Wasser.

Tabelle 3.

Wasserhaltige Substanz	$-k . 10^6$	Wasserfreie Substanz	$-k_1 . 10^6$	$-n . k_{H_2O} . 10^6$	$-(k_1 + n k_{H_2O}) . 10^6$	$\frac{\varDelta}{n}$
SO_4 $\cdot H_2O$	0,043	$LiSO_4$	0,039	0,012	0,051	0,008
SO_4 $2 H_2O$	0,062	$CaSO_4$	0,052	0,024	0,076	0,007
l_2 $2 H_2O$	0,078	$BaCl_2$	0,066	0,024	0,090	0,006
O_4 $4 H_2O$	0,071	$BeSO_4$	0,038	0,048	0,086	0,004
l_2 $6 H_2O$	0,092	$MgCl_2$	0,044	0,072	0,116	0,004
l_2 $6 H_2O$	0,094	$CaCl_2$	0,034	0,072	0,106	0,002
O_4 $7 H_2O$	0,089	$MgSO_4$	0,043	0,084	0,127	0,005
CO_3 $10 H_2O$	0,133	Na_2CO_3	0,020	0,120	0,140	0,001
O_4 $Al_2(SO_4)_3$ $24 H_2O$	0,444	$CsSO_4$ $+ Al_2(SO_4)_3$	0,281	0,288	0,569	0,005

1) G. Jäger u. St. Meyer, Wied. Ann. 67. p. 712. 1899.

Wäre die Magnetisirungszahl der Substanzen eine rein additive Eigenschaft derselben, so müsste sich der Wasserwerth zu dem Molecularmagnetismus des wasserfreien Salzes einfach addiren. Es lässt sich aber ganz allgemein aus der vorstehenden Zusammenstellung constatiren, dass das Krystallwasser den Diamagnetismus um weniger als den vollen Betrag, der dem freien Wasser zukäme, erhöht.

Es liegt daher der — auch anderweitig wohlbegründete — Schluss nahe, dass hier das Wasser nicht einfach eingeschlossen, sondern in thatsächlich chemischer Gebundenheit vorhanden sei.

Leider versagt die Genauigkeit der angewendeten Methode zur quantitativen Bestimmung der hier herrschenden Verhältnisse, doch scheint der Werth Δ/n, wenigstens der Grössenordnung nach, untereinander übereinstimmende Zahlen zu liefern.

Eine wesentlich andere Wirkung zeigt das Wasser, wenn es wirklich in eine Verbindung eintritt und Hydroxylgruppen bildet.

So ist zum Beispiel für

CaO	$k \cdot 10^6 = -0{,}011$	$\Delta = -0{,}018$
CaO_2H_2	$k \cdot 10^6 = -0{,}030$	
ZnO	$k \cdot 10^6 = -0{,}021$	$\Delta = -0{,}021$
ZnO_2H_2	$k \cdot 10^6 = -0{,}042$	
TeO_2	$k \cdot 10^6 = -0{,}018$	$\Delta = -0{,}016$
TeO_3H_2	$k \cdot 10^6 = -0{,}034$	
BaO	$k \cdot 10^6 = -0{,}016$	$\Delta = -0{,}026$
BaO_2H_2	$k \cdot 10^6 = -0{,}042$	

Dies besagt, dass in diesen Fällen die Differenz grösser zu sein scheint, als der Wirkung eines Wassermolecüles (—0,012) entspricht.

Die Erklärung ist vermuthlich darin gegeben, dass H in OH für ein Atom Wasserstoff stärker diamagnetisch ist als in H_2O und dass der Paramagnetismus von O im Oxyde durch die Bindung an H geschwächt wird.

D. Abhängigkeit des *k* von der Feldstärke.

Dass auch stark magnetische Lösungen sich von der Feldstärke unabhängig erweisen, ist bekannt, hingegen die Frage bezüglich fester Verbindungen noch eine offene.

besondere hat Hr. J. Königsberger für das Gebiet ı 1800 und 2200 (C.G.S.) an einer Reihe paramagne-Verbindungen eine solche Abhängigkeit erhalten.[1])

habe daher eine grössere Anzahl von Bestimmungen lintensitäten im Intervalle von rund 6000 bis 10 000 gemacht und im Folgenden zusammengestellt, wobei chlich die stark paramagnetischen Substanzen heran-wurden, und im Anschlusse hieran die Resultate für ches Beryllium und Bor gegeben.

den Tabellen bedeutet M^2 das Feldstärkenquadrat, rect abgelesenen, der Magnetisirungszahl proportionalen Grammen. Die Angabe für die grösste Feldstärke C.G.S.) ist aus Messungen mit einer Wismuthspirale und eine bloss approximative, die übrigen Werthe für den aus dem Verhältnisse der Stromstärken des den nagneten magnetisirenden Stromes unter Zugrunde-einer für die Mitte des Feldes bestimmten Magneti-urve gefunden.

stanz	$10^{-6} . M^2$	p	$100 \frac{p}{M^2}$	Bemerkungen
xyd	100	1,408	1,4	Nicht remanent
	80	1,12	1,4	
	60	0,82	1,3	
	38	0,53	1,4	
oxyd	99	1,85	1,9	Nicht remanent
	80	1,51	1,9	
	60	1,12	1,9	
	38	0,73	1,9	
chlorid	101	2,64	2,61	Enthielt Krystallwasser
	80	2,08	2,60	Nicht remanent
	60	1,55	2,59	
	38	1,02	2,61	
lfat	101	1,60	1,59	Nicht remanent
- 7 H_2O	82	1,28	1,56	
	61	0,96	1,57	
	39	0,62	1,57	

[1]) J. Königsberger, Wied. Ann. 66. p. 734. 1898.

Substanz	$10^{-6} . M^2$	p	$100 \frac{p}{M^2}$	Bemerkungen
Eisenoxyd Fe_2O_3	100	1,96	1,96	Aus besonders rei Eisenpulver durch geresGlühen an der I erhalten, dunkelro braun. Remanen
	81	1,68	2,08	
	61	1,45	2,38	
	38	1,20	3,16	
Eisenoxyd Fe_2O_3	100	4,42	4,4	Käufliches Sesquio rothbraun. Reman
	81	3,80	4,7	
	61	3.21	5,3	
	38	2,52	6,6	
Kobaltsesqui-oxyd Co_2O_3	100	2,17	2,17	Nicht remanent.
	80	1,75	2,19	
	60	1,33	2,21	
	38	0,88	2,3	
Kobaltsuper-oxyd Co_3O_4	101	6,70	6,7	Vielleicht vermischt anderen Oxydatior stufen. Nicht remanent.
	81	5,50	6,8	
	61	4,34	7.2	
	38	3,10	7,1	
Kobaltchlorid $CoCl_2$	100	1,43	1,43	Enthielt Krystallwas Nicht remanent.
	80	1,13	1,41	
	60	0,83	1,39	
	38	0,53	1,40	
Nickeloxydul NiO	100	1,04	1,04	Enthält wahrschein noch andere Oxydati stufen. Nicht remanent.
	80	0,82	1,03	
	60	0,61	1,01	
	38	0,40	1,04	
Nickeloxyd Ni_2O_3	100	0,763	0,76	Wie oben. Nicht remanent.
	80	0,575	0,72	
	60	0,430	0,71	
	38	0,291	0,76	
Ceroamonnitrat $Ce(NO_3)_3 + 2 (NH_4)NO_3$	100	0.130	0,13	Nicht remanent.
	80	0,102	0,13	
	60	0,076	0,13	
	38	0,050	0,13	
Praseodym-oxyd Pr_4O_7	100	0,512	0,51	Schwarzes Pulvei Nicht remanent.
	80	0,392	0,49	
	60	0,298	0,50	
	38	0.195	0,51	

ubstanz	$10^{-6}.M^2$	p	$100 \cdot \frac{p}{M^2}$	Bemerkungen
	100	0,291	0,29	Enthält nach der Angabe des Hrn. B. Brauner noch etwa 3 Proc. Pr_2O_3. Weisses Pulver. Nicht remanent.
ymoxyd	79	0,217	0,28	
$_3$	58	0,167	0,29	
	38	0,111	0,29	
ymamon-	101	0,313	0,31	Rosa Pulver. Nicht remanent.
-at	82	0,244	0,30	
$O_3)_3$	61	0,183	0,30	
$(NH_4)NO_3$	38	0,122	0,32	
	100	8,64	8,8	Besonders rein. Präparat von Hrn. P. T. Cleve. Rosa Pulver. Nicht remanent.
moxyd	80	6,82	8,7	
	60	5,17	8,6	
	38	3,35	8,6	
	100	0,132	0,13	Altes Präparat, Gemisch verwandter Erden. Gelbbraunes Pulver. Nicht remanent.
moxyd	80	0,102	0,13	
	60	0,077	0,13	
	38	0,052	0,14	
mnitrat	100	2,23	2,2	Aus dem Oxyd von Hrn. P. T. Cleve. Rosa Krystalle. Nicht remanent.
$)_3)_3$	80	1,78	2,2	
H_2O	60	1,34	2,2	
	36	0,78	2,2	
	101	0,175	0,17	Weises Pulver von Hrn. B. Brauner. Nicht remanent.
moxyd	81	0,136	0,17	
	61	0,101	0,17	
	38	0,065	0,17	
	99	2,66	2,6	Weisses Pulver, stammt von Hrn. L. F. Nilson. Nicht remanent.
	86	2,17	2,5	
biumoxyd	72	1,88	2,6	
$_3$	53	1,33	2,5	
	38	0,98	2,6	
bium-	100	0,204	0,20	Farblose, sehr hygroskopische Kryställchen aus dem vorstehenden Yb_2O_3. Nicht remanent.
-at	80	0,156	0,19	
$O_3)_3$ (?)	60	0,114	0,19	
	36	0,068	0,18	
linium-	100	2,65	2,7	Gelbes Pulver, stammt von H. Marignac. Nicht remanent.
-d	82	2,11	2,7	
$_3$	62	1,59	2,6	
	38	0,94	2,5	

Substanz	$10^{-6} . M^2$	p	$100 \frac{p}{M^2}$	Bemerkungen
Gadolinium-nitrat $Gd(NO_3)_3$ (?)	100	0,422	0,42	Aus dem vorhergehenden gewonnen. Weisse, nadelförmige Kryställchen. Nicht remanent.
	80	0,330	0,41	
	60	0,249	0,42	
	38	0,161	0,42	
Samariumnitrat $Sa(NO_3)_3$ (?)	101	0,438	0,43	Aus dem Sa_2O_3, das von Hrn. P. T. Cleve stammte. Weisse Kryställchen mit gelblichem Stich. Nicht remanent.
	81	0,338	0,42	
	60	0,250	0,42	
	38	0,163	0,43	
Beryllium Be	100	1,021	1,02	Metallisches graues Pulver von Merck in Darmstadt. Nicht merklich remanent.
	72	0,817	1,13	
	38	0,577	1,52	
Bor B	100	0,067	0,067	Amorphes dunkelbraunes Pulver von H. Moissan-Paris. Nicht merklich remanent.
	71	0,053	0,074	
	38	0,039	0,103	

Die Magnetisirungszahl erweist sich sonach bei den angeführten sehr stark magnetischen Verbindungen im allgemeinen als von der Feldstärke im Bereiche von rund 6000 bis 10000 (C.G.S.) völlig unabhängig.

Die einzige Ausnahme bildet Eisenoxyd (Fe_2O_3), das eine entschiedene Abnahme von k mit wachsender Feldstärke anzeigt. Bei den Kobaltoxyden scheint ebenfalls eine Andeutung gleichen Ganges vorzuliegen, doch fallen hierbei die Werthe zu nahe den Fehlergrenzen, als dass sich ein bestimmter Schluss ziehen liesse.

Das Eisenoxyd zeigte sich auch etwas remanent magnetisch, während alle übrigen Verbindungen nicht die geringste Verschiedenheit vor und nach der Magnetisirung mit der Waage erkennen liessen.

Im Gegensatze hierzu macht sich deutliche Abnahme des k

bei den Elementen Beryllium und Bor bemerkbar. Freilich lässt sich hier nicht erweisen, wie stark dieselben durch Beimischungen verunreinigt waren, doch scheint die Aenderung mit der Intensität des Feldes so gross zu sein, dass sie wohl den Elementen selbst zukommen dürfte.

E. Magnetisirungszahl und Atomvolumen.

Es wurde bereits vielfach vermuthet, dass eine Abhängigkeit der Susceptibilität vom Atomgewicht der Elemente existire, so insbesondere von L. Meyer und Th. Carnelley[1]) und speciell auf die Möglichkeit eines Zusammenhanges mit dem Atomvolumen hat neuerdings Hr. J. Königsberger[2]) hingewiesen.

Das nunmehr vorliegende Material über das magnetische Wesen der Elemente ermöglicht es bereits, genauere Beziehungen aufzustellen. In der beigegebenen Taf. II habe ich die Curve der Atomvolumina aufgezeichnet und zwar bezeichnen die punktirten Theile diejenigen Gebiete, für die nähere Anhaltspunkte fehlen. L. Meyer lässt hierbei die aufsteigende Spitze bei dem Atomgewicht von ca. 175 weg, doch sprechen viele periodische Eigenschaften (insbesondere auch die Linienzahlen in den Spectren der Elemente), sowie die kürzlich von mir vorgenommene Bestimmung des Atomvolumens des Erbium[3]), welche allerdings infolge sehr starker Verunreinigung des Materiales ziemlich unsicher ist, entschieden dafür, dass eine solche Unterabtheilung im Gebiete der seltenen Erden zu machen sei.

Die + und — Zeichen geben den Para- bez. den Diamagnetismus an, die Pfeile das Anwachsen der betreffenden Eigenschaft.

Es fällt sofort auf, dass die stark magnetischen Elemente stets und nur in den Minimis und den diesen vorangehenden Theilen der Curve Platz finden. Eine bemerkenswerthe Ausnahme bildet bloss der Sauerstoff, der sich aber, wie aus den

---

1) Vgl. Lothar Meyer, Die Atome und ihre Eigenschaften, 6. Aufl. p. 151.

2) J. Königsberger, Wied. Ann. **66.** p. 731. 1898.

3) St. Meyer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 8. Juni 1899.

früher mitgetheilten Thatsachen hervorgeht, in den Verbindungen gerade so verhält, als wäre er ein diamagnetischer Körper.

Die Stellen grossen Atomvolumens entsprechen diamagnetischem Verhalten. Die Maxima beider magnetischen Qualitäten scheinen aber gegenüber den Extremen der Atomvolumencurve ein wenig nach links verschoben zu sein.

Bei dem Atomgewicht von 75, 118, 207 zeigen sich Unregelmässigkeiten (secundäre Minima) der Curve. Die an diesen Stellen befindlichen Elemente sind entweder auffallend schwach diamagnetisch oder vielleicht ganz schwach paramagnetisch (Sn).

In der Gruppe der seltenen Erden wächst der Paramagnetismus allerdings regelmässig bis zum Gadolinium, aber auch noch darüber hinaus, im Erbium und Ytterbium ist gleichfalls stark magnetisch. Es ist wahrscheinlich, dass diese letzten Substanzen wechselseitig stark vermengt oder überhaupt noch nicht einheitlich sind und es können sehr wohl, trotz der erhaltenen Resultate, die Elemente mit dem Atomgewicht zwischen 160 und 180 thatsächlich diamagnetisch sein.

Auch für das Yttrium[1]) liegt nach seinem magnetischen Verhalten die Annahme nahe, dass die untersuchten Substanzen keine einheitlichen waren.

Bezüglich der Gesammtgruppen der paramagnetischen Elemente scheint es, als wäre die 1. 3. 5. 7.(?) Abtheilung stärker magnetisch als die 2., 4., 6.

Mit der allgemeinen Abhängigkeit vom Atomvolumen steht es in Einklang, dass der Magnetismus mit sinkender Temperatur (Verkleinerung des Atomvolumens) zunimmt, sowie dass in Verbindungen, wo das Volumen zunimmt, die Susceptibilität fällt.

Vor kurzem[2]) haben die Herren F. Exner u. E. Haschek mitgetheilt, dass aus ihren Messungen der Funkenspectra der Elemente eine deutliche Abhängigkeit der Linienzahl vom Atomgewicht erkennbar ist. Die gewonnene Curve, welche auch einen Zusammenhang mit dem Atomvolumen annehmen lässt, hat überall dort Maxima, wo das Atomvolumen gering,

---

1) Vgl. St. Meyer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 8. Juni 1899.

2) F. Exner u. E. Haschek, XVI. Mitth. l. c.

Minima, wo das letztere gross ist. Es scheint mir besonders beachtenswerth, dass auch hier die Extreme etwas nach links verschoben sind, das heisst, die Maxima und Minima der Linienzahlen gerade mit denjenigen des Magnetismus zusammenfallen.

Wie aus jeder periodischen Eigenschaft, so lassen sich auch aus dem magnetischen Verhalten Wahrscheinlichkeitsrückschlüsse auf das Atomgewicht der Elemente machen.

So lässt sich schliessen, dass entsprechend den neueren Bestimmungen das Atomgewicht von Neodym[1]) grösser sei, als dasjenige von Praseodym, dass hingegegen dasselbe von Nickel entgegen den neueren Angaben grösser sein sollte als dasjenige von Kobalt.[2]) Gadolinium passt unter die Triade Ru, Rh, Pd.

Polonium und Radium erwiesen sich in den Verbindungen als magnetisch. Wenn diese Ergebnisse nicht auf Verunreinigungen mit einem bekannten paramagnetischen Element zurückzuführen sind, so wäre zu vermuthen, dass diese beiden in einem Minimum des Atomvolumens Platz zu finden hätten, dass heisst ein Atomgewicht zwischen 180 und 190 oder von 230 aufwärts haben könnten.

Weiteren Einblick in das magnetische Wesen der Elemente versprechen die im Zuge befindlichen Untersuchungen an Lösungen und Amalgamen.

Wien, Physikal. Inst. d. Univ., Juni 1899.

---

1) Vgl. C. Jones, Beibl. **23.** p. 205. 1899.

2) Vgl. hierzu die Einwände gegen diese Bestimmungen, welche Cl. Winkler, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 17. p. 236, macht.

(Eingegangen 10. Juli 1899.)

14. *Ueber die Ausströmungserscheinungen permanenter Gase; von Robert Emden.*

(Hierzu Taf. III[1]), Fig. 1—15 und Taf. IV, Diagramme *A—H*.)

(Auszug aus meiner Habilitationsschrift.)

Die eigenthümlichen Schlierengebilde, welche in einem unter geeignet grossen Drucke ausströmenden Gasstrahle auftreten, sind zuerst von E. Mach und P. Salcher[2]) beschrieben, eingehender untersucht und als stationäre Schallwellen bezeichnet worden. L. Mach[3]) hat diese Untersuchungen weiter fortgesetzt, ohne aber im wesentlichen über den Standpunkt seiner Vorgänger hinausgekommen zu sein. Unabhängig von diesen Arbeiten wurden die betreffenden Erscheinungen auch von anderen Beobachtern entdeckt. Bereits vor einer Reihe von Jahren wurden sie von B. v. Siegsfeld, mit Versuchen über Druckluft in der Maschinenfabrik von Riedinger in Augsburg beschäftigt, wahrgenommen, photographisch fixirt und ebenfalls als stationäre Schallwellen erkannt. Ich selbst beobachtete sie mit unbewaffnetem Auge, als ich einen Strahl ausströmender Luft sehr nahe an der Pupille vorüberstreichen liess. Und von neuem entdeckte sie L. Sohncke, mit Schlierenbeobachtungen beschäftigt, im Herbst 1897. Welche Ansichten sich Sohncke über diese Erscheinung, die er lediglich constatiren, aber nicht mehr messend verfolgen konnte, gebildet hatte, ist mir nicht bekannt geworden.[4]) Ein eingehenderes Studium der Erscheinung erschien selbst mit Rücksicht auf die oben erwähnten vorliegenden Arbeiten um so mehr am Platze, als L. Mach selbst seine Untersuchungen als vor-

---

1) Die Erklärung der Taf. III befindet sich am Schluss des Heftes.

2) E. Mach u. P. Salcher, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Klasse **98.** Abth. II. 7. Novbr. 1889; Wied. Ann. **41.** p. 144. 1890.

3) L. Mach, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Klasse **106.** Abth. II. Dec. 1897.

4) In neuester Zeit hat auch Parenty, Ann. de Chimie et de Physique (7) **12.** p. 289. 1897, in Strahlen ausströmenden Dampfes periodische Dichteänderungen nachgewiesen.

wiegend qualitative bezeichnet. Die Versuche von L. Mach beschränken sich auf atmosphärische Luft. Von mir wurden sie ausserdem noch auf zwei weitere sich möglichst verschieden verhaltende Gase, Kohlensäure und Wasserstoff, ausgedehnt.

Bevor wir ins Detail eingehen, erscheint es mir angebracht, unsere Aufmerksamkeit auf eine andere Naturerscheinung zu richten, welche uns die im Luftstrahl auftretenden Erscheinungen gleichsam im Modell versinnbildlicht. In Flüssen und Canälen nehmen wir oft wahr, wie sich nach Hindernissen, die das strömende Wasser zu überwinden hatte, stationäre Wellen bilden, Stellen angehäufter potentieller Energie, die, quer über den Fluss gelagert, ruhig an ihrem Orte verharren, während das Wasser durch sie hindurchströmt. Bedingung hierfür ist offenbar die, dass sich diese Wellen in solcher Gestalt entwickeln können, dass sie sich im ruhenden Flusse mit derjenigen Geschwindigkeit fortpflanzen würden, mit welcher derselbe in Wirklichkeit durch sie hindurchströmt. Wir werden sehen, dass auch der Luftstrahl von einem gewissen Ueberdrucke an stets mit derjenigen Geschwindigkeit strömt, mit welcher eine Schallwelle sich in ihm fortpflanzt. Im Luftstrahle sind dann die Bedingungen gegeben, dass sich stationäre Luftwellen, entsprechend den geschilderten Wasserwellen, bilden können. Dass sie dann auch wirklich auftreten, zeigt die Beobachtung.

I. Versuche und deren Ergebnisse.

Die Druckluftanlage des physikalischen Institutes besteht aus dem durch einen Gasmotor getriebenen Compressor, welcher die comprimirte Luft in zwei eisernen, unter sich communicirenden Cylindern von je 300 l Inhalt aufspeichert. Sie dürfen bis 10 Atmosphären Ueberdruck beansprucht werden. — Aus den Reservoiren wurde die Luft in ein grosses Reducirventil geleitet, das den Druck von 10 Atmosphären bis auf Bruchtheile einer Atmosphäre hinunter constant zu halten und zu messen gestattet, und gelangte von da durch ein kurzes, 30 cm langes Schlauchstück zur Ausflussdüse.

Versucht man die Entwickelung der im Strahl auftretenden Schlierengebilde in ihren ersten Stadien zu verfolgen, so ergiebt sich bald, dass zu diesem Zwecke die photographische

Platte dem Auge ausserordentlich überlegen ist. Die Platte lässt bei so kleinen Ueberdrucken, dass an einem objectiv entworfenen Strahlbilde längst keine Structur mehr zu erkennen ist, solche noch deutlich wahrnehmen. Die im Folgenden wiedergegebenen Messungen der Wellenlänge wurden deshalb ausschliesslich auf photographischen Platten (13 × 18 cm) ausgeführt, die ca. 300 an Zahl zu den definitiven Messungen hergestellt wurden.

Behufs objectiver Darstellung des Strahlbildes wurde eine Methode angewandt, die, wie ich nachträglich bemerkte,

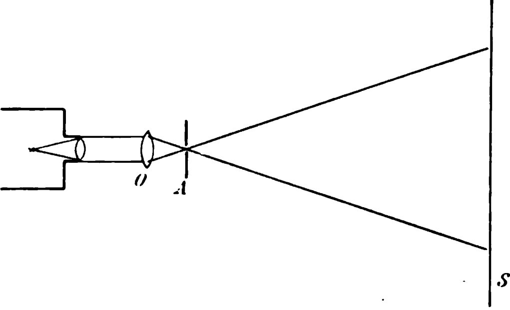


Fig. 1.

im wesentlichen (für Sonnenlicht) bereits von Dvořák[1]) beschrieben wurde. Lässt man die parallel gemachten Strahlen einer elektrischen Lampe auf eine Sammellinse oder ein photographisches Object *O* fallen, in dessen Brennpunkt *A* sie sich weiterhin kreuzen, so kann man auf dem also beleuchteten Projectionsschirme *S* schon die Schlieren ausströmenden Gases, heisser Luft etc. beobachten. Diese Versuchsanordnung (vgl. Figur 1) kann ganz ausserordentlich empfindlich gemacht werden, indem man im Brennpunkt *A* eine Blende mit kleiner, kreisförmiger Oeffnung anbringt und so für möglichst punktförmige Beleuchtung des schlierengebenden Gebildes sorgt. Die Empfindlichkeit kann leicht so weit gesteigert werden, dass man von den Fingerspitzen der Hand erwärmte Luft aufsteigen sieht. Brennweite des Objectivs, Oeffnung der Blende bei *A*, Entfernung Objectiv—Projectionsschirm (in meinen Versuchen

1) V. Dvořák, Wied. Ann. 9. p. 502. 1879.

6—10 m) muss der zur Verfügung stehenden Lichtmenge, der erforderlichen Helligkeit etc. angepasst werden, was ohne jede Schwierigkeit in kürzester Zeit gelingt. Von grösstem Einfluss ist aber der Abstand des schlierengebenden Gebildes vom Projectionsschirm. Am schärfsten erscheint die Zeichnung des Luftstrahles, wenn derselbe sich nur wenige, 5—15, Centimeter vor dem Schirme befindet. Das hat zwar den Vortheil, dass die Länge des Strahls in natürlicher Grösse sich abbildet, lässt aber aus eben diesem Grunde diese Anordnung zur Demonstration einem grösseren Auditorium gegenüber nicht zu. (Ein Verfahren für

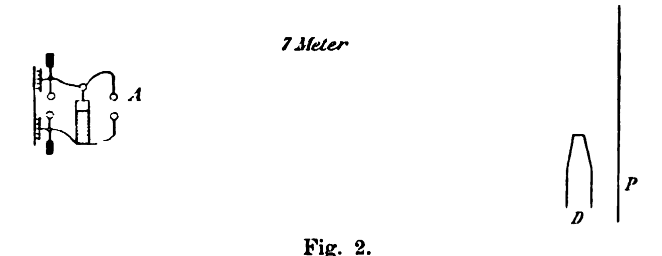


Fig. 2.

diesen Zweck wird weiter unten angegeben; vgl. auch L. Mach, l. c. p. 1028.) Unterbricht man den Strahlengang durch einen Momentverschluss, so können nach diesem Verfahren auch photographische Aufnahmen gemacht werden (ein Theil der Wasserstoffstrahlbilder wurde so hergestellt). Man kann zu diesem Zwecke aber weit einfacher verfahren, indem man alle Linsencombinationen bei Seite lässt und dadurch eine hinreichend punktförmige Beleuchtung des Strahles zu Stande bringt, dass man in grösserer Entfernung von demselben den kurzen Funken einer Leydenerflasche springen lässt. Zweckmässig springt der Funke in Richtung des Strahles. Die im Handel befindlichen Platten sind hinreichend empfindlich[1]) und man erhält so mit den allereinfachsten Hülfsmitteln Bilder, die in Bezug auf Schärfe und Klarheit der Zeichnung den weitgehendsten Anforderungen genügen. Auf diese Weise (vgl. Fig. 2) wurden die im Folgenden zu beschreibenden Strahlbilder fast sämmtlich (die Ausnahme ist bereits erwähnt) hergestellt; also

1) Zur Entwickelung leistet starker Hydrochinonentwickler vorzügliche Dienste.

bei *A* der elektrische Funke, bei *P*, in einem Abstande von ca. 7 m, die photographische Platte im Formate 13 × 18 cm, und in einem Abstande von 5—15 cm vor derselben der zu untersuchende Strahl *D*. Diese günstigste Entfernung des Strahles von der Platte, der abhängt vom Durchmesser der Düse, bez. des Strahles, kann sehr leicht ermittelt werden, indem man von *A* aus den Strahl mit dem divergirenden Lichtbündel einer Bogenlampe beleuchtet und die schärfste Zeichnung der Schlieren auf einem an Stelle der Platte *P* gesetzten weissen Schirme sucht. Der Gang der Versuche war demnach folgender: Für einen mittleren Ueberdruck, ca. 3—4 Atmosphären, wurde für eine bestimmte Düse auf die eben geschilderte Art und Weise der günstigste Abstand des Strahles vom Schirme bestimmt. An Stelle des Schirmes wurde dann die Platte gebracht, was am zweckmässigsten mit Hülfe einer gewöhnlichen Kasette und eines photographischen Apparats geschieht, dessen Rückseite dem Strahle zugekehrt wird, und wurden dann mit Hülfe der Funkenbeleuchtung Serienaufnahmen gemacht, indem man mittels des Reductionsventiles von grösseren zu kleineren Drucken in immer enger werdenden Intervallen herabstieg. Die Ausmessung der entwickelten Platten ergab dann den gegenseitigen Abstand der längs des Strahls periodisch auftretenden Schlierengebilde in (bis auf einen verschwindend kleinen, nicht messbaren Fehler) natürlicher Grösse.

Betrachtet man das nach der eben geschilderten Schlierenmethode entworfene Bild eines Strahles von Luft, oder noch besser Kohlensäure oder Leuchtgas, der nur mit wenigen Millimeter Ueberdruck einer Düse entströmt, so sieht man denselben als schlanke Säule vom Durchmesser der Düsenöffnung emporsteigen, unter günstigen Umständen bis zu einer Höhe von 30—40 Centimetern. Manchmal verschwindet diese Säule ohne jede Begleiterscheinung in der Luft, meistens ist sie von einer kleinen Wirbelsäule gekrönt. Bei weiterer Steigerung des Druckes wird die Gassäule kürzer, bis schliesslich die Wirbel unmittelbar der Düsenmündung trichterförmig entquellen. Ist der Druck auf circa $^1/_5$ Atmosphäre gestiegen, so kommt wieder ein 2 bis 3 Centimeter langer, meistens sich ganz allmählich verjüngender Strahl zum Vorschein. Steigt der Druck weiter, so wird der Strahl deutlicher und länger und plötzlich sieht man in ihm

in ziemlich gleichen Abständen helle, leuchtende, dünne Scheibchen auftreten, die den Strahl senkrecht durchsetzen, oft 10 bis 12 an Zahl. Die ersten Scheibchen haben genau den Durchmesser der Düse; wie der Strahl sich verjüngt, werden sie schmäler. Die Untersuchung mit der photographischen Platte zeigt, dass diese Scheibchen schon bei Drucken vorhanden sind, bei denen sie das Auge noch nicht wahrnimmt. (Vgl. Taf. III, Fig. 1 u. 5.) Wir benutzen zur weiteren Beschreibung die Figuren der Tafel III. Bei weiterer Drucksteigerung wächst der gegenseitige Abstand dieser Scheibchen und gleichzeitig nimmt man wahr, dass der Strahl zwischen je zwei aufeinander folgenden Scheibchen sich schwach ausbaucht, während sein Querschnitt an den der Düse zunächst liegenden Scheibchen dem Düsendurchmesser gleich bleibt, gegen das Strahlende hin aber kleiner wird. Diese Ausbauchungen nehmen immer mehr zu, und bald treten zwischen den Enden je zweier Scheibchen, sowie zwischen dem ersten und der Düse zwei gerade, dunkle Linien auf, die sich gleichsam wie die Diagonalen eines Vierecks kreuzen (Taf. III, Fig. 2 u. 6). Die Ausbauchungen nehmen nun immer mehr zu, gleichzeitig krümmen sich diese erst gerade auftretenden Linien immer mehr nach aussen, wodurch ihr Schnittpunkt dem nächstfolgenden Scheibchen näher rückt; das kleine Dreieck oberhalb des Schnittpunktes scheint sich seinem Umfange nach mit Licht anzufüllen. (Taf. III, Fig. 3 u. 7.) Im weiteren Verlaufe schneiden sich die erwähnten Linien nicht mehr, sondern sind an Stelle eines Schnittpunktes durch eine gerade (Taf. III, Fig. 4 u. 8) Linie verbunden, die sich, wie die Betrachtung der Vacuumstrahlen (Taf. III, Fig. 14 u. 15) zeigt, später in Richtung des Strahles schwach auszubiegen scheint. Der Charakter dieser bei den höchsten angewandten Drucken auftretenden Schlierengebilde wird durch die beigefügten Strahlbilder deutlicher zur Anschauung gebracht, als es die Beschreibung vermag. Alle diese Erscheinungen treten, wie schon bemerkt, nicht nur zwischen dem ersten Scheibchen und der Düse auf, sondern wiederholen sich in anfangs gleicher Grösse, bis der Strahl durch Reibung an der ihn umgebenben Luft Wirbel veranlasst und sich in diesen auflöst. Lässt man den Druck allmählich sinken, so wiederholen sich alle diese Erscheinungen

in umgekehrter Reihenfolge, und dadurch, dass die Scheibchen sich gegenseitig nähern, hat man, wie auch L. Mach bemerkt, den Eindruck, als würde der Strahl in die Düse zurückkriechen.

Die Erscheinungen sind also im wesentlichen dieselben, wie in den Arbeiten meiner Vorgänger, müssen aber nach meiner Auffassung in einem Punkte anders ausgelegt werden. Es kann ja wohl kein Zweifel herrschen, dass diese merkwürdigen, im Strahlbilde in regelmässiger Folge auftretenden Gebilde durch periodische Dichteänderungen des Strahles verursacht sind[1]), sodass wir, dem allgemeinen Sprachgebrauche folgend, sagen können, es treten in dem Strahle Schallwellen auf. Da diese ihre Stellung im Raume nicht ändern (wie die Untersuchung des Strahles bei Dauerbeleuchtung zeigt), so specialisiren wir sie als stationäre Schallwellen, als welche sie E. Mach schon erkannt hat. Ihre Wellenlänge wird gemessen durch den Abstand zweier aufeinander folgender, sich entsprechender Punkte des Strahlbildes, also durch den Abstand zweier Scheibchen. Ueber die Form dieser Wellen bin ich jedoch anderer Meinung, wie E. und L. Mach, welche conische Schallwellen annehmen. Ich halte vielmehr dafür, dass wir es im Strahle mit *ebenen* stationären Schallwellen zu thun haben, die denselben in gleichen Abständen quer zu seiner Strömungsrichtung durchsetzen, wie die oben geschilderten stationären Wasserwellen den Fluss. Denn eine stationäre Wellenbewegung kann nur zu Stande kommen in einem Mittel, das sich an jeder Stelle mit einer Geschwindigkeit bewegt, die genau gleich und entgegengesetzt derjenigen ist, mit welcher sich an jenen Stellen die Wellen durch das ruhende Medium fortpflanzen würden.[2]) Wie wir die Erschütterungswelle, die sich längs eines gespannten Drahtes fortpflanzt, stationär, d. h. im Raume feststehend, machen, wenn wir den ganzen Draht mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle dieser entgegen bewegen, so können wir auch die in einer Luftsäule sich fortpflanzenden Schallwellen stationär machen, indem wir jene, in unserem Falle den Strahl, mit der betreffenden Schallgeschwindigkeit ihnen

1) Dass wir es nicht mit blossen Trübungen des Strahles zu thun haben, wird später gezeigt werden.

2) Vgl. H. Lamb, Einleitung in die Hydrodynamik. Deutsch v. Reiff. Cap. VIII. § 152. p. 258.

ȝen bewegen. Der Umstand, dass wir im Luftstrahle ıäre Schallwellen wahrnehmen, ist ein directer Beweis , dass er an jeder Stelle mit der dort herrschenden .geschwindigkeit strömt. Durch eine einfache Transsbewegung des Mediums, als welche wir den Luftstrahl ısen, können aber nur solche Wellen stationär gemacht ːn, die sich nur in *einer* Richtung fortpflanzen, also ebene ·n, nicht aber conische, die sich im Raume ausbreiten. Ueberlegungen machen es äusserst wahrscheinlich, dass s im Strahle mit ebenen, nicht conischen Wellen zu thun ι, und die Wellenlänge, die wir auf Grund dieser Anim II. Abschnitt berechnen, beweist durch ihre Uebermmung mit den Messungen diese Annahme.

Ɔie im Strahlbilde auftretenden, sich kreuzenden Linien ich für eine Linsenwirkung des Strahles, bei der es auf ɑ äussere Form nicht weniger ankommt als auf seine ɘ Structur; sie kommen auf ähnliche Weise zu Stande die Brennlinien einer Sammellinse. Die Wirkung des les als Cylinderlinse mit variablem Querschnitt und blem Brechungsexponenten wird durch folgende Verbewiesen. Wir beleuchten den Strahl aus grosser Entɑg mit einer kleinen Lichtquelle. Rücken wir mit dem le dem Projektionsschirme immer näher, so müsste das wenn es irgend wie einem Schatten entspräche, immer fer und deutlicher werden. Das ist keineswegs der Fall; ι wir mit dem Strahl bis auf 1 cm Entfernung an den m heran, so ist auf demselben von einem Strahlbilde über; nichts mehr wahrzunehmen. (Es beweist dies zugleich, diese verschieden hellen Partien des Strahlbildes nicht hren von Trübungen des Strahles, etwa durch Konden ı von Wasserdampf.) Rückt man mit dem Strahle vom me weg, so fängt der Strahl bei etwa 2 cm Entfernung ınz schwach mit seinem charakteristischen Bilde sichtbar erden. Vergrössert man den Abstand continuirlich, so ɑt das Bild immer deutlicher zum Vorschein um dann ːr verschwommener zu werden und wieder zu verınden. (Dies Erscheinen des Bildes wurde durch eine hl Photographien deutlich zur Anschauung gebracht.) ⁝ Erscheinungen können nur durch eine Linsenwirkung

des Strahles erklärt werden. Ebenso deutlich tritt dies bei folgendem Versuche hervor. Von einer hellen, kleinen Lichtquelle fällt das Licht in 1—2 m Abstand auf ein photographisches Objectiv von 45 cm Brennweite; hinter demselben befindet sich ausserhalb der doppelten Brennweite der Auffangsschirm mit grossem, hellem Gesichtsfeld. Es gelingt natürlich leicht, auf der anderen Seite des Objectivs die Ebene zu finden, die zur Auffangsebene conjugiert ist. Bringen wir in diese Ebene den Strahl, so erscheint auf dem Schirme die Umgrenzung der Düse in grösstmöglicher Schärfe, von einem Strahle aber ist keine Spur wahrzunehmen. Rücken wir den Strahl eine Kleinigkeit aus dieser Ebene heraus, und zwar vom Objectiv weg, so erscheint er (stark vergrössert) genau so wie im Dvořák'schen Verfahren, sodass sich diese Versuchsanordnung zur Demonstration des Strahles in einem grösseren Auditorium sehr wohl eignet. Auch wenn wir den Strahl in Richtung auf das Objectiv zu etwas aus jener Ebene verschieben, erscheint wiederum ein Strahlbild, aber mit dem Unterschiede, dass die Vertheilung von Hell und Dunkel gerade entgegengesetzt ist, wie im ersten Falle. Einer Linsenwirkung des Strahles haben wir es auch zuzuschreiben, dass wir das charakteristische Strahlbild mit unbewaffnetem Auge wahrnehmen, wenn wir ihn sehr nahe oder weit entfernt von der Pupille vorbeistreichen lassen, während wir dasselbe in einer Entfernung gleich der deutlichen Sehweite nicht wahrnehmen. Da es unmöglich ist, aus einem Linsenbild Gestalt und Brechungsexponent der Linse zu bestimmen, so ist die einzig zulässige Interpretation der Strahlbilder folgende: Wir sehen im Strahlbilde längs dessen Axe ein und dieselbe Schlierenfigur in gleichen Abständen auftreten; es wird deshalb auch im Strahle längs dessen Axe dieselbe Dichteänderung sich periodisch wiederholen, und die Länge dieser Periode, die Wellenlänge dieser stationären Schallwellen, ist bei der von mir getroffenen Anordnung, aus grosser Entfernung punktförmig beleuchteter Strahl wenige Centimeter von der Platte entfernt, gleich dem in Strahlrichtung gemessenen Abstand gleicher Punkte der aufeinander folgenden Schlierenbilder, speciell der Scheibchen. Denn diese Stellen grösster Helligkeitsdifferenzen, die den Strahl senkrecht durchqueren, dürfen wir ansehen als eine Wirkung der Stellen grösster

Dichteänderung im Strahl, den Wellenbergen der den Strahl quer durchsetzenden, ebenen Schallwellen, deren erste sich in der Düsenöffnung oder deren nächster Nähe bildet.

Wir gehen nunmehr über zur Darstellung des gewonnenen Beobachtungsmaterials. In allererster Linie ist die Wellenlänge der im Strahle auftretenden Schallwellen zu bestimmen als Function des Ausflussdruckes und des Düsendurchmessers für verschiedene Gase, bei meinen Versuchen für atmosphärische Luft, Kohlensäure und Wasserstoff. Von fundamentaler Bedeutung für die Theorie der Erscheinung ist ferner die Bestimmung des Ausflussdruckes, bei dem sich diese Schallwellen zu entwickeln beginnen. Beide Aufgaben sind mit genügender Genauigkeit gelöst worden.

Die Wellenlänge λ bestimmt sich in Millimetern durch den ebenfalls in diesem Maasse gemessenen Abstand zweier Scheibchen auf der photographischen Platte. Es wurde in der Regel der Abstand einer Anzahl aufeinander folgender Scheibchen von der Düse gemessen und man erhielt so Werthe für λ, $2 \times \lambda$, $3 \times \lambda$ etc. Aus diesen wurde dann das Mittel genommen und dabei alle Scheibchen bis zu demjenigen in Rechnung gebracht, bei dem die Wellenlänge deutlich abnahm, was früher oder später in jedem Strahle eintritt und wohl auf Reibung des Strahles an der umgebenden Luft zurückzuführen ist. Es zeigte sich ferner, dass der gegenseitige Abstand der Scheibchen gleich ist demjenigen des ersten Scheibchens von der Düsenmündung, sodass man berechtigt ist, dorthin den Ort des ersten Wellenberges zu verlegen. Nur in ganz wenigen Ausnahmefällen zeigte es sich, dass derselbe etwas weiter in der Düse zurück oder mehr vor derselben gelegen war; in letzterem Falle war er natürlich direct zu beobachten. In beiden Fällen wurde nicht an der Düsenmündung, sondern am ersten Scheibchen gemessen. Da diese Scheibchen manchmal nicht ganz senkrecht zur Strahlaxe lagen, wurden diese Messungen stets an beiden Scheibchenenden ausgeführt. Ich gebe ein Beispiel. Düse *A*. Unter 0, I, II etc. ist die Lage der Düsenmündung und des rechten, bez. linken Endes des 1., 2. etc. Scheibchens in Millimetern angegeben.

Die Ausmessung der Platte, Nr. 62, $p = 3$ Atm. (Ueberdruck), ergab:

0		I		II		III		IV		V
7,65	4,4	12,05	9,05	16,7	13,35	21,0	17,35	25,0	21,45	29,1 mm,
12,8	4,4	18,2	9,1	22,9	13,2	27,0	17,2	31,0	21,7	35,5 mm,

$\lambda = 4,4 \quad 2\lambda = 2 . 4,55 \quad 3\lambda = 3 . 4,4 \quad 4\lambda = 4 . 4,3 \quad 5\lambda = 5 . 4,3$ mm,

$\lambda = 4,4$ mm.

Man kann wohl annehmen, dass die Fehler der Wellenlängenmessungen wenig mehr als 0,1—0,2 mm betragen. Nicht so genau scheinen die Druckbestimmungen zu sein, da das durch Federkraft regulirte Reducirventil sich bei den höheren Drucken nicht immer gleich einstellte. Durch die grosse Zahl der Beobachtungen ist dieser Fehler so gut wie möglich eliminirt worden.

Für jede Düse wurde die Abhängigkeit der Wellenlänge vom Ausflussdruck durch ein Diagramm Taf. IV (Diagramme A—H) dargestellt. Als Abscissen sind die Angaben des Reducirventils[1]), um 1 erhöht, also der in demselben wirkende Druck, aufgetragen; 1 Atm. = 1 cm. (In den folgenden Beobachtungstabellen sind unter p die direct abgelesenen Ueberdrucke angeführt. Um die Curve der Wellenlänge auf diese zu beziehen, muss deren Abscissenaxe um die Einheit nach rechts verschoben werden.) Die λ sind in 10fachem Maassstabe als Ordinaten aufgetragen.[2]) Die so erhaltenen Curven werden später discutirt werden. Aus den Diagrammen ist ersichtlich, dass durch eine äusserst geringe, 0,1 Atm. = 1 mm kaum übersteigende Extrapolation der Schnittpunkt dieser Curven mit der Abscissenaxe, der Ort der Wellenlänge Null, sehr genau bestimmt werden konnte, also auch der Druck, bei dem sich die Wellen im Strahle zu entwickeln beginnen. Zur Sicherheit wurden stets noch photographische Aufnahmen bei einem 0,05—0,1 Atm. niederen Drucke gemacht, aber in keinem Falle konnte eine Andeutung von Wellen wahrgenommen werden. Dieser kritische Druck spielt in der Theorie eine fundamentale Rolle; durch das geschilderte Verfahren konnte er mit grösster Genauigkeit ermittelt werden.

Zur Verwendung kamen acht verschiedene Düsen. Die Düsen A, B, C, D sind schwach conische, vorne mit scharfem

---

1) Der Nullpunkt des Manometers liegt bei $p = 1$.

2) Taf. IV giebt die Originalcurven stark verkleinert wieder.

Rande versehene Messingdüsen von den Durchmessern 3,63, 2,65, 1,48 u. 0,3 mm.

E u. *F* sind Flachdüsen. Die Deckplatte bei *E* ist 0,1 mm starkes Eisenblech, der Durchmesser der Oeffnung 3,95 mm. Bei *F* ist die Deckplatte ein bedeutend dickeres, 0,75 mm starkes Messingscheibchen, der Durchmesser der Oeffnung 2,72 mm. Die Düsen *G* u. *H*, die bei den Vacuumstrahlen in Verwendung kamen, sind wiederum conische Düsen von den Oeffnungsdurchmessern 3,5 u. 2,9 mm.

I. *Atmosphärische Luft.* Angewandt wurde gewöhnliche atmosphärische Luft. Ein Trocknen derselben war in Anbetracht der ausserordentlich grossen zur Verwendung kommenden Luftmengen nicht gut möglich. Doch war vor den grösseren Reservoiren ein kleineres eingeschaltet, in dem sich mitgerissenes Oel der Pumpe und wohl auch ein Theil der Feuchtigkeit niederschlagen konnte. Eine Trübung des Strahles durch condensirtes Wasser oder gar Eis war nie bemerkbar.

In den Diagrammen der Wellenlänge sind die Messungen, die sich auf atmosphärische Luft beziehen, mit liegenden Kreuzchen × eingetragen; jedes Kreuzchen ist durch Ausmessung einer photographischen Platte gewonnen. Jedes Diagramm ist mit dem Buchstaben der entsprechenden Düse gekennzeichnet. Die Messungen ergaben:

Diagramm *A*.

Düsendurchmesser 3,63 mm. Entfernung Düse-Platte = 15 cm.

Nr. der Platte	p (Ueberdruck) in Atm.	λ mm	Nr. der Platte	p (Ueberdruck) in Atm.	λ mm
56	7	7,0	68	1,9	2,85
57	6	6,8	69	1,8	2,55
58	5	6,32	70	1,7	2,58
59	4,5	6,06	71	1,6	2,15
60	4	5,67	72	1,5	1,9
61	3,5	5,28	73	1,4	1,42
62	3,0	4,4	74	1,3	1,15
63	2,8	4,3	75	1,2	0,7
64	2,6	4,05	76	1,1	?
65	2,4	3,8	77	1,0	*
66	2,2	3,28	78	0,9	*
67	2,0	2,95			

* Nichts mehr wahrzunehmen.

Die Curve schneidet die Abscissenaxe bei einem Druck von 2,2 Atm. = 1,2 Atm. Ueberdruck.

Diagramm *B.*

Düsendurchmesser $d = 2{,}65$. Entfernung Düse-Platte = 15 cm.

Die Curve der Wellenlängen schneidet die Abscissenaxe bei 1,9 Atm. = 0,9 Atm. Ueberdruck.

Diagramm *C.*

Düsendurchmesser 1,48 mm. Enfernung Düse-Platte 5 cm.

Die Curve der Wellenlängen schneidet die Abscissenaxe bei 1,9 Atm. = 0,9 Atm. Ueberdruck.

Diagramm *D.*

Düsendurchmesser 0,3 mm. Entfernung Düse-Platte 6 cm.

Die Curve der Wellenlänge schneidet die Abscissenaxe bei 1,9 Atm. = 0,9 Atm. Ueberdruck.

Diagramm *E.*

Flache Düse $d = 3{,}95$ mm. Entfernung Düse-Platte = 15 cm.

Die Curve der Wellenlängen schneidet die Abscissenaxe bei 2 Atm. = 1 Atm. Ueberdruck.

Diagramm *F.*

Flache Düse $d = 2{,}72$ mm. Entfernung Düse-Platte = 15 cm.

Die Curve der Wellenlängen schneidet die Abscissenaxe bei 1,9 Atm. = 0,9 Atm. Ueberdruck.

Diese Wellenlängen für atmosphärische Luft wurden durch Ausmessung von 104 photographischen Platten gewonnen; für die später zu besprechenden Vacuumstrahlen kommen noch 28 Platten hinzu.

II. Kohlensäure. Zur Verwendung kam die gewöhnliche flüssige Kohlensäure des Handels. Es erwies sich als nicht praktisch, dieselbe mit Hülfe des Reducirventils direct den Cylindern, in denen sie geliefert wird, zu entnehmen. Auch wäre die gasförmige Kohlensäure dann sicherlich unter anderen Temperaturbedingungen gestanden, wie die erst verwendete atmosphärische Luft. Deshalb wurden die grossen Luftreservoire mittels einer Wasserstrahlpumpe möglichst evacuirt, mit etwas

Kohlensäure angefüllt und dieser Ausspülungsprocess zweimal wiederholt. Schliesslich liess ich Kohlensäure bis zu 10 Atm. Druck einströmen und stellte, so oft als nöthig, diesen Druck wieder her. Im übrigen wurden die Messungen auf dieselbe Art und Weise vorgenommen, wie bei Luft. In die bereits für Luft vorgelegten Diagramme sind die für Kohlensäure ermittelten Wellenlängen mit senkrechte Kreuzchen + eingetragen. Es ergaben sich:

Diagramm *A*.

$d = 3{,}63$ mm. Entfernung Düse-Platte = 15 cm.

Nr. der Platte	p (Ueberdruck) in Atm.	λ mm	Nr. der Platte	p (Ueberdruck) in Atm.	λ mm
211	7,5	7,95	216	2,1	2,9
212	6	6,8	217	1,6	1,75
213	5	6,1	218	1,3	1
214	4	5,5	219	1,1	—
215	3,1	4,5	220	0,9	—

Die Curve dieser Wellenlänge fällt vollständig zusammen mit derjenigen, die wir bereits für atmosphärische Luft gefunden. Die Wellenlänge der in Kohlensäure und Luft auftretenden stationären Schallwellen ist dieselbe unter gleichen Bedingungen. Diese Schallwellen beginnen sich bei beiden unter Benutzung der Düse *A* bei 1,2 Atm. Ueberdruck zu entwickeln.

Diagramm *B*.

Düsendurchmesser $d = 2{,}65$ mm. $E = 7$ cm.

Die Curve der Wellenlänge fällt wiederum vollständig mit der für Luft gefundenen zusammen; ihr Schnittpunkt mit der Abscissenaxe liegt ebenfalls bei 1,9 Atm. = 0,9 Atm. Ueberdruck.

Da sich für Kohlensäure und Luft diese völlige Uebereinstimmung der Wellenlängen ergeben hatte, wurden die Messungen für Kohlensäure an den übrigen Düsen nicht mehr mit dieser Vollständigkeit durchgeführt. Es wurden die Messungen nur noch bei tieferen Drucken vorgenommen, um die für die Theorie in erster Linie maassgebende Grösse, den Schnittpunkt der Wellenlänge mit der Abscissenaxe zu prüfen.

Diagramm *C.*

d = 1,48 mm. E = 2,5 cm.

Diagramm *D.*

d = 0,3 mm. E = 2,5 cm.

Diagramm *F.*

Ebene Düse, d = 2,72 mm. E = 2,5 cm.

In allen drei Diagrammen ist dieselbe Uebereinstimmung zwischen Kohlensäure und Luft vorhanden, und der betreffende Schnittpunkt liegt bei 1,9 Atm. = 0,9 Atm. Ueberdruck.

Zu diesen Messungen wurden 33 Aufnahmen gemacht und ca. 20 Kilo Kohlensäure verbraucht.

III. Wasserstoff. Derselbe war nicht chemisch rein, hatte aber immerhin ein specifisches Gewicht von nur 0,12 (statt 0,069). Aus den schon bei den Versuchen mit Kohlensäure auseinandergesetzten Gründen war es nicht angezeigt, denselben direct den Stahlcylindern, in denen er unter 150 Atmosphären Druck geliefert wurde, zu entnehmen. Vielmehr wurden wie dort die Luftreservoire ausgepumpt, mit Wasserstoff ausgespült und schliesslich bis 10 Atmosphären Druck mit demselben angefüllt. Die Resultate der Messungen sind in den bereits für Luft und Kohlensäure angelegten Diagrammen mit kleinen Kreisen eingetragen.

Diagramm *B.*

d = 2,65 mm. E = 25 cm.

Nr. der Platte	p (Ueberdruck) in Atm.	λ mm	Nr. der Platte	p (Ueberdruck) in Atm.	λ mm
243	6,5	5,75	248	2,1	2,75
244	5	5,0	249	1,85	2.31
245	4	4,5	250	1,6	1,80
246	3.1	4,0	251	1,35	1,0
247	2,6	3,4	252	1,1	*

* Platte verunglückt.

Die so erhaltenen Photogramme unterscheiden sich von den entsprechenden bei Luft insofern, als der Strahl von kräftigen Wirbeln umhüllt ist, die der grossen Dichtigkeitsdifferenzen wegen hier besonders stark hervortreten. Diese Wirbelbilder, die schon bei Kohlensäure sehr kräftig hervortreten, sind hier so stark entwickelt, dass sie das eigentliche

Strahlbild fast vollständig verdecken und nur wenige Wellen zu deren Längenmessung frei lassen. E. und L. Mach haben nun ein sehr sinnreiches Mittel angegeben, den Strahl aus dieser Umhüllung herauszuschälen. Vergrössert man die Belichtungsdauer, so integrirt man gleichsam über diese rasch und regellos wirbelnden Gebilde, während das stationäre Strahlbild darunter nicht leidet. Es wurde deshalb die bereits früher beschriebene Versuchsanordnung gewählt, der Funke durch das auf eine kleine Blende concentrirte Bogenlicht ersetzt und das Lichtbündel durch einen sehr raschen Momentverschluss unterbrochen. Dadurch werden die Wellen auf eine bedeutend längere Strecke hin messbar gemacht; die Wirbel sind verschwunden.

Die Messungen ergaben in diesem Falle:

Nr. der Platte	p (Ueberdr.) in Atm.	λ mm		Nr. der Platte	p (Ueberdr.) in Atm.	λ mm	
253	6,5	5,9	$E = 15$ cm	257	2,1	2,7	$E = 15$ cm
254	5	5,0		258	1,6	2,33	
255	4	4,6		259	1,35	1,82	
256	3,1	4,0		260	1,1	0,8-0,9	

Die Wellenlängen stimmen für Dauerbeleuchtung und Funkenbeleuchtung so sehr überein, dass 2 mal zwei Kreischen zur vollständigen Deckung gelangen. Ferner wird bestätigt, was wir schon nach dem Verhalten der Kohlensäure zu schliessen erwarten konnten: *Die Curve der Wellenlängen fällt auch für Wasserstoff vollständig mit derjenigen für Luft und Kohlensäure zusammen; wie bei jenen ist auch ihr Schnittpunkt mit der Abscissenaxe bei 1,9 Atm. Unter gleichen Bedingungen besitzen die in Luft-, Kohlensäure- und Wasserstoffstrahlen auftretenden stationären Schallwellen dieselbe Wellenlänge.* Was für diese eine Düse gefunden, bestätigt sich auch bei den übrigen.

Diagramm *C.*

$d = 1{,}48$ mm. $E = 20$ cm.

Die Curve fällt vollständig mit der für Luft und Kohlensäure zusammen; der betreffende Schnittpunkt liegt auch bei 1,9 Atm. = 0,9 Atm. Ueberdruck.

Diagramm *D.*

$d = 0{,}3$ mm. $E = 17$ cm.

Verhältnisse dieselben wie bei Luft und Kohlensäure. Schnittpunkt bei 1,9 Atm.

Diagramm *A.*

$d = 3{,}63$ mm. $E = 40$ cm.

Dieselben Verhältnisse wie bei Luft und Kohlensäure. Schnittpunkt bei 22 Atm. = 1,2 Atm. Ueberdruck.

Zur Verwendung kamen ca. 15000 Liter Wasserstoff; dabei wurden 36 photographische Wellenlängebestimmungen vorgenommen.

Wir haben somit zwei Hauptresultate unserer Untersuchungen gewonnen:

1. *Strömt Luft, Kohlensäure oder Wasserstoff unter gleichem genügend grossen Ueberdrucke aus, so haben bei derselben Düse und demselben Drucke die in den Ausflussstrahlen auftretenden stationären Schallwellen in diesen Gasen dieselbe Wellenlänge.*

2. *Der Ausflussdruck, bei dem sich diese stationären Schallwellen zu entwickeln beginnen, ist für Luft, Kohlensäure und Wasserstoff derselbe und zwar gleich 0,9 Atm. Ueberdruck gleich 1,9 Atm. Ausflussdruck.*

Ordnen wir die Gase nach der sie in erster Linie charakterisirenden Grösse, der Dichte, oder was beinahe auf dasselbe hinaus kommt, der Schallgeschwindigkeit, so erhalten wir eine Reihe, an deren Enden Kohlensäure und Wasserstoff stehen, während Luft ungefähr in der Mitte liegt. Mit grösster Wahrscheinlichkeit können wir wohl die für diese drei Gase gefundenen Gesetze auch auf die übrigen Gase ausdehnen und erhalten das Gesetz, das wir im folgenden Capitel theoretisch ableiten werden:

Die in den Ausflussstrahlen aller Gase auftretenden, stationären Schallgebilde haben innerhalb der Beobachtungsgrenzen unter sonst gleichen Umständen dieselbe Wellenlänge und beginnen sich bei denselben Ausflussdrucken von 1,9 Atm. = 0,9 Atm. Ueberdruck zu entwickeln.

Wir gehen über zur analytischen Formulirung dieser Wellenlängencurven, und werden, um uns später nicht wiederholen zu müssen, die für Vacuumstrahlen erhaltenen Curven G und H in diese Betrachtungen einschliessen. Sie entsprechen zwei conischen Düsen von 3,5 bez. 2,9 mm Durchmesser. Als Abscissen sind aufgetragen der Quotient des Druckes (nicht Ueberdruckes) im Reductionsventil und des Aussendruckes, der mit abnehmendem Ausflussdrucke sich rasch dem Normaldrucke 1 näherte (darüber siehe später). Auch die beiden Curven G und H schneiden die Abscissenaxen bei 1,9 Atm.

Es zeigt sich nun, dass die sämmtlichen Curven A bis H Parabeln sind und sich mit grösster Genauigkeit darstellen lassen durch die Gleichung

$\lambda = Z . \sqrt{p - p_{k'}}$ (λ in Millimetern, die p in Atm. gemessen)

wenn wir mit $p_{k'}$ den kritischen Druck bezeichnen, welcher der Wellenlänge Null entspricht, den Schnittpunkt der Curve mit der Abscissenaxe. Die Constante Z wechselt selbstverständlich mit der Düse. Ich berechnete diese Constante so, dass die Wellenlängencurve für eine bestimmte Düse sich den Beobachtungen möglichst gut anschmiegend gezeichnet und unter Benutzung der Parabelgleichung aus einer Anzahl Punkten derselben Z bestimmt wurde; aus diesem Z wurde schliesslich das Mittel gebildet. Wie die folgende Tabelle lehrt, ordnen sich diese Z in derselben Reihenfolge, wie die Durchmesser d der zugehörigen Düsen. Wir zerlegen deshalb Z in $\mathfrak{z} . d$ und schreiben die Gleichung der Wellenlänge

$$\lambda = \mathfrak{z}\, d \sqrt{p - p_{k'}}$$

und machen die Gleichung stimmend in Bezug auf die Dimensionen, indem wir rechts durch $\sqrt{p_1}$, $p_1 = 1$ Atm. dividiren und $\mathfrak{z}$ als reine Zahl betrachten. Wir erhalten

$$\lambda = \mathfrak{z}\, d \sqrt{\frac{p - p_{k'}}{p_1}}$$

und stellen die Werthe von d, Z, $\mathfrak{z}$ und $p_{k'}$ in einer kleinen Tabelle zusammen.

Düse	*d* mm	*Z*	$\mathfrak{z}$	$p_{k'}$ Atm. (Ueberdr.)	$p_{k'}$ (Druck)
A	3,63	3,20	0,88	1,2	2,2
B	2,65	2,46	0,93	0,9	1,9
C	1,48	1,52	1,02	0,9	1,9
D	0,3	0,285	0,93	0,9	1,9
E	3,95	3,16	0,80	1,0	2,0
F	2,72	2,46	0,91	0,9	1,9
G	3,5	2,85	0,79	0,9	1,9
H	2,9	2,34	0,77	0,9	1,9
		Mittel	0,88		

Mit Hülfe dieser Werthe von $\mathfrak{z}$ und $p_{k'}$ sind unter Zugrundelegung der angegebenen Gleichung für λ die in die Diagramme *A* und *H* eingezeichneten Curven construirt. Die λ werden so selbst bis zu Drucken von 18 Atm. hinauf mit grosser Genauigkeit wiedergegeben. Eine Abhängigkeit der Coefficienten $\mathfrak{z}$ vom Düsendurchmesser ist nicht erkennbar, trotzdem diese von 0,3 mm bis beinahe 4 mm, die Düsenöffnungen wie die Quadrate dieser Grössen variiren. Dieser Coefficient scheint deshalb in seiner Abweichung von dem Mittelwerthe nicht sowohl von dem Durchmesser der Düse, als von der Gestalt derselben beeinflusst zu sein, von der Politur derselben etc. Rechnen wir mit dem Mittelwerthe $\mathfrak{z} = 0,88$, so erhalten wir noch immer sehr annehmbare Werthe für λ, die sich von den wirklich beobachteten nur um wenige Zehntel Millimeter unterscheiden.

Der kritische Druck $p_{k'}$ hat bei sechs Düsen denselben Werth, 1,9 Atm., bei den zwei grössten Düsen 2,0 und 2,2 Atm. Die Theorie ergiebt, wie sich zeigen wird, den Werth 1,90 Atm., der bei den verschiedenen Gasen nur in ganz geringem, bei den Messungen verschwindendem Grade noch von dem Verhältniss der specifischen Wärmen abhängt, nicht aber vom Düsendurchmesser. Die beiden nur unbedeutend grösseren Werthe von $p_{k'}$, die wir bei den grössten Düsen finden, sind wohl dadurch beeinflusst, dass wir die Oeffnungen derselben gegen die Durchbohrungen und Canäle des Reducirventiles nicht mehr ganz vernachlässigen dürfen. Diesem Umstande ist es zuzuschreiben, dass unmittelbar hinter der Düsenöffnung ein etwas kleinerer Druck herrscht, als im Reducirventil, wir also durch

die Angabe des letzteren etwas zu grosse Werthe für $p - p_k$ erhalten, ein Fehler, der sich nur bei den kleinsten Werthen von λ bemerkbar macht. Dass die Flachdüse vom Durchmesser 3,95 mm ein kleineres $p_{k'}$ (2 Atm.) liefert als die conische Düse von Durchmesser 3,63 mm ($p_{k'} = 2,2$ Atm.), rührt daher, dass Ausflussversuche, auf die wir im nächsten Capitel zu sprechen kommen werden, ergaben, dass Flachdüsen unter ganz denselben Drucken ausserordentlich viel weniger Gas ausströmen lassen, als conische Düsen, so dass die oben erwähnte Fehlerquelle sich bei letzteren stärker fühlbar macht.

Da die Differenz $p - p_{k'}$ dieselbe bleibt, wenn wir jedes Glied um die Einheit erhöhen oder vermindern, so ist es gleichgültig, ob wir für p und $p_{k'}$ die Ueberdrucke oder die wirklichen Ausflussdrucke einsetzen. Wir erhalten so für λ die genügend genauen, bequemen Formeln

$$\lambda = 0,88\, d \sqrt{p - 0,9}$$

$$\lambda = 0,88\, d \sqrt{p - 1,9},$$

je nachdem wir unter p den Ueberdruck oder Ausflussdruck verstehen. Für kleine λ sind für die Düse A und E statt 0,9 und 1,9 einzusetzen 1,2 und 2,2, bez. 1,0 und 2,0.

Wir haben bis jetzt die Wellenlängen betrachtet in ihrer Abhängigkeit vom Druck und Düsendurchmesser. Es wäre nun sehr wohl denkbar, dass diese Schwingungen im Strahl beeinflusst sind durch Schwingungen der Düse selbst und es bleibt deshalb noch zu prüfen, ob die Wellenlänge abhängt von der Art der Düsenbefestigung und dem Materiale, aus dem die Düse gearbeitet ist. Zu diesem Zwecke wurden die photographischen Aufnahmen Nr. 281—304 gemacht, mit Luft und Dauerbeleuchtung, da diese Versuchsanordnung von den Versuchen mit Wasserstoff noch aufgestellt war. Düsen, genau gleich der Messingdüse A von 3,63 mm Durchmesser wurden aus Holz, Hartgummi und Blei hergestellt, also Stoffen, die sich in Bezug auf Dichte, Elasticität und Schallgeschwindigkeit sehr verschieden verhalten. Ferner wurde eine gleiche Messingdüse an ihrer Mündung mit 2 Kilogramm belastet.

Aus diesen Messungen ging mit aller Sicherheit hervor, dass weder das Düsenmaterial noch die Art der Befestigung

von Einfluss auf die Wellenlänge ist. Uebrigens hatten bereits die Düsen *E* und *F*, Flachdüsen mit Deckplatten bei der einen aus Eisen, bei der anderen aus Messing, Werthe für λ geliefert, die gleich gut durch die Gleichung der λ dargestellt werden.

Wir gehen über zur Betrachtung der *Temperaturverhältnisse* im Strahl. Die Temperatur an jeder Stelle des Strahles, namentlich den Stellen grössten und geringsten Querschnittes zu kennen, wäre von ausserordentlicher Wichtigkeit für die theoretische Betrachtung. Aus Neusilber- und Kupferdrähten von 0,1 mm Durchmesser wurden feinste Thermoelemente hergestellt, die quer durch den Strahl gezogen werden konnten; sie waren gerade noch widerstandsfähig genug, um vom Strahle nicht zerrissen zu werden. In dem gleichzeitig objectiv entworfenen Strahlbilde konnte der Ort der Löthstelle des Thermoelementes bestimmt werden. In der Arbeit von E. Mach und Salcher ist in Bezug auf die Strahltemperatur angegeben: „Die Temperatur im Strahl ist eine sehr niedere (nach Schätzung von Mach auf Grund von Versuchen mit einem Thermoelement bis 100° C. unter jener der Umgebung).“ Zu meinem grössten Erstaunen kam ich zu einem vollständig anderen Resultate. Die Angaben des Thermoelementes waren sehr schwankend, stets aber wurden Temperaturen gefunden, die höchstens 15—23° unter der Temperatur der Luft in den Reservoiren lagen; dabei war es gleichgültig ob die Löthstelle in einem Wellenknoten oder ausserhalb desselben, unmittelbar an der Düsenmündung oder in einigen Centimetern Entfernung von derselben lag. Selbst bei Ausflussdrucken von 10 Atm. Ueberdruck zeigte das Thermoelement keine grössere Temperaturerniedrigung an als 15—23°. Ein Quecksilberthermometer mit ganz kleinem, cylindrischem Gefäss zeigte noch höhere Temperaturen an, sie lagen höchstens etwa 15° unter der Umgebungstemperatur. Als ich mit Hinblick auf jene Bemerkung von Mach nach eventuellen Fehlern meiner Versuchsanordnung forschte, fand ich, dass bereits im Jahre 1853 W. Thomson und J. P. Joule[1]) Messungen über die Temperaturen ausströmender Luft angestellt haben. Sie bedienten

1) W. Thomson u. J. P. Joule, Phil. Trans. Roy. Soc. 143. p. 357. 1853.

sich hierzu eines kleinen Quecksilberthermometers. Ihre Zahlen sind

Druck der Luft Pfund auf Quadratzoll		Temperatur*erniedrigung* im Strahl
124	(8,45 Atm.)	13,42° C.
72	(4,9 Atm.)	10,35
31	(2,1 Atm.)	5,75

also nicht entfernt mit jener Mach'schen Angabe übereinstimmend, wohl aber mit den von mir beobachteten Temperaturen. Da die Temperaturen im Strahle nach den Regeln der Thermodynamik zweifellos bedeutend niedriger sind (vgl. das folgende Capitel), geben Thomson und Joule für die Abweichung der Messungen eine Erklärung, die ich mir ebenfalls bereits zurechtgelegt hatte für den Fall, dass meine Beobachtungen sich bestätigen sollten. Durch das Thermoelement oder Thermometer wird der Strahl gestört, die Luft staut sich und erwärmt sich; würde sie an diesen vollständig zur Ruhe kommen, so müsste sie wieder ihre Ausgangstemperatur annehmen. In grossartiger Weise haben sich Thomson und Joule dies bei ihrem berühmten Versuche über die Elasticitätsgleichung der Gase zu Nutzen gemacht, indem sie bei der Ausdehnung comprimirter Kohlensäure deren lebendige Kraft der Strömung durch einen porösen Pfropfen vernichteten und dadurch vollständig in Wärme umsetzten. (Vgl. E. Mach, Die Principien der Wärmelehre, p. 310.) Ich verliess deshalb diese Temperaturmessung, da ich eine von dieser Fehlerquelle freie Methode nicht ausfindig machen konnte.

Wir wenden uns nun zu einer weiteren Klasse von Messungen, welche die Bestimmung der Dicke des Luftstrahles bezwecken, welche Grösse bei der theoretischen Betrachtung dieser Erscheinungen eine hervorragende Rolle spielt. Messungen hierüber liegen von E. u. L. Mach nicht vor und waren auch bei den Verhältnissen, unter denen sie arbeiteten, nicht anstellbar. Wir haben gesehen, dass der Strahl bei steigendem Drucke erst mit gleichförmigen Querschnitte fliesst, diesen aber periodisch mehr und mehr zu ändern beginnt von dem Momente an, wo die Scheibchen aufzutreten beginnen, mit denen die Querschnittsminima zu-

sammenfallen. Nach Helmholtz[1]) ist ein Strahl von dem Medium, durch das er fliesst, durch eine scharfe Discontinuitätsfläche getrennt. Diese ist auf den photographischen Bildern angedeutet. Man kann sich aber von deren Vorhandensein noch vergewissern, indem man eine feine Nadelspitze dem Strahle nähert. Ist man in unmittelbarer Nähe des Strahles angelangt, so genügen minimale Verschiebungen der Nadel, um im Strahlbilde eine Schliere entstehen und verschwinden zu lassen. Selbst einige Centimeter von der Mündung der Düse entfernt, wo der Strahl schon von Wirbeln bekleidet ist (bei Funkenbelichtung nachweisbar), hat er noch eine deutlich ausgeprägte Trennungsfläche, sodass wir annehmen können, dass die Wirbel den Strahl gleichsam nur Schicht für Schicht aufzehren. Das Auftreten solcher „*Berührungsschlieren*" gestattet den Strahl abzutasten und seine Dicke zu messen. Zu diesem Zwecke wurden von einem kleinen Funkenmikrometer die Kugeln entfernt und durch kleine Messingkegel ersetzt, die sich zwei scharfe Spitzen zukehrten. Zwischen diese wurde der Strahl gebracht und durch die Mikrometerschraube die Spitzen einander bis auf Strahldicke genähert. Diese Einstellung wurde angezeigt durch das Auftreten zweier Randschlieren, die in dem Strahlbilde auftraten, welches auf einem Schirme entworfen war, der, um die Berührungsstelle zu constatiren, mit Millimeter-Coordinaten-Papier überzogen wurde. Gemessen wurde bei Verwendung der Düsen *A* und *C*.

1. Düse *A*, $d = 3{,}63$ mm, $p = 5$ Atm. (Ueberdruck), $\lambda = 6$ mm. Vorversuche lehren, dass der Strahl einen periodisch mit dem Abstande von der Düse sich ändernden Querschnitt hat; die Stelle geringsten Querschnittes fällt mit den Scheibchen zusammen, der grösste Querschnitt liegt ziemlich in der Mitte zwischen zwei Scheibchen. Die Einstellungen des Mikrometers ergeben am Orte des ersten Scheibchens 6,94, 6,98, 7,30, 7,30, 7,20, 7,40, 7,30, 7,00, 7,10 mm, seine Nullstellung ist bei 3,40 mm. Der Durchmesser des ersten Scheibchens ergiebt sich als Mittelwerth zu 3,75 mm. Für das zweite Scheibchen wurde erhalten (Nullstellung des Mikrometer = 3,52): 7,30, 7,30, 7,15, 7,20, 7,30, 7,40, 7,30 mm, im Mittel sein Durchmesser = 3,78 mm.

1) H. v. Helmholtz, Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. Gesamm. Abhandl. 1. p. 146. 1868.

Die Beobachtung des Strahlbildes ergab für jedes Scheibchen einen Durchmesser von 3,7 mm. Die Scheibchen haben deshalb innerhalb der Beobachtungsfehler denselben Durchmesser wie die Düsenöffnung.

Die Messungen für das erste Querschnittsmaximum (zwischen Düse und erstem Scheibchen) ergaben (Nullstellung des Mikrometers 3,44): 7,62, 8,10, 8,00, 8,10, 8,00, 8,00, 7,80, 7,90, 8,00, 7,95; sein Durchmesser berechnet sich daraus zu 4,53 mm. Für das zweite Querschnittsmaximum wurde mit ähnlicher Genauigkeit erhalten 4,81 mm. Das Mittel beider Messungen ist 4,67 mm. Im Strahlbilde waren an diesen Stellen die Strahlgrenzen nicht mit der zu einer Messung nöthigen Genauigkeit wahrzunehmen.

Düse C, $d = 1{,}48$ mm, $p = 7$ Atm. (Ueberdruck), $\lambda = 3{,}5$ mm. Die Durchmesser des ersten u. zweiten dünnen Scheibchens ergaben sich mit ähnlicher Genauigkeit wie oben zu 1,67 und 1,39 mm, im Mittel 1,53 mm, also beinahe genau der Düsendurchmesser. Im Strahlbilde erschienen sie 1,50 mm breit. Die beiden ersten Querschnittsmaxima ergaben sich zu 1,97 und 2,07 mm, im Mittel zu 2,02 mm. Im Strahlbilde waren sie nicht deutlich sichtbar.

Diese Messungen lehren zur Evidenz, dass, wie es die Theorie erfordern wird, der Strahl nicht mit constanten, sondern mit periodisch wechselnden, regelmässig sich wiederholenden Querschnitten fliesst; nach jeder Anschwellung zieht sich der Strahl auf einen Querschnitt gleich dem der Düsenmündung zusammen. Diese periodischen Querschnittsänderungen scheinen bisher nicht beobachtet worden zu sein, wenigstens geben sowohl E. Mach und Salcher, als L. Mach an, dass nur gleich nach der Mündung der Strahl sich erweitert, dann aber cylindrisch weiterfliesst. Mit dieser Auffassung stimmt auch der schematische Durchschnitt, den L. Mach in seiner Abhandlung wiedergiebt (dort Fig. 12). Nach L. Mach hat der Strahl folgenden Querschnitt (vgl. Fig. 3):

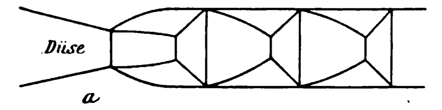


Fig. 3.

Dies steht in vollständigem Widerspruche mit den oben angeführten Querschnittsbestimmungen, welche das Strahlprofil vielmehr so ergeben (vgl. Fig. 4):

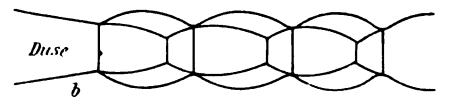


Fig. 4.

also eine regelmässige Wiederholung aller Verhältnisse schon von der Düsenmündung an. In einem Strahle vom Querschnitte *a* sind, wie die Theorie ergeben wird, keine stationären Schallwellen möglich. Uebrigens ist schon ohne weiteres ersichtlich, dass bei dem Profil *a*, bei constanter Stromgeschwindigkeit, wie sie auch L. Mach annimmt, keine Dichteänderungen, also Schallwellen, vorkommen können. Denn bei stationärem Zustande muss der Constanz der Masse wegen das Product aus Geschwindigkeit, Querschnitt und Dichte unverändert bleiben; sind also zwei dieser Grössen constant, so muss es auch die dritte sein.

Durch die bisherigen Untersuchungen sind die im ausströmenden Strahle auftretenden Erscheinungen experimentell verfolgt worden; wir haben dadurch die Grundlagen gewonnen, auf denen eine Theorie aufgebaut werden kann. Wir stellen in Kürze die Resultate unserer Untersuchung zusammen:

1. In einem unter genügend grossem Drucke ausströmenden Gasstrahle treten periodische, stationäre Dichtigkeitsänderungen auf, die wir als stationäre Schallwellen zu bezeichnen berechtigt sind. Mit grösster Wahrscheinlichkeit können wir sie als stationäre, *ebene* Schallwellen betrachten.

2. Diese stationären Wellen beginnen bei allen permanenten Gasen bei dem kritischen Drucke $p_{k'} = 1{,}9$ Atm. sich zu entwickeln. (Für 6 Düsen ist dies in aller Strenge bewiesen, für die bei 2 Düsen auftretenden kleinen Abweichungen haben wir eine vollständig befriedigende Erklärung.)

3. Die Wellenlänge dieser Wellen ist bei gleicher Düsenöffnung unabhängig von der Befestigungsart und dem Material der Düse, und ist durch deren Form nur in sehr geringem, nicht näher angebbarem Maasse beeinflusst.

4. Die Wellenlänge ist bei gleicher Düsenöffnung und gleichem Ausflussdrucke unabhängig vom Moleculargewichte des Gases.

5. Die Wellenlänge λ wächst mit steigendem Drucke p und wachsendem Durchmesser d der Düsenöffnung. Ihre Abhängigkeit von beiden wird mit äusserster Genauigkeit für alle Gase wiedergegeben durch die Formel:

$$\lambda\,\mathrm{mm} = \mathfrak{z} \, . \, d\,\mathrm{mm} \, . \sqrt{\frac{p - p_k}{p_1}}, \quad p_1 = 1 \text{ Atm.}$$

6. Der Coefficient $\mathfrak{z}$ ergiebt sich für alle Gase im Mittel für 8 Düsen zu 0,88. Mit diesem Coefficienten erhält man für alle 8 Düsen sehr befriedigende Werthe für λ.

7. Von dem Ausflussdrucke an, bei dem sich diese stationären Wellen im Strahle zu entwickeln beginnen, ändert der bis dahin mit gleichem Querschnitte fliessende Strahl diesen periodisch, und zwar so, dass sein engster Querschnitt mit den Scheibchen zusammenfällt und an Grösse stets gleich der Düsenöffnung bleibt, sein grösster Querschnitt mit steigendem Drucke zunimmt und ungefähr in der Mitte zwischen zwei Minimas liegt.

Diese Gesetze sind lediglich der Ausdruck rein experimentell ermittelter Thatsachen. Neue Ergebnisse sind sämmtliche numerischen Beziehungen, die Gesetze Nr. 2, 4 und 7 und theilweise Nr. 3, sowie der Nachweis derselben qualitativen und quantitativen Beziehungen für Luft, Kohlensäure und Wasserstoff, die wir infolge dessen mit grösster Wahrscheinlichkeit auch bei den übrigen permanenten Gasen voraussetzen dürfen. Dieser Schluss wird durch die folgenden theoretischen Betrachtungen, welche dieselben quantitativen Gesetzmässigkeiten ergeben werden, bestätigt.

München, Physik. Institut der Kgl. techn. Hochschule, October 1898.

(Schluss im nächsten Heft.)

(Eingegangen 19. März 1899.)

15. *Bemerkung über die bei dem Zeeman'schen Phänomen stattfindenden Intensitätsverhältnisse; von W. Voigt.*

Während die allgemeinen Gesetze der Zerlegung von Spectrallinien durch die Wirkung eines Magnetfeldes auf verschiedenen Wegen in mit der Erfahrung übereinstimmender Form gewonnen sind, ist doch ein specieller Punkt, soweit mir bekannt, bisher unaufgeklärt geblieben, nämlich das eigenthümlich wechselnde Verhältniss zwischen den Intensitäten der aus derselben Spectrallinie entstehenden Componenten. Um nur von der einfachsten (normalen) Zerlegung zu sprechen, so zeigen die zahlreichen Triplets des Eisenspectrums nach den photographischen Aufnahmen des Hrn. Zeeman, von denen Exemplare durch des Herstellers Güte in meinem Besitz sind, in dieser Hinsicht die auffallendsten Verschiedenheiten, vom Ueberwiegen der inneren bis zum Dominiren der äusseren Componenten.

1. Die einfachste Form der Theorie, die ich entworfen habe[1]), führt zu einem starken Ueberwiegen der inneren Componente über die äusseren, wie im Folgenden darzulegen ist.

In der Nähe einer Spectrallinie (1) gelten nämlich für die complexen Geschwindigkeiten o_1 und o_2 der parallel und der normal zu den Kraftlinien polarisirten Schwingungscomponenten einer normal zu den Kraftlinien des Magnetfeldes fortgepflanzten ebenen Welle die Formeln[2])

$$(1)\qquad \left(\frac{v}{o_1}\right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1\,\Theta\,\vartheta^2}{\Theta^2 - \Phi^2} - \frac{\varepsilon_1^2\,\Phi^2\,\vartheta^4}{(\Theta^2 - \Phi^2)(\Theta^2 - \Phi^2 - \varepsilon_1\,\Theta\,\vartheta^2)},$$

$$(2)\qquad \left(\frac{v}{o_2}\right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1\,\vartheta^2}{\Theta},$$

wobei v die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume, $2\pi\vartheta = \tau$ die Schwingungsperiode und ε_1 eine für die elektrische Erreg-

1) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 345. 1899.
2) l. c. p. 356. Formel (44) und (45).

barkeit der ponderabeln Materie charakteristische Constante bezeichnet; ferner ist

(3) $$\Theta = \vartheta^2 + i\,\vartheta\,\vartheta_1 - \vartheta_0^2, \quad \Phi = c\,R\,\vartheta$$

und es bedeuten ϑ_0, ϑ_1, c gleichfalls der betreffenden Materie individuelle Constanten, R aber die magnetische Feldstärke.

Setzt man

(4) $$\vartheta - \vartheta_0 = \delta$$

und betrachtet δ als klein neben ϑ_0, so nimmt bei Beschränkung auf die erste Ordnung des Verhältnisses δ/ϑ_0 Formel (2) die Gestalt an

(5) $$\left(\frac{v}{o_2}\right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1\,\vartheta_0}{2\,\delta + i\,\vartheta_1}.$$

Nun gilt

(6) $$\frac{1}{o} = \frac{1 - i\,\varkappa}{\omega},$$

unter $\varkappa$ den Absorptionsindex, unter ω die reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit verstanden ist; es wird also bei Einführung des Brechungsindex $v/\omega = n$

(7) $$n_2^2(1 - \varkappa_2^2) = 1 + \frac{2\,\varepsilon_1\,\vartheta_0\,\delta}{4\,\delta^2 + \vartheta_1^2}, \quad 2\,n_2^2\,\varkappa_2 = \frac{\varepsilon_1\,\vartheta_0\,\vartheta_1}{4\,\delta^2 + \vartheta_1^2}.$$

Das Maximum von $2\,n_2^2\,\varkappa_2$ liegt bei $\delta = 0$, und es ist für diesen Werth

(8) $$\overline{n}_2^2(1 - \overline{\varkappa}_2^2) = 1, \quad 2\,\overline{n}_2^2\,\overline{\varkappa}_2 = \frac{\varepsilon_1\,\vartheta_0}{\vartheta_1}.$$

Wir wollen annehmen, dass der letztere Ausdruck als eine Grösse erster Ordnung gelten, die Absorption also schwach sein soll; es gilt dann gleiches von $\varkappa_2$, und n_2 ist an der Stelle des Maximums von $2\,n_2^2\,\varkappa_2$ bis auf Grössen zweiter Ordnung gleich Eins.

Für die Beobachtung maassgebend ist das Product $n\,\varkappa$ (der Absorptionsmodul), das innerhalb der eingeführten Annäherung für die normal zu den Kraftlinien polarisirte Componente gegeben ist durch

(9) $$n_2\,\varkappa_2 = \frac{\frac{1}{2}\,\varepsilon_1\,\vartheta_0\,\vartheta_1}{4\,\delta^2 + \vartheta_1^2 + \varepsilon_1\,\vartheta_0\,\delta};$$

$n_2\,\varkappa_2$ verhält sich also wegen der Kleinheit von $\varepsilon_1\,\vartheta_0/\vartheta_1$ merklich wie $n_2^2\,\varkappa_2$. Der Gleichung (2) entspricht demnach ein Absorptionsstreifen bei $\delta = 0$.

Die aus dem Ausdruck (1) für $(v/o_1)^2$ folgenden Absorptionsstreifen der parallel zu den Kraftlinien polarisirten Componente liegen nahe bei $\delta = \pm \frac{1}{2} c R$. Sollen dieselben sich deutlich von dem durch (2) gegebenen unterscheiden, so muss jedenfalls $n_2 \varkappa_2$ für $\delta = \pm \frac{1}{2} c R$ klein gegen seinen Maximalwerth $\varepsilon_1 \vartheta_0 / 2 \vartheta_1$ sein. Hieraus folgt aber, dass $c R$ gross gegen ϑ_1 sein muss, und wir wollen festsetzen, dass zwischen diesen beiden Grössen dasselbe Ordnungsverhältniss besteht, wie zwischen ϑ_1 und $\varepsilon_1 \vartheta_0$.

Unter Benutzung dieser Resultate findet sich das letzte Glied der Formel (1) in der Nähe des Absorptionsstreifens als von dritter Ordnung, und bei seiner Vernachlässigung erhält man, wenn man (1) schreibt:

$$(10) \qquad \left(\frac{v}{o_1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \vartheta^2 \left(\frac{1}{\Theta + \Phi} + \frac{1}{\Theta - \Phi}\right),$$

für die Umgebung des oben betrachteten Streifens

$$(11) \qquad n_1^2 = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \vartheta_0 \left[\frac{2\delta + cR}{(2\delta + cR)^2 + \vartheta_1^2} + \frac{2\delta - cR}{(2\delta - cR)^2 + \vartheta_1^2}\right],$$

$$(12) \qquad 2 n_1^2 \varkappa_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \vartheta_0 \vartheta_1 \left[\frac{1}{(2\delta + cR)^2 + \vartheta_1^2} + \frac{1}{(2\delta - cR)^2 + \vartheta_1^2}\right].$$

Für $2\delta = \pm c R$, d. h. für den Ort der Absorptionsstreifen, wird

$$(13) \qquad n_1^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1 \vartheta_0 \vartheta_1 c R}{(2 c R)^2 + \vartheta_1^2};$$

n_1 ist also hier nur um eine Grösse zweiter Ordnung von Eins verschieden, und wir erhalten innerhalb der festgesetzten Annäherung für beide Absorptionsmoduln die Maximalwerthe

$$(14) \qquad \overline{n_1 \varkappa_1} = \frac{\varepsilon_1 \vartheta_0}{2 \vartheta_1}, \qquad \overline{n_2 \varkappa_2} = \frac{\varepsilon_1 \vartheta_0}{\vartheta_1}.$$

Der dem mittleren Absorptionsstreifen zugehörige Werth $n\varkappa$ findet sich somit *doppelt so gross*, als der den beiden äusseren entsprechende.

2. Nach dem im Eingang Gesagten finden sich aber in Wirklichkeit bedeutende Abweichungen von diesem Verhältniss; es scheint, dass der Quotient $n_1 \varkappa_1 / \overline{n_2 \varkappa_2}$ *immer grösser* ist, als es nach der Formel (14) sein sollte, ja $\overline{n_2 \varkappa_2}$ ist mitunter sogar *kleiner* als $n_1 \varkappa_1$.

Um zu entscheiden, in welcher Hinsicht die aufgestellten Differentialgleichungen zu erweitern sind, um diese Mannichfaltigkeit zu erklären, hat man nur zu beachten, welche Rolle die in (14) auftretenden Parameter ε_1, ϑ_0, ϑ_1 in der Theorie spielen. Dieselben treten allein in den Formeln[1]) auf, welche die Erregung von Schwingungen des für die absorbirende Substanz und speciell für den betrachteten Absorptionsstreifen charakteristischen Vectors $\mathfrak{K}_1$ mit den Componenten $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ durch die elektrische Kraft K mit den Componenten X, Y, Z bestimmen und in diesen Parametern lauten, wenn die Z-Coordinatenaxe der magnetischen Feldstärke R parallel liegt,

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 + \vartheta_1 \dfrac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t} + \vartheta_0^2 \dfrac{\partial^2 \mathfrak{X}_1}{\partial t^2} + c R \dfrac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial t} = \varepsilon_1 X, \\ \mathfrak{Y}_1 + \vartheta_1 \dfrac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial t} + \vartheta_0^2 \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Y}_1}{\partial t^2} - c R \dfrac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t} = \varepsilon_1 Y, \\ \mathfrak{Z}_1 + \vartheta_1 \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial t} + \vartheta_0^2 \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Z}_1}{\partial t^2} = \varepsilon_1 Z. \end{cases}$$

Die beschriebenen Beobachtungen verlangen nun offenbar, dass von den Parametern in den *ersten beiden* Gleichungen einer oder mehrere von den mit gleichen Buchstaben bezeichneten in der *letzten* Gleichung verschieden sind. Eine solche Verschiedenheit kann bei dem an sich isotropen Körper natürlich nur als Folge des ausgeübten Feldes eintreten; die betreffenden Parameter müssen also in den verschiedenen Gleichungen verschiedene Functionen der magnetischen Feldstärke sein.

Die ε_1 als von der Feldstärke erheblich abhängig anzunehmen, erscheint unzulässig, weil damit eine Abhängigkeit der statischen Dielektricitätsconstante $\varepsilon = 1 + \sum \varepsilon_h$ von dem Magnetfelde eingeführt werden würde, die nicht beobachtet ist. Ebenso unzulässig erscheint die analoge Annahme in Bezug auf ϑ_0; denn sie würde eine die Zerlegung begleitende Verschiebung der Spectrallinien ergeben, die der Beobachtung widerspricht.

Dagegen steht nichts im Wege, den Parameter ϑ_1, der den Widerstand misst, welchen der Vector $\mathfrak{K}_1$ bei seinen Schwingungen findet, mit der Feldstärke wechselnd anzunehmen, und es entspricht den Symmetrieverhältnissen des Vorganges, für ϑ_1 in den beiden ersten Gleichungen eine, in der letzten

1) W. Voigt, l. c., vgl. Formelsystem (6) und (15).

eine andere *gerade* Function der Feldstärke zu setzen. Auch die Gleichung der Energie ist mit dieser Erweiterung vollkommen vereinbar.

Die nächstliegende Annahme wäre, $\vartheta_1 = \alpha_1 + \beta_1 R^2$ zu setzen (unter α_1 und β_1 Constanten verstanden), wo dann β_1 in den ersten beiden Gleichungen (15) einen anderen Werth haben müsste, als in der letzten. Ein *positives* β_1 würde ausdrücken, dass die Absorptionsstreifen mit wachsender Feldstärke an Intensität *verlieren*, ein *negatives*, dass sie *gewinnen*. Wenn es richtig ist, dass, wie behauptet wird, im Magnetfeld Streifen sichtbar werden, die ausserhalb desselben nur unmerkliche Intensität besitzen, so wird man das *letztere* Vorzeichen als das wahrscheinlichere betrachten müssen. Der Wahrnehmung, dass $n_1 \varkappa_1 / n_2 \varkappa_2$ immer grösser zu sein scheint, als nach der Theorie bei constant genommenen ϑ_1 sein sollte, könnte man dann am einfachsten dadurch entsprechen, dass man β_1 in den ersten zwei Gleichungen (13) negativ $= -\gamma$, in der letzten aber gleich Null annähme, also setzte:

(16) $$\overline{n_1 \varkappa_1} = \frac{\varepsilon_1 \vartheta_0}{2(\alpha_1 - \gamma_1 R^2)}, \qquad \overline{n_2 \varkappa_2} = \frac{\varepsilon_1 \vartheta_0}{\alpha_1}.$$

3. Noch sei auf eine interessante Folgerung aus diesen Resultaten hingewiesen. Nach früher von mir Gegebenem[1]) ist das Emissionsvermögen E einer homogenen planparallelen und in parallelen Ebenen cohärent schwingenden Schicht von der Dicke l für Licht von der Wellenlänge λ bei schwacher Absorption gegeben durch die Formel

(17) $$E = \frac{4\pi k^2 l}{\lambda} \cdot n \varkappa,$$

in der k eine universelle Function der Temperatur bezeichnet.

Diese Formel lässt sich auf den Fall incohärenter Schwingungen jedenfalls soweit übertragen, dass man für sehr wenig verschiedene Farben:

(18) $$E = k' . n \varkappa$$

setzen darf, wo dann k' nur noch von der Dicke der leuchtenden Schicht und von der Temperatur abhängt. Ist $n \varkappa$ nur für einzelne Farben von merklicher Grösse, so kann man die Emission der übrigen ignoriren.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 380. Formel (63) 1899.

Das gesammte Emissionsvermögen einer im Magnetfeld befindlichen monochromatischen Flamme zerfällt hiernach in die zwei Theile:

$$(19) \qquad E_1 = 2k'.\overline{n_1 \varkappa_1}, \quad E_2 = k'.\overline{n_2}\,\overline{\varkappa_2},$$

die den parallel und normal zu den Kraftlinien polarisirten Schwingungen entsprechen. Da die ersteren in zwei für unsere Betrachtung identischen Spectrallinien vorhanden sind, so tritt in dem Ausdruck für E_1 der Factor 2 auf.

Ist der Parameter ϑ_1 eine Constante, so ist nach (14)

$$E_1 = E_2,$$

d. h. das prismatisch nicht zerlegte Licht der Flamme verhält sich wie *natürliches* Licht.

Wechselt dagegen ϑ_1 wie oben gesagt, gelten also die Formeln (16), so ist

$$E_1 > E_2,$$

und zwar wird der Unterschied zwischen beiden Grössen mit wachsender Feldstärke zunehmen. In diesem Falle wird das prismatisch nicht zerlegte Licht der im Magnetfeld befindlichen Flamme sich als theilweise nach den Kraftlinien polarisirt darstellen, und der polarisirte Antheil wird mit wachsender Feldstärke selbst zunehmen.

Diese Resultate stimmen mit den bekannten Beobachtungen der Herren Egoroff und Georgiewsky[1]) überein und können wohl als eine einfache Erklärung derselben gelten.[2])

Resultate.

Die erweiterten Hertz'schen Gleichungen geben von den wechselnden Intensitätsverhältnissen des Zeeman'schen Triplets[3]) Rechenschaft, wenn man nur die Widerstände, welche

1) N. Egoroff u. N. Georgiewsky, Compt. rend. 124. p. 949. 1897.

2) In etwas anderer Weise werden die betr. Erscheinungen von Hrn. H. A. Lorentz (Zittingsverl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam. 1897/98. p. 193) aufgefasst. Die von ihm herangezogene Absorption in der Flamme ist in der Formel (17) bereits berücksichtigt; sie scheint mir aber für sich allein zur Erklärung der Beobachtungen nicht auszureichen.

3) Zu einer theoretischen Untersuchung der complicirteren normal zu den Kraftlinien entstehenden Zerlegungen nach Seite der Intensitäten fehlt es noch an Beobachtungsmaterial.

den Schwingungen der für die einzelnen Spectrallinien charakteristischen Vectoren $\mathfrak{K}_h$ entgegenwirken, gemäss den Symmetrieverhältnissen des Magnetfeldes mit der Feldstärke variabel annimmt. Es scheint, dass diese Annahme zugleich die Beobachtung erklärt, dass im Magnetfelde Spectral- bez. Absorptionslinien sichtbar werden, die ausserhalb des Magnetfeldes nicht erkennbar sind.

Auch die Beobachtungen der Herren Egoroff und Georgiewsky über die theilweise Polarisation des nicht spectral zerlegten Lichtes einer im Magnetfelde befindlichen und normal zu den Kraftlinien betrachteten monochromatischen Flamme werden durch sie verständlich.

Göttingen, Anfang August 1899.

(Eingegangen 21. August 1899.)

6. *Zur Theorie der Einwirkung eines elektro-tischen Feldes auf die optischen Eigenschaften der Körper; von W. Voigt.*

Obwohl zahlreiche Beobachtungen[1]) über die optische irkung eines elektrostatischen Feldes vorliegen und für hrere der wahrgenommenen Erscheinungen sogar Formeln fgestellt worden sind, hat doch, soviel ich sehe, noch niemand : Differentialgleichungen für diese Vorgänge in der vollen lgemeinheit aufzustellen versucht.[2]) Es ist daher vielleicht ı auf einfache Hypothesen gegründetes Gleichungssystem, lches die Beobachtungen zu erklären vermag, nicht ohne teresse, und dies um so mehr, wenn dasselbe Erscheinungen nalisirt, die bisher noch nicht wahrgenommen sind.

Die Grundlage des Folgenden bilden die Gleichungen r elektromagnetischen Lichttheorie in der Erweiterung, die ıen Hertz für die Darstellung der Dispersionserscheinungen geben hat. Da die Krystalle bei den zu erörternden Vor-ngen ganz besonders in Betracht kommen, so sollen diese

1) J. Kerr, Phil. Mag. (4) **50.** p. 337. 1875; **8.** p. 85. 1880; (5) **9.** 159. 1880; **13.** p. 153. 1882; **20.** p. 363. 1885; W. C. Röntgen, ied. Ann. **10.** p. 77. 1880; H. Brongersma, Wied. Ann. **16.** p. 222. 82; G. Quincke, Wied. Ann. **10.** p. 536. 1880; **19.** p. 729. 1883; Blondlot, Compt. rend. **106.** p. 349. 1888; W. C. Röntgen, Wied. ın. **18.** p. 213 und 534. 1883; **19.** p. 319. 1883; A. Kundt, Wied. ın. **18.** p. 228. 1883; Fr. Pockels, Preisschrift d. k. Gesellsch. d. issensch. zu Göttingen, Abh. **39.** p. 1. 1893.

2) Die theoretischen Ueberlegungen des Hrn. Fr. Pockels in seiner irten schönen Preisschrift gehen nicht von Differentialgleichungen aus, ndern ruhen auf der Hypothese, dass auch für die einem elektrischen lde ausgesetzten Körper die Fresnel'schen Gesetze der Doppelbrechung ltung besitzen. Es wird sich zeigen, dass diese Annahme keineswegs selbstverständlich ist, wie man zunächst vermuthen möchte, durch die fzustellenden Differentialgleichungen auch nur als angenähert richtig wiesen wird. Auch spätere von Hrn. Pockels angestellte theoretische berlegungen (Gött. Nachr. p. 102. 1896) ruhen auf speciellerer Grund-ge, als die folgenden Entwickelungen; es wird hierauf weiter unten rückzukommen sein.

Formeln von allem Anfang an in einer Gestalt benutzt werden, die solchen Körpern entspricht; indessen wollen wir uns dabei, um zunächst unnöthige Complicationen zu vermeiden, auf Krystalle beschränken, *deren optische Symmetrieaxen für alle Farben zusammenfallen.* Es werden demgemäss also — wenigstens soweit verschiedene Farben und Absorptionen in Frage kommen — die Repräsentanten des monoklinen und des triklinen Systemes ausser Betracht bleiben.

1. Legen wir die Coordinatenaxen in die optischen Symmetrieaxen und bezeichnen mit $K(X, Y, Z)$, $P(L, M, N)$ das System der elektrischen und der magnetischen Kräfte, mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ dasjenige der elektrischen Polarisationen, mit v die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume, so lautet das zu Grunde gelegte System von Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = v\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right).$$

. . . .

Dabei sind die Polarisationscomponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ definirt durch

$$(2) \qquad \mathfrak{X} = X + \sum \mathfrak{X}_k, \quad \mathfrak{Y} = Y + \sum \mathfrak{Y}_k, \quad \mathfrak{Z} = Z + \sum \mathfrak{Z}_k,$$

worin $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{Y}_k$, $\mathfrak{Z}_k$ die Componenten elektrischer, aber für den Zustand der *ponderabeln* Theile charakteristischer Hülfsvectoren $\mathfrak{K}_k$ darstellen, die mit $K(X, Y, Z)$ durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}_h + a_1^h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_1^h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} &= \varepsilon_1^h X, \\ \mathfrak{Y}_h + a_2^h \frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} + b_2^h \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2} &= \varepsilon_2^h Y, \\ \mathfrak{Z}_h + a_3^h \frac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} + b_3^h \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t^2} &= \varepsilon_3^h Z \end{aligned}\right.$$

verbunden sind, in denen die a, b, ε positive Constanten darstellen. *Der Exponent h oder k bezeichnet dabei, wie hier, so im Weiteren, jederzeit einen Index.*[1]) Diesem Gleichungssystem

1) Wo im Folgenden einer der Vectoren $\mathfrak{K}_k$ für sich betrachtet wird, ist er stets mit dem Index h versehen; Gleiches gilt von den verschiedenen ihm zugeordneten Constanten; unter dem Summenzeichen ist ihm dagegen immer der Index k gegeben. *Alle vorkommenden Summationen beziehen sich auf diese Variable k.*

entspricht ein Antheil in der elektrischen Energie der Volumeneinheit von dem Betrag[1])

$$
(4)\quad \begin{cases} e = \frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ \quad + \frac{1}{8\pi}\sum\left[\frac{1}{\varepsilon_1^k}\left(\mathfrak{X}_k^2 + b_1^k\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_k}{\partial t}\right)^2\right) + \frac{1}{\varepsilon_2^k}\left(\mathfrak{Y}_k^2 + b_2^k\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}_k}{\partial t}\right)^2\right)\right. \\ \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_3^k}\left(\mathfrak{Z}_k^2 + b_3^k\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}_k}{\partial t}\right)^2\right)\right]. \end{cases}
$$

Zur Darstellung des Einflusses des elektrischen Feldes wollen wir nun diesen Ausdruck durch die allgemeinsten Glieder erweitern, die homogene Functionen zweiten Grades der Vectorcomponenten $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{Y}_k$, $\mathfrak{Z}_k$ sind und dabei die Componenten A, B, C der Feldstärke in den *niedrigsten, mit den Symmetrieverhältnissen des Körpers vereinbaren* Potenzen enthalten.

Hierdurch wird ausgedrückt, dass wir *erstens* die Wirkung des Feldes von der Anwesenheit ponderabler Theile abhängig machen, *zweitens* die stattfindenden Kräfte als conservativ betrachten, die Erregung einer Absorption in einem zuvor durchsichtigen Körper also ausschliessen; dass wir *drittens* die Gleichungen der elektrostatisch beeinflussten Lichtbewegung als homogen-lineare ansetzen und somit die Superposition verschiedener Wellen annehmen, und dass wir *viertens* in Bezug auf den Einfluss des Feldes uns auf die erste Annäherung beschränken.

2. Mit den Symmetrieverhältnissen *acentrischer Krystalle* ist ein in den Feldcomponenten A, B, C *linearer* Antheil e' der Energie verträglich, und wir setzen demgemäss hier

$$
(5)\quad \begin{cases} e' = \frac{1}{8\pi}\left[A\sum(d_{11}^k \mathfrak{X}_k^2 + d_{12}^k \mathfrak{Y}_k^2 + d_{13}^k \mathfrak{Z}_k^2\right. \\ \quad + 2\,d_{14}^k \mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k + 2\,d_{15}^k \mathfrak{Z}_k \mathfrak{X}_k + 2\,d_{16}^k \mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k) \\ \quad + B\sum(d_{21}^k \mathfrak{X}_k^2 + d_{22}^k \mathfrak{Y}_k^2 + d_{23}^k \mathfrak{Z}_k^2 \\ \quad + 2\,d_{24}^k \mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k + 2\,d_{25}^k \mathfrak{Z}_k \mathfrak{X}_k + 2\,d_{26}^k \mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k) \\ \quad + C\sum(d_{31}^k \mathfrak{X}_k^2 + d_{32}^k \mathfrak{Y}_k^2 + d_{33}^k \mathfrak{Z}_k^2 \\ \quad \left.+ 2\,d_{34}^k \mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k + 2\,d_{35}^k \mathfrak{Z}_k \mathfrak{X}_k + 2\,d_{36}^k \mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k)\right], \end{cases}
$$

---

1) Vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 68. p. 354. 1899. Dort ist, da es nicht auf den absoluten Werth der Energie ankam, der Factor $1/4\pi$ ausgelassen.

wobei die d_{mn}^k dem Vector $\mathfrak{K}_k$ zugeordnete Constanten bezeichnen. Wie sich dieser Ansatz für die einzelnen Krystallgruppen ohne Symmetriecentrum specialisirt, habe ich an einer anderen Stelle mitgetheilt[1]); für alle centrisch symmetrischen Krystalle, wie auch für isotrope Körper, verschwinden nach Symmetrie sämmtliche d_{mn}^k.

Nach dem Ansatz (5) nehmen nun die erweiterten Gleichungen (3) folgende Gestalt an:

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_h + a_1^h \dfrac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_1^h \dfrac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} + \mathfrak{X}_h D_{11}^h + \mathfrak{Y}_h D_{12}^h + \mathfrak{Z}_h D_{13}^h = \varepsilon_1^h X, \\ \mathfrak{Y}_h + a_2^h \dfrac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} + b_2^h \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2} + \mathfrak{X}_h D_{21}^h + \mathfrak{Y}_h D_{22}^h + \mathfrak{Z}_h D_{23}^h = \varepsilon_2^h Y, \\ \mathfrak{Z}_h + a_3^h \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} + b_3^h \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t^2} + \mathfrak{X}_h D_{31}^h + \mathfrak{Y}_h D_{32}^h + \mathfrak{Z}_h D_{33}^h = \varepsilon_3^h Z, \end{cases}$$

wobei ist

$$(7)\quad \begin{cases} D_{11}^h = A d_{11}^h + B d_{21}^h + C d_{31}^h, & D_{23} = D_{32} = A d_{14}^h + B d_{24}^h + C d_{34}^h, \\ D_{22}^h = A d_{12}^h + B d_{22}^h + C d_{32}^h, & D_{31} = D_{13} = A d_{15}^h + B d_{25}^h + C d_{35}^h, \\ D_{33}^h = A d_{13}^h + B d_{23}^h + C d_{33}^h, & D_{12} = D_{21} = A d_{16}^h + B d_{26}^h + C d_{36}^h; \end{cases}$$

die Formeln (1) und (2) bleiben ungeändert. Rechnet man mit complexen Lösungen und setzt periodische Schwingungen voraus, so folgt aus (6)

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_h (D_1^h + D_{11}^h) + \mathfrak{Y}_h D_{12}^h + \mathfrak{Z}_h D_{13}^h = \varepsilon_1^h X, \\ \mathfrak{X}_h D_{21}^h + \mathfrak{Y}_h (D_2^h + D_{22}^h) + \mathfrak{Z}_h D_{23}^h = \varepsilon_2^h Y, \\ \mathfrak{X}_h D_{31}^h + \mathfrak{Y}_h D_{32}^h + \mathfrak{Z}_h (D_3^h + D_{33}^h) = \varepsilon_3^h Z, \end{cases}$$

wobei

$$(9)\quad 1 + \frac{i a_1^h}{\vartheta} - \frac{b_1^h}{\vartheta^2} = D_1^h, \quad 1 + \frac{i a_2^h}{\vartheta} - \frac{b_2^h}{\vartheta^2} = D_2^h, \quad 1 + \frac{i a_3^h}{\vartheta} - \frac{b_3^h}{\vartheta^2} = D_3^h$$

gesetzt ist, unter $2\pi\vartheta = \tau$ die Schwingungsperiode verstanden.

Die Grössen D_m^h sind hiernach im allgemeinen complex; nur in Spectralbereichen, die frei von Absorptionsstreifen sind, kann man das in i multiplicirte Glied vernachlässigen und die D_m^h als reell betrachten. Dann sind auch für X, Y, Z, $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$ reelle Lösungen zu setzen.

3. Wir wollen uns zunächst nur mit diesem Fall beschäftigen, der der wichtigste ist, weil über ihn allein — d. h.

1) W. Voigt, Compend. d. theor. Physik 1. p. 139 ff. Leipzig 1895.

über sogenannte durchsichtige Körper — Beobachtungen vorliegen. Dabei wollen wir der Erfahrung entsprechend weiter voraussetzen, die Wirkung des elektrischen Feldes sei so schwach, dass die von ihr abhängigen D^h_{mn} als klein neben den D^h_m betrachtet werden dürfen.

In diesem Falle kann man die Gleichungen (8) mit Hülfe der Näherungswerthe

$$(10)\qquad \mathfrak{X}_h D^h_1 = \varepsilon^h_1 X,\quad \mathfrak{Y}_h D^h_2 = \varepsilon^h_2 Y,\quad \mathfrak{Z}_h D^h_3 = \varepsilon^h_3 Z$$

angenähert nach $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$ auflösen und demgemäss schreiben:

$$(11)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_h D^h_1 = +\varepsilon^h_1 X\left(1 - \dfrac{D^h_{11}}{D^h_1}\right) - \varepsilon^h_2 Y \dfrac{D^h_{12}}{D^h_2} - \varepsilon^h_3 Z \dfrac{D^h_{13}}{D^h_3}, \\ \mathfrak{Y}_h D^h_2 = -\varepsilon^h_1 X \dfrac{D^h_{21}}{D^h_1} + \varepsilon^h_2 Y\left(1 - \dfrac{D^h_{22}}{D^h_2}\right) - \varepsilon^h_3 Z \dfrac{D^h_{23}}{D^h_3}, \\ \mathfrak{Z}_h D^h_3 = -\varepsilon^h_1 X \dfrac{D^h_{31}}{D^h_1} - \varepsilon^h_2 Y \dfrac{D^h_{32}}{D^h_2} + \varepsilon^h_3 Z\left(1 - \dfrac{D^h_{33}}{D^h_3}\right). \end{cases}$$

Hiernach nehmen die Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der Gesammtpolarisation gemäss (2) die Werthe an

$$(12)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = +X\left(1 + \sum \dfrac{\varepsilon^k_1}{D^k_1} - \sum \dfrac{\varepsilon^k_1 D^k_{11}}{D^k_1 D^k_1}\right) - Y \sum \dfrac{\varepsilon^k_2 D^k_{12}}{D^k_1 D^k_2} - Z \sum \dfrac{\varepsilon^k_3 D^k_{13}}{D^k_1 D^k_3}, \\ \mathfrak{Y} = -X \sum \dfrac{\varepsilon^k_1 D^k_{21}}{D^k_2 D^k_1} + Y\left(1 + \sum \dfrac{\varepsilon^k_2}{D^k_2} - \sum \dfrac{\varepsilon^k_2 D^k_{22}}{D^k_2 D^k_2}\right) - Z \sum \dfrac{\varepsilon^k_3 D^k_{23}}{D^k_2 D^k_3}, \\ \mathfrak{Z} = -X \sum \dfrac{\varepsilon^k_1 D^k_{31}}{D^k_3 D^k_1} - Y \sum \dfrac{\varepsilon^k_2 D^k_{32}}{D^k_3 D^k_2} + Z\left(1 + \sum \dfrac{\varepsilon^k_3}{D^k_3} - \sum \dfrac{\varepsilon^k_3 D^k_{33}}{D^k_3 D^k_3}\right). \end{cases}$$

Schreibt man diese Formeln kurz

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = X\varepsilon_{11} + Y\varepsilon_{12} + Z\varepsilon_{13}, \\ \mathfrak{Y} = X\varepsilon_{21} + Y\varepsilon_{22} + Z\varepsilon_{23}, \\ \mathfrak{Z} = X\varepsilon_{31} + Y\varepsilon_{32} + Z\varepsilon_{33} \end{cases}$$

und setzt diese Werthe in die Gleichungen (1) ein, so erhält man ein System, das dem nach der elektromagnetischen Lichttheorie für einen beliebig orientirten merklich durchsichtigen Krystall gültigen durchaus conform ist.

Fehlt die Wirkung des elektrischen Feldes, so werden die ε_{mn} für $m \lessgtr n$ gleich Null, die ε_{nn} nehmen die Werthe

$$(14)\qquad \varepsilon^0_{nn} = \eta_n = 1 + \sum \frac{\varepsilon^k_n}{D^k_n}$$

an und gehen in die „dynamischen“ Hauptdielektricitätsconstanten des Krystalles über, die bei Schwingungsvorgängen an die Stelle der für die Gleichgewichtsvorgänge maassgebenden „statischen“ Hauptdielektricitätsconstanten

$$\varepsilon_n = 1 + \sum \varepsilon_n^k \tag{15}$$

treten. Die ε_{mn} repräsentiren somit die *allgemeinen* dynamischen Dielektricitätsconstanten des durch das Feld veränderten und daher nicht mehr auf seine Hauptaxen bezogenen Krystalles.

Nur ein interessanter Unterschied besteht. Zwischen den verallgemeinerten Dielektricitätsconstanten ε_{mn} gelten *nicht* die Beziehungen $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{nm}$, und somit folgen acentrische Krystalle im elektrischen Feld nicht mehr den Fresnel'schen Gesetzen der Doppelbrechung.

Indessen ist die Differenz zwischen ε_{mn} und ε_{nm} in Wirklichkeit äusserst gering, denn die beiden (an sich ungemein kleinen) Grössen unterscheiden sich nur durch die Factoren ε_1^h, ε_2^h oder ε_3^h, welche durch die Beziehungen (15) die Hauptdielektricitätsconstanten ε_1, ε_2, ε_3 des Krystalles bestimmen; da nun die ε_1, ε_2, ε_3 sich im allgemeinen nur wenig unterscheiden, so darf man Gleiches für die ε_1^h, ε_2^h, ε_3^h annehmen und kann daher mit grosser Wahrscheinlichkeit die Beziehung $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{nm}$ für die Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung als merklich erfüllt ansehen.

In der That haben sich die Beobachtungen des Hrn. Pockels[1]) an durchsichtigen Krystallen mit der von ihm als Grundlage seiner Berechnungen eingeführten Annahme, es bleiben im elektrischen Felde die Fresnel'schen Gesetze gültig, verträglich erwiesen.

Führt man die Beziehung $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{nm}$ ein, so ist eine weitere Entwickelung der Formeln unnöthig, denn die Gewinnung jener Gesetze aus den Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie ist bekannt. Indessen soll doch wenigstens so viel gegeben werden, dass der Anschluss der vorstehenden allgemeinen Darlegungen an die von Hrn. Pockels abgeleiteten Formeln und ausgeführten Beobachtungen hergestellt wird.

Hierzu ist es am bequemsten, die Formeln (12) in der Gestalt zu schreiben:

1) Fr. Pockels, Preisschrift p. 4.

(16)
$$\begin{cases} \mathfrak{X} = + X(\eta_1 - \delta_{11}) - Y\delta_{12} - Z\delta_{13}, \\ \mathfrak{Y} = - X\delta_{21} + Y(\eta_2 - \delta_{22}) - Z\delta_{23}, \\ \mathfrak{Z} = - X\delta_{31} - Y\delta_{32} + Z(\eta_3 - \delta_{33}), \end{cases}$$

wobei gilt

(17)
$$\eta_i = 1 + \sum \frac{\varepsilon_i^k}{D_i^k}, \qquad \delta_{mn} = \delta_{nm} = \sum \frac{\varepsilon^k\, D_{mn}^k}{D_m^k\, D_n^k}$$

und in den δ_{mn} für ε_1^k, ε_2^k, ε_3^k ein mittlerer Werth ε^k eingeführt ist, um sie dann unter der Annahme, dass die δ_{mn} klein neben den η_i seien, durch Annäherung nach X, Y, Z aufzulösen.

Man erhält auf diese Weise:

(18)
$$\begin{cases} X = \mathfrak{X}\left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{\delta_{11}}{\eta_1\eta_1}\right) + \mathfrak{Y}\frac{\delta_{12}}{\eta_1\eta_2} + \mathfrak{Z}\frac{\delta_{13}}{\eta_1\eta_3}, \\ Y = \mathfrak{X}\frac{\delta_{21}}{\eta_2\eta_1} + \mathfrak{Y}\left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{\delta_{22}}{\eta_2\eta_2}\right) + \mathfrak{Z}\frac{\delta_{23}}{\eta_2\eta_3}, \\ Z = \mathfrak{X}\frac{\delta_{31}}{\eta_3\eta_1} + \mathfrak{Y}\frac{\delta_{32}}{\eta_3\eta_2} + \mathfrak{Z}\left(\frac{1}{\eta_3} + \frac{\delta_{33}}{\eta_3\eta_3}\right), \end{cases}$$

wofür wir kürzer schreiben:

(19)
$$\begin{cases} X v^2 = \mathfrak{X}\, a_{11} + \mathfrak{Y}\, a_{12} + \mathfrak{Z}\, a_{13}, \\ Y v^2 = \mathfrak{X}\, a_{21} + \mathfrak{Y}\, a_{22} + \mathfrak{Z}\, a_{23}, \\ Z v^2 = \mathfrak{X}\, a_{31} + \mathfrak{Y}\, a_{32} + \mathfrak{Z}\, a_{33}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (1) nehmen bei Einführung dieser Werthe und bei Elimination von L, M, N die Gestalt an:

(20)
$$\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t} = \Delta \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{X}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{Y}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{Z}}\right),$$

. . . .

wobei Δ die gewöhnliche Abkürzung ist und ausserdem gilt:

(21)
$$2\mathfrak{H} = a_{11}\mathfrak{X}^2 + a_{22}\mathfrak{Y}^2 + a_{33}\mathfrak{Z}^2 + 2a_{23}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} + 2a_{31}\mathfrak{Z}\mathfrak{X} + 2a_{12}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}.$$

Die Gleichung des dem Medium im elektrischen Felde zugehörigen Fresnel'schen Ovaloides lautet dann:

(22)
$$r^2 = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{23}\beta\gamma + 2a_{31}\gamma\alpha + 2a_{12}\alpha\beta,$$

wobei α, β, γ die Richtungscosinus des Radiusvector r bezeichnen. Von den Parametern a_{hk} nehmen die Entwickelungen des Hrn. Pockels[1]) ihren Ausgang. Da für verschwindende

1) Fr. Pockels, Preisschrift p. 6.

Feldstärke die δ_{mn} gleich Null sind, so ist dafür das System der Parameter:

$$(23) \quad \begin{cases} a_{11}^0 = \dfrac{v^2}{\eta_1} = a_1\,, \quad a_{22}^0 = \dfrac{v^2}{\eta_2} = a_2\,, \quad a_{33}^0 = \dfrac{v^2}{\eta_3} = a_3\,, \\ a_{23}^0 = a_{31}^0 = a_{12}^0 = 0\,, \end{cases}$$

und es gilt allgemein:

$$(24) \quad \begin{cases} a_{11} = a_1 + \dfrac{\delta_{11}\, a_1^2}{v^2}\,, \quad a_{22} = a_2 + \dfrac{\delta_{22}\, a_2^2}{v^2}\,, \quad a_{33} = a_3 + \dfrac{\delta_{33}\, a_3^2}{v^2}\,, \\ a_{23} = \dfrac{\delta_{23}\, a_2\, a_3}{v^2}\,, \qquad a_{31} = \dfrac{\delta_{31}\, a_3\, a_1}{v^2}\,, \qquad a_{32} = \dfrac{\delta_{12}\, a_1\, a_2}{v^2}\,, \end{cases}$$

wo die Werthe der δ_{mn} aus (17) zu entnehmen sind. Diese Werthe zeigen, dass der Einfluss des elektrischen Feldes besonders stark wird, wenn eines der D_m^h klein ist; solches findet bekanntlich in der Nähe eines der für den Vector $\mathfrak{R}_h$ charakteristischen Absorptionsstreifen statt.

4. Um den vollen Anschluss an die Pockels'schen Resultate zu gewinnen, wollen wir jetzt die denkbar einfachste Annahme machen, dass das optische Verhalten des benutzten Krystalles ausserhalb des elektrischen Feldes durch *einen einzigen* Hülfsvector $\mathfrak{R}'$ dargestellt werde, also z. B. ein einziger Absorptionsstreifen, ausserhalb des sichtbaren Spectrums liegend, existire. Ferner wollen wir annehmen, dass in den stets kleinen δ_{mn} der Unterschied zwischen dem optischen Verhalten in der Richtung der drei Symmetrieaxen vernachlässigt, somit

$$(25) \quad \varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \varepsilon_3' = \varepsilon', \quad D_1' = D_2' = D_3' = D', \quad a_1 = a_2 = a_3 = a$$

gesetzt werden könne.

In diesem Falle wird einfach:

$$(26) \qquad \delta_{mn} = \frac{\varepsilon'\, D_{mn}}{D'^2}\,,$$

und es gilt, falls $\varepsilon'\, a^2 / D'^2\, v^2 = k$ gesetzt wird, unter Benutzung der Werthe (7):

$$(27) \quad \begin{cases} a_{11} - a_1 = k\, D_{11} = k\,(A\, d_{11} + B\, d_{21} + C\, d_{31}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{23} = k\, D_{23} = k\,(A\, d_{14} + B\, d_{24} + C\, d_{34}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Nun ist bei Voraussetzung eines einzigen Hülfsvectors $\mathfrak{R}'$

$$(28) \qquad 1 + \varepsilon' = \varepsilon, \quad 1 + \frac{\varepsilon'}{D'} = \frac{v^2}{a} = n^2,$$

unter ε die mittlere Dielektricitätsconstante, unter n den mittleren Brechungsindex des Krystalles verstanden.

Es gilt demgemäss auch

$$k = \frac{(n^2-1)^2}{n^4(\varepsilon-1)} v^2, \tag{29}$$

und wenn man

$$4\pi v^2 \frac{(n^2-1)^2}{n^4(\varepsilon-1)^2} \cdot d_{mn} = e_{mn} \tag{30}$$

setzt, so stellen die e_{mn} dieselben Parameter dar, die Hr. Pockels eingeführt hat. Seine Beobachtungen bestimmen für eine Reihe von Körpern specieller die Aggregate

$$e_{mn} \cdot \varkappa = \frac{v^2(n^2-1)^2}{n^4(\varepsilon-1)} \cdot d_{mn}, \tag{31}$$

wobei $\varkappa = (\varepsilon - 1)/4\pi$ die mittlere Elektrisirungszahl des Krystalles bezeichnet. Die Grössenordnung der elektro-optischen Wirkung ist nach diesen Bestimmungen derart, dass gilt

$$\frac{(n^2-1)^2}{n^4(\varepsilon-1)} \cdot d_{mn} (=) 10^{-8}, \tag{32}$$

wobei das Zeichen (=) die Grössenordnung angeben mag.

Diese Grössenordnung hat ein weitergehendes Interesse.

Falls nämlich der Ansatz (5) der Wirklichkeit entspricht, so erfordert die elektrische Influenz eines acentrischen Krystalles, wenn er von einer Lichtwelle durchsetzt wird, eine andere Arbeit, als wenn dies nicht geschieht. Der Krystall muss also durch das Licht elektrostatisch erregt werden, und zwar ergeben sich die Momente a, b, c der Volumeneinheit nach bekannten Grundsätzen bez. gleich $-\partial e'/\partial A$, $-\partial e'/\partial B$, $-\partial e'/\partial C$. Ist nur *ein* Hülfsvector $\mathfrak{K}'$ vorhanden, so folgt aus (10) und (28) angenähert

$$\mathfrak{X}' = (n^2-1)X, \quad \mathfrak{Y}' = (n^2-1)Y, \quad \mathfrak{Z}' = (n^2-1)Z, \tag{33}$$

also aus (5)

$$\left\{\begin{aligned} -8\pi a = (n^2-1)^2(d_{11}X^2 + d_{12}Y^2 + d_{13}Z^2 + 2d_{14}YZ \\ + 2d_{15}ZX + 2d_{16}XY), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Nun kann man den Energiefluss j parallel der Fortpflanzungsrichtung einer ebenen Welle jedenfalls als von der Grössenordnung von

$$\frac{v}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

also X^2, Y^2, Z^2 von der Grössenordnung von $8\pi j/v$ betrachten. Die Momente a, b, c sind daher von der Ordnung von $j d_{mn}/v$.

Weiter lässt sich der Energiefluss des Sonnenlichtes nach den Beobachtungen über die dadurch bewirkte Erwärmung etwa von der Grössenordnung 10^6 schätzen; da aber nach (32) die d_{mn} von der Ordnung 10^{-8} sind, und v von der Ordnung 10^{10} ist, so erhält man a, b, c als von der Ordnung 10^{-12}.

Trägt der Krystall normal zu der elektrischen Axe Belegungen von zusammen 100 cm^2 Fläche — was natürlich einen besonders günstigen Fall darstellt —, so wird auf denselben bei der Erregung durch Sonnenlicht eine Ladung von 10^{-10} absoluten Einheiten frei werden, und wenn die Capacität der Belegungen mit den angehängten Quadranten des Elektrometers gleich 100 ist, so wird eine Potentialdifferenz von 10^{-12} auf ihnen entstehen.

Bis hierher sind elektrostatische Einheiten benutzt. Geht man zum elektromagnetischen Maasssystem über, so erhält man als Grössenordnung dieser Potentialdifferenz 10^{-2} absolute Einheiten.

Unter den angenommenen günstigen Umständen müssten also eine photoelektrisch erregte Potentialdifferenz von ca. 10^{-10} Volt zwischen den Belegungen des Krystalles eintreten. Es scheint an sich nicht unmöglich, einen so kleinen Betrag zur Wahrnehmung zu bringen; jedenfalls sind aber die von Anderen an acentrischen Krystallen aufgefundenen und als photoelektrische Wirkungen gedeuteten Erscheinungen von einer ganz anderen Grössenordnung und somit durch die vorstehende, höchst allgemeine Theorie nicht zu erklären. Da jene Effecte zum Theil mit den Symmetrieverhältnissen, die bei photoelektrischen Vorgängen herrschen müssen, im directen Widerspruch stehen, so hat die bereits mehrfach vertretene Auffassung, dass sie pyroelektrischen Ursprung besitzen (dies Wort im allgemeinen Sinne benutzt), eine hohe Wahrscheinlichkeit.

5. Im Vorstehenden ist der Fall vorausgesetzt, dass die betrachteten Krystalle von Natur nur die gewöhnliche Doppelbrechung zeigen, also inactiv sind. Die Berücksichtigung der Activität, welche bei gewissen acentrischen Krystallen nach den Symmetrieverhältnissen möglich und nach der Erfahrung auch thatsächlich vorhanden ist, erfordert eine Erweiterung der obigen Formeln. Da die Activität zweifellos durch be-

stimmte Eigenschaften der *ponderabeln* Theile bedingt wird, so erscheint es sachgemäss, auch ihre Darstellung durch Modification der Formeln (3) zu versuchen, die das Verhalten der für den elektrischen Zustand der ponderabeln Materie charakteristischen Vectoren $\mathfrak{K}_h$ bestimmen.

Eine einfache Erweiterung, die den betreffenden Symmetrieverhältnissen entspricht, besteht darin, auf den rechten Seiten der Gleichungen (3) bez. (6) die Ausdrücke

$$-\gamma_1^h \frac{\partial L}{\partial t}, \quad -\gamma_2^h \frac{\partial M}{\partial t}, \quad -\gamma_3^h \frac{\partial N}{\partial t}$$

zuzufügen, in denen die γ_i^h Constanten von beiläufig stets äusserst kleinem Betrag bezeichnen.

Indessen genügt dies nicht, wenn, was plausibel ist, die Ursachen der Activität als *conservative* Vorgänge betrachtet werden; denn diese Glieder liefern in der Gleichung der Energie, wo sie mit $\partial \mathfrak{X}_h/\partial t$, $\partial \mathfrak{Y}_h/\partial t$, $\partial \mathfrak{Z}_h/\partial t$ multiplicirt auftreten, keinen Differentialquotienten nach der Zeit. Um mit derartigen Gliedern conservative Wirkungen zu erhalten, ist es vielmehr nöthig, auch noch das erste System der Gleichungen (1) durch Hinzufügung der Ausdrücke

$$\sum \frac{\gamma_1^k}{\varepsilon_1^k} \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_k}{\partial t^2}, \quad \sum \frac{\gamma_2^k}{\varepsilon_2^k} \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_k}{\partial t^2}, \quad \sum \frac{\gamma_3^k}{\varepsilon_3^k} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_k}{\partial t^2}$$

zu erweitern. Dann liefern die zugesetzten Glieder, wie leicht zu sehen, einen Antheil an der elektromagnetischen Energie von der Form

$$\frac{1}{4\pi} \sum \left(\frac{\gamma_1^k}{\varepsilon_1^k} \frac{\partial \mathfrak{X}_k}{\partial t} L + \frac{\gamma_2^k}{\varepsilon_2^k} \frac{\partial \mathfrak{Y}_k}{\partial t} M + \frac{\gamma_3^k}{\varepsilon_3^k} \frac{\partial \mathfrak{Z}_k}{\partial t} N \right).$$

Entwickeln wir zunächst die Formeln für den einem elektrischen Felde nicht ausgesetzten Krystall. Wir haben hier nach dem eben Gesagten

$$(35) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = v\left(\dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}\right), \quad \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = v\left(\dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y}\right), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mathfrak{L} = L + \sum \dfrac{\gamma_1^k}{\varepsilon_1^k} \dfrac{\partial \mathfrak{X}_k}{\partial t}, \quad \mathfrak{X} = X + \sum \mathfrak{X}_h, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

$$(36) \quad \mathfrak{X}_h + a_1^h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_1^h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} = \varepsilon_1^h X - \gamma_1^h \frac{\partial L}{t \partial}.$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Wie $\mathfrak{X}$ als Componente der elektrischen, so lässt sich $\mathfrak{L}$ als diejenige der magnetischen Polarisation auffassen, und die in den Formeln enthaltenen Annahmen lassen sich dahin aussprechen, dass in activen Körpern nicht nur *örtlich* wechselnde elektrische Kräfte magnetisch, *örtlich* wechselnde magnetische Kräfte elektrisch wirken, sondern schon eine nur *zeitliche* Veränderung der einen Componente die parallele andere erregt.

Für periodische Schwingungen folgt aus dem System (35) und (36) bei Vernachlässigung der in den γ_i^h quadratischen Gliedern

$$(37)\quad \begin{cases} \eta_1 \dfrac{\partial^2 X}{\partial t} = v^2 \left[\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}\right)\right] \\ \qquad + \beta_1 \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

wobei

$$\eta_i = 1 + \sum \frac{\varepsilon_i^k}{D_i^k}, \qquad \beta_i = 2\,v \sum \frac{\gamma_i^k}{D_i^k}$$

ist.

Dies (angenäherte) Formelsystem fällt bei durchsichtigen (insbesondere isotropen) Körpern mit dem in diesem Fall zur Erklärung der Activität von Hrn. Drude[1]) gemachten Ansatz zusammen.

Gehen wir nun zu der Wirkung des elektrischen Feldes auf den natürlich activen Krystall über, so führt die p. 301 benutzte Annäherung statt auf die Formeln (11) einfach auf das folgende System

$$(38)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_h D_1^h = \varepsilon_1^h X\left(1 - \dfrac{D_{11}^h}{D_1^h}\right) - \varepsilon_2^h Y \dfrac{D_{12}^h}{D_2^h} - \varepsilon_3^h Z \dfrac{D_{13}^h}{D_3^h} \\ \qquad - v \gamma_1^h \left(\dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

1) P. Drude, Gött. Nachr. von 1892, p. 402. Der von Hrn. Drude gemachte Ansatz scheint mir übrigens, entgegen einer von dem Hrn. Autor gemachten Bemerkung, doch keinen streng conservativen Vorgang darzustellen.

und für die elektrischen Polarisationen gilt statt (13) nunmehr

$$(39) \qquad \mathfrak{X} = X\varepsilon_{11} + Y\varepsilon_{12} + Z\varepsilon_{13} - \frac{1}{2}\beta_1\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right),$$

. . . .

Dies zeigt, dass innerhalb der eingeführten Annäherung die Wirkung der Activität und die des elektrischen Feldes sich einfach superponiren, wie das auch Hr. Pockels in der oben citirten Arbeit [1]), wenngleich in anderer Weise, verwerthet hat.

6. Besondere Erscheinungen signalisiren die vorstehenden Ansätze für die Fälle, dass das Absorptionsspectrum des dem elektrischen Feld ausgesetzten Krystalles schmale und intensive Absorptionsstreifen zeigt und in deren unmittelbarer Umgebung beobachtet wird. Hier ist die auf p. 301 eingeführte Annäherung nicht zulässig, die D_m^h können von derselben Grössenordnung werden, wie die D_{mn}^h, die γ_i^h wie die ε_{mn}. Es ist dann auf die strengen Formeln (6) oder (8) (eventuell unter Heranziehung der zur Darstellung der Activität dienenden Ergänzungsglieder) zurückzugreifen.

Lassen wir die Berücksichtigung der Activität bei Seite, was auch bei activen Krystallen, die nicht dem regulären System angehören, für die meisten Fortpflanzungsrichtungen unbedingt zulässig ist, so zeigen die Formeln (8), dass Wellen möglich sind, in denen die elektrische Kraft der X-Symmetrieaxe parallel schwingt, falls nur nach der Symmetrie des Krystalles die Parameter D_{21}^h und D_{31}^h verschwinden. Dann nimmt die erste Gleichung (8) die einfache Form

$$(40) \qquad \mathfrak{X}_h(D_1^h + D_{11}^h) = \varepsilon_1^h X$$

an, aus der sich ergiebt, dass durch die Wirkung des elektrischen Feldes die solchen Wellen eigenen Absorptionsstreifen Verschiebungen erleiden. Denn die Lage eines dem Vector $\mathfrak{R}_h$ zugehörigen, sehr feinen Absorptionsstreifens ist durch die Schwingungsdauer bestimmt, für welche der Factor von $\mathfrak{X}_h$ bei in D_1^h verschwindend gesetztem a_1^h selbst verschwindet, und diese ist nach (38) von D_{11}^h abhängig.

Hier wird also ein elektrisches Analogon zu der magnetischen Einwirkung auf die Lage der Absorptionsstreifen signalisirt, die als inverses Zeeman-Phänomen bekannt ist.

1) Fr. Pockels, Preisschrift p. 30.

Da indessen acentrische Krystalle mit hinreichend feinen Absorptionsstreifen, um solche Verschiebungen sichtbar werden zu lassen, nicht bekannt sind, so hat die weitere Erörterung dieser und ähnlicher Erscheinungen kein Interesse.

Aus dem gleichen Grunde mag auch die Erörterung der Veränderungen unterbleiben, welche die für *active* Krystalle oben abgeleiteten Resultate in der Nähe feiner und intensiver Absorptionsstreifen erleiden.

7. Mit den Symmetrieverhältnissen *aller*, auch der centrisch-symmetrischen Krystalle und ebenso der isotropen Körper ist ein in den Feldcomponenten *A*, *B*, *C quadratischer* Antheil *e'* an der elektrischen Energie verträglich, den wir schreiben wollen

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} e' = \frac{1}{8\pi}\Big[& A^2 \sum (e_{11}^k \mathfrak{X}_k^2 + e_{12}^k \mathfrak{Y}_k^2 + e_{13}^k \mathfrak{Z}_k^2 \\ & + 2 e_{14}^k \mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k + 2 e_{15}^k \mathfrak{Z}_k \mathfrak{X}_k + 2 e_{16}^k \mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k) \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + 2 A B \sum (e_{61}^k \mathfrak{X}_k^2 + e_{62}^k \mathfrak{Y}_k^2 + e_{63}^k \mathfrak{Z}_k^2 \\ & + 2 e_{64}^k \mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k + 2 e_{65}^k \mathfrak{Z}_k \mathfrak{X}_k + 2 e_{66}^k \mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k)\Big]; \end{aligned}\right.$$

hierin sind die e_{mn}^k dem Vector $\mathfrak{R}_k$ zugeordnete Constanten. Wie sich dieser Ansatz für die einzelnen Krystallgruppen specialisirt, ist an einer anderen Stelle auseinander gesetzt worden.[1])

Wir beschränken uns hier auf den bisher allein interessirenden Fall *isotroper* Körper, wo der Ansatz (41) folgende Gestalt annimmt:

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} e' = \frac{1}{8\pi}\Big[& A^2 \sum (e_k \mathfrak{X}_k^2 + e_k' \mathfrak{Y}_k^2 + e_k' \mathfrak{Z}_k^2) \\ & + B^2 \sum (e_k' \mathfrak{X}_k^2 + e_k \mathfrak{Y}_k^2 + e_k' \mathfrak{Z}_k^2) \\ & + C^2 \sum (e_k' \mathfrak{X}_k^2 + e_k' \mathfrak{Y}_k^2 + e_k \mathfrak{Z}_k^2) \\ & + 2 B C \sum e_k'' \mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k + 2 C A \sum e_k'' \mathfrak{Z}_k \mathfrak{X}_k + 2 A B \sum e_k'' \mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k \Big] \end{aligned}\right.$$

und $e_k'' = e_k - e_k'$ ist.

Unter Rücksicht auf diesen Werth lauten nun für einen isotropen Körper die wegen der Wirkung des elektrischen Feldes erweiterten Gleichungen (3):

1) W. Voigt, Komp. der theor. Physik. 1. p. 142. 1895.

$$(43)\begin{cases}\mathfrak{X}_h + a_h\dfrac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h\dfrac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} + \mathfrak{X}_h E_{11}^h + \mathfrak{Y}_h E_{12}^h + \mathfrak{Z}_h E_{13}^h = \varepsilon_h X,\\ \mathfrak{Y}_h + a_h\dfrac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} + b_h\dfrac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2} + \mathfrak{X}_h E_{21}^h + \mathfrak{Y}_h E_{22}^h + \mathfrak{Z}_h E_{23}^h = \varepsilon_h Y,\\ \mathfrak{Z}_h + a_h\dfrac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} + b_h\dfrac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t^2} + \mathfrak{X}_h E_{31}^h + \mathfrak{Y}_h E_{32}^h + \mathfrak{Z}_h E_{33}^h = \varepsilon_h Z,\end{cases}$$

wobei ist:

$$(44)\begin{cases}E_{11}^h = A^2 e_h + B^2 e_h' + C^2 e_h'. & E_{23}^h = E_{32}^h = BCe_h'',\\ E_{22}^h = A^2 e_h' + B^2 e_h + C^2 e_h'. & E_{31}^h = E_{13}^h = CAe_h'',\\ E_{33}^h = A^2 e_h' + B^2 e_h' + C^2 e_h. & E_{12}^h = E_{21}^h = ABe_h''.\end{cases}$$

Die Formeln (43) gehen dem System (6) genau parallel und gestatten die analoge Behandlung. Insbesondere gelten unter der p. 301 gemachten Voraussetzung, dass ein merklich absorptionsfreies Spectralbereich untersucht wird, den Gleichungen (16) analoge, die wir schreiben:

$$(45)\quad\begin{cases}\mathfrak{X} = + X(\eta - \eta_{11}) - Y\eta_{12} - Z\eta_{13},\\ \mathfrak{Y} = - X\eta_{21} + Y(\eta - \eta_{22}) - Z\eta_{23},\\ \mathfrak{Z} = - X\eta_{31} - Y\eta_{32} + Z(\eta - \eta_{33}),\end{cases}$$

wobei

$$(46)\quad \eta = 1 + \sum \frac{\varepsilon_k}{D_k}, \quad \eta_{mn} = \eta_{nm} = \sum \frac{\varepsilon_k E_{mn}^k}{D_k^2}, \quad D_k = 1 - \frac{b_k}{\vartheta^2}$$

ist; ebenso bleiben die Formeln (20) und (21) gültig, wenn nur an Stelle von (24) die Beziehungen treten:

$$(47)\begin{cases}a_{11} = a + \eta_{11}\dfrac{a^2}{v^2}, & a_{22} = a + \dfrac{\eta_{22}a^2}{v^2}, & a_{33} = a + \dfrac{\eta_{33}a^2}{v^2},\\ a_{23} = \dfrac{\eta_{23}a^2}{v^2}, & a_{31} = \dfrac{\eta_{31}a^2}{v^2}, & a_{12} = \dfrac{\eta_{12}a^2}{v^2}.\end{cases}$$

Da man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Richtung der Kraftlinien mit der Z-Axe zusammenfallen lassen, also $A=0$, $B=0$, $C=R$ setzen kann, und da a das Quadrat der dem betrachteten Körper ausserhalb des elektrischen Feldes eigenen Lichtgeschwindigkeit ω bedeutet, somit $v^2/a = n^2$, d. h. das Quadrat seines Brechungsindexes darstellt, so resultirt unter der gemachten Annahme:

$$(48)\quad\begin{cases}a_{11} = \omega^2\left(1 + \dfrac{R^2}{n^2}\sum \dfrac{\varepsilon_k e_k'}{D_k^2}\right) = a_{22},\\ a_{33} = \omega^2\left(1 + \dfrac{R^2}{n^2}\sum \dfrac{\varepsilon_k e_k}{D_k^2}\right), \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0.\end{cases}$$

Die Wirkung des elektrischen Feldes erscheint wiederum am grössten in der Nähe eines Absorptionsstreifens, wo eines der D_k seinen kleinsten Werth annimmt.

Nach Beobachtungen von Kerr[1]) (welche übrigens die im Vorstehenden zum Ausdruck kommende Proportionalität der Wirkung mit dem *Quadrat* der Feldstärke bestätigen) scheint die Geschwindigkeit der *ordinären* Welle durch das Feld nur sehr wenig geändert zu werden; dies erklärt sich am einfachsten durch neben den e_k kleinen Werthen der e_k'. Die Constanten e_k besitzen nach den Beobachtungen für verschiedene Körper verschiedenes Vorzeichen. —

Bei Benutzung der vorstehend festgestellten Lage des Coordinatensystemes und bei Voraussetzung merklicher Absorption und periodischer Schwingungen geben die *strengen* Formeln (43):

$$(49)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_h(D_h + R^2 e_h') = \varepsilon_h X, \quad \mathfrak{Y}_h(D_h + R^2 e_h') = \varepsilon_h Y, \\ \mathfrak{Z}_h(D_h + R^2 e_h) = \varepsilon_h Z, \quad \text{wobei } D_h = 1 + \frac{i a_h}{\vartheta} - \frac{b_h}{\vartheta^2}. \end{cases}$$

Sie verlangen, gemäss dem p. 309 Gesagten, für die beiden normal zu den Kraftlinien fortschreitenden ebenen Wellen Verschiebungen der Absorptionsstreifen von verschiedener Grösse, also unter günstigen Verhältnissen schmaler und intensiver Absorptionsstreifen eine Art von inversem Zeeman-Effect, insofern eine einfallende Welle natürlichen Lichtes statt jedes ursprünglich vorhandenen Absorptionsstreifens im elektrischen Felde deren zwei liefern muss. Eine parallel den Kraftlinien fortschreitende ebene Welle müsste im elektrischen Felde nur eine einfache Verschiebung der Absorptionsstreifen erleiden.

Da leuchtende Dämpfe isotrop sind, so müssen auf sie die obigen Resultate anwendbar sein; nach dem Kirchhoff'schen Gesetz müsste überdies dem inversen Zeeman-Effect ein directer parallel gehen.

Obwohl alle diese Erscheinungen noch nicht beobachtet sind, so kann an ihrem Vorhandensein doch nicht wohl gezweifelt werden. Denn sie sind durch die Theorie mit der von Kerr entdeckten elektrisch erregten Doppelbrechung in ganz derselben Weise verknüpft, wie die Zeeman-Effecte mit der von Faraday aufgefundenen magnetischen Drehung der Polarisationsebene. Versuche zum Nachweis derselben sind im Gange. —

1) J. Kerr, Phil. Mag. (5.) 37. p. 380—394. 1894.

Ganz analog, wie p. 305 aus dem Ansatz (5), so kann ıch aus dem neuen Ansatz (41) bez. (42) für die Energie e' ɜschlossen werden, dass zur Influenzirung eines beliebigen *ırchlichteten* Körpers eine andere Arbeit erforderlich ist, als ı der des *unbelichteten*, und dass demgemäss im ersteren 'alle durch das Licht elektrische Momente von der Stärke $= -\partial e'/\partial A$, $b = -\partial e'/\partial B$, $c = -\partial e'/\partial C$ erregt werden. 'a diese Ausdrücke in A, B, C linear sind, so stellt sich das ,esultat als eine Abhängigkeit der Elektrisirungszahl des :örpers von der Durchlichtung dar.

Um die Grössenordnung dieser Abhängigkeit zu schätzen, ehmen wir, wie früher, an, dass der betrachtete Körper durch ınen einzigen Hülfsvector $\mathfrak{R}'$ charakterisirt wäre, und wir uns ıf das Spectralbereich merklicher Durchsichtigkeit beschränken. ıassen wir dann eine ebene homogene Welle parallel zur -Axe fortschreiten, setzen also $\mathfrak{Z}' = 0$, und bestimmen das [oment in der Richtung der X-Axe, so erhalten wir aus (42)
$- 4\pi a = A(e\mathfrak{X}'^2 + e'\mathfrak{Y}'^2)$.

Führen wir wieder den Energiefluss j der Lichtwelle ein, so eralten wir nach p. 305 für die Aenderung der Elektrisirungszahl es Körpers infolge der Durchstrahlung die Grössenordnung $j\,e/v$.

Aus Beobachtungen von Hrn. Quincke darf man für chwefelkohlenstoff die Grössenordnung von e auf etwa 10^{-7} :hätzen; combinirt man hiermit die für Sonnenlicht etwa anunehmende Grösse $j = 10^6$, hierzu $v = 3.10^{-10}$, so gelangt ıan zu einem Einfluss der Durchlichtung auf die Elektrisirungsahl, der kaum 10^{-11} erreichen dürfte. Auch diese reciproke Virkung ist also ungemein klein.

8. Die vorstehend entwickelte Theorie ist insofern die enkbar allgemeinste, als sie zwischen den Parametern der Anätze (5) und (41) bez. (42) keine anderen Beziehungen ergiebt, ls die sich aus den Symmetrieverhältnissen des Körpers erebenden. Man kann indessen eine sehr plausible specielle Hypohese einführen, aus welcher noch weitere Beziehungen folgen.

Die oben gemachten Ansätze stellen sich dar als Erreiterungen des Ausdruckes für die Energie eines von Schwinungen erfüllten, selectiv absorbirenden Körpers, bei denen ie den Körper charakterisirenden Constanten mit Functionen er äusseren, constanten, elektrischen Feldstärke vertauscht sind.

Sie führen also neben der periodischen Feldstärke der Schwingung diese constante äussere Feldstärke in wesentlich anderer Wirkungsweise ein und entfernen sich dadurch im Grunde etwas von den allgemeinen Vorstellungen der elektromagnetischen Lichttheorie, die nur *eine* Art elektrischer (bez. magnetischer) Felder anerkennt. Dagegen scheint die Annahme eines verschiedenen Verhaltens der schwingenden, inneren und der constanten, äusseren elektrischen Feldstärke jenen specielleren Theorien der Elektrodynamik, welche von der Vorstelllung positiv oder negativ geladener kleinster Theilchen ponderabler Materie ausgehen, sehr wohl zu entsprechen.

Man stellt sich durchaus auf den Boden der allgemeinen Theorie, wenn man annimmt, dass der gebräuchliche Ansatz für die elektrische Energie nur eine erste Annäherung ist, und dass derselbe bei grossen Feldstärken durch Glieder höheren Grades vervollständigt werden muss. Der Werth der elektrischen Energie e würde dann etwa zu schreiben sein

(50) $$e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4,$$

wobei

(51) $$8\pi e_1 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

(52) $$\begin{cases} 8\pi e_2 = \sum \left[\frac{1}{\varepsilon^k_1} \left(\mathfrak{X}_k^2 + b^k_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_k}{\partial t} \right)^2 \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon^k_2} \left(\mathfrak{Y}_k^2 + b^k_2 \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}_k}{\partial t} \right)^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon^k_3} \left(\mathfrak{Z}_k^2 + b^k_3 \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}_k}{\partial t} \right)^2 \right) \right] \end{cases}$$

die früher allein benutzten Glieder, und

(53) $$\begin{cases} 12\pi e_3 = \sum [\mathfrak{d}^k_{11} \mathfrak{X}_k^3 + \mathfrak{d}^k_{22} \mathfrak{Y}_k^3 + \mathfrak{d}^k_{33} \mathfrak{Z}_k^3 \\ \quad + 3\mathfrak{X}_k (\mathfrak{d}^k_{12} \mathfrak{Y}_k^2 + \mathfrak{d}^k_{13} \mathfrak{Z}_k^2) + 3\mathfrak{Y}_k (\mathfrak{d}^k_{23} \mathfrak{Z}_k^2 + \mathfrak{d}^k_{21} \mathfrak{X}_k^2) \\ \quad + 3\mathfrak{Z}_k (\mathfrak{d}^k_{31} \mathfrak{X}_k^2 + \mathfrak{d}^k_{32} \mathfrak{Y}_k^2) + 3\mathfrak{d}\, \mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k], \end{cases}$$

(54) $$\begin{cases} 16\pi e_4 = \sum \left[\mathfrak{e}^k_{11} \mathfrak{X}_k^4 + \mathfrak{e}^k_{22} \mathfrak{Y}_k^4 + \mathfrak{e}^k_{33} \mathfrak{Z}_k^4 \right. \\ \quad + 4\mathfrak{X}_k^2 (\mathfrak{e}^k_{12} \mathfrak{Y}_k^2 + \mathfrak{e}^k_{13} \mathfrak{Z}_k^2 + \mathfrak{e}^k_1 \mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k) \\ \quad + 4\mathfrak{Y}_k^2 (\mathfrak{e}^k_{24} \mathfrak{Z}_k^2 + \mathfrak{e}^k_{21} \mathfrak{X}_k^2 + \mathfrak{e}^k_2 \mathfrak{Z}_k \mathfrak{X}_k) \\ \quad \left. + 4\mathfrak{Z}_k^2 (\mathfrak{e}^k_{31} \mathfrak{X}_k^2 + \mathfrak{e}^k_{32} \mathfrak{Y}_k^2 + \mathfrak{e}^k_3 \mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k) \right] \end{cases}$$

Ergänzungsglieder darstellen.

Zerfällt nun die Feldstärke in einen sehr grosse constanten und einen viel kleineren periodisch wechselnden Theil, so ist in diesen Ausdrücken

$$A + X,\quad B + Y,\quad C + Z,\quad \mathfrak{A}_k + \mathfrak{X}_k,\quad \mathfrak{B}_k + \mathfrak{Y}_k,\quad \mathfrak{C}_k + \mathfrak{Z}_k$$

an die Stelle von X, Y, Z, $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{Y}_k$, $\mathfrak{Z}_k$ zu setzen und eine Entwickelung nach Potenzen der kleinen Grössen vorzunehmen.

Für den Schwingungsvorgang sind die in den letzteren Grössen constanten oder linearen Glieder ohne Einfluss; die Glieder zweiten Grades liefern die oben entwickelte Theorie der elektro-optischen Vorgänge in etwas specialisirter Form.

In der That, da aus den Gleichungen (3) für die constanten Antheile die in den Gliedern dritten Grades als angenähert richtig zu benutzenden Beziehungen folgen

$$\mathfrak{A}_h = \varepsilon_1^h A, \quad \mathfrak{B}_h = \varepsilon_2^h B, \quad \mathfrak{C}_h = \varepsilon_3^h C, \tag{55}$$

so liefert e_3 den folgenden Antheil zur Energie

$$\left\{\begin{aligned} 4\pi e_3' = \sum\Big[& A\,\varepsilon_1^k (\mathfrak{d}_{11}^k \mathfrak{X}_k^2 + \mathfrak{d}_{12}^k \mathfrak{Y}_k^2 + \mathfrak{d}_{13}^k \mathfrak{Z}_k^2 \\ & + \mathfrak{d}^k \mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k + 2\,\mathfrak{d}_{31}^k \mathfrak{Z}_k \mathfrak{X}_k + 2\,\mathfrak{d}_{21}^k \mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k) \\ & + B\,\varepsilon_2^k (\mathfrak{d}_{21}^k \mathfrak{X}_k^2 + \mathfrak{d}_{22}^k \mathfrak{Y}_k^2 + \mathfrak{d}_{23}^k \mathfrak{Z}_k^2 \\ & + 2\,\mathfrak{d}_{32}^k \mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k + \mathfrak{d}^k \mathfrak{Z}_k \mathfrak{X}_k + 2\,\mathfrak{d}_{12}^k \mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k) \\ & + C\,\varepsilon_3^k (\mathfrak{d}_{31}^k \mathfrak{X}_k^2 + \mathfrak{d}_{32}^k \mathfrak{Y}_k^2 + \mathfrak{d}_{33}^k \mathfrak{Z}_k^2 \\ & + 2\,\mathfrak{d}_{23}^k \mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k + 2\,\mathfrak{d}_{13}^k \mathfrak{Z}_k \mathfrak{X}_k + \mathfrak{d}^k \mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k)\Big], \end{aligned}\right. \tag{56}$$

der dem Ansatz (5) gleich gestaltet ist, aber statt 18 nur 10 voneinander unabhängige Constanten besitzt.

Bezüglich der Entwickelung von e_4 wollen wir uns, wie oben, auf den Fall eines isotropen Körpers beschränken, also von dem Ansatz ausgehen

$$16\pi e_4 = \sum \mathfrak{e}_k (\mathfrak{X}_k^2 + \mathfrak{Y}_k^2 + \mathfrak{Z}_k^2)^2. \tag{57}$$

Dann erhält man als Glied zweiten Grades bei Einführung der wiederum angenähert richtigen Beziehungen

$$\mathfrak{A}_h = \varepsilon_h A, \quad \mathfrak{B}_h = \varepsilon_h B, \quad \mathfrak{C}_h = \varepsilon_h C \tag{58}$$

das folgende

$$\left\{\begin{aligned} 8\pi e_4' = \sum \mathfrak{e}_h\, \varepsilon_h^2 \Big[& A^2 (3\,\mathfrak{X}_k^2 + \mathfrak{Y}_k^2 + \mathfrak{Z}_k^2) \\ & + B^2 \quad (\mathfrak{X}_k^2 + 3\,\mathfrak{Y}_k^2 + \mathfrak{Z}_k^2) \\ & + C^2 \quad (\mathfrak{X}_k^2 + \mathfrak{Y}_k^2 + 3\,\mathfrak{Z}_k^2) \\ & + 4\,(B\,C\,\mathfrak{Y}_k \mathfrak{Z}_k + C\,A\,\mathfrak{Z}_k \mathfrak{X}_k + A\,B\,\mathfrak{X}_k \mathfrak{Y}_k)\Big]. \end{aligned}\right. \tag{59}$$

Dies Resultat entspricht genau dem Ansatz (42), wenn man dort die Relation $e_k = 3\,e_k'$ einführt. Für die Parameter

des Fresnel'schen Ovaloides würde nach (48) hieraus die Beziehung folgen:

$$a_{11} - \omega^2 = a_{22} - \omega^2 = \frac{1}{3}(a_{33} - \omega).$$

Die oben citirten Kerr'schen Beobachtungen scheinen diese Beziehung nicht zu bestätigen; indessen sind die Resultate keineswegs sehr sicher, z. B. nicht von der secundären Wirkung des elektrischen Feldes durch die begleitende Elektrostriction befreit. Bemerkenswerth ist immerhin, dass sie die e'_h weit kleiner, als die e_h zu ergeben scheinen.

Die vorstehenden Entwickelungen gehen nahe parallel dem Versuche einer Theorie der elektro-optischen Wirkungen auf Grund der Annahme von mit der Feldstärke variirenden Dielektricitätsconstanten, den Hr. Pockels [1]) mitgetheilt hat. Indessen sind in jener Arbeit noch die gewöhnlichen „statischen" Dielektricitätsconstanten als für die optischen Phänomen maassgebend betrachtet, was sich nicht halten lässt, während hier der moderne Begriff der „dynamischen" Dielektricitätsconstanten benutzt ist.

9. Was das p. 305 erörterte reciproke Phänomen, das Entstehen eines elektrostatischen Feldes in einer Lichtwelle, betrifft, so wird dasselbe auch durch die modificirte Theorie, wenngleich in etwas anderer Weise, gefordert.

Der Ansatz (53) liefert nämlich bei der oben beschriebenen Operation ein Glied, welches von dritter Ordnung in $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$ ist und mit dem in (53) hingeschriebenen Ausdruck selbst übereinstimmt. Ihm entsprechen dann in den erweiterten Gleichungen (6) Glieder zweiten Grades in $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$, z. B. in der ersten die folgenden

$$\mathfrak{d}_{11}^h \mathfrak{X}_h^2 + \mathfrak{d}_{12}^h \mathfrak{Y}_h^2 + \mathfrak{d}_{13}^h \mathfrak{Z}_h^2 + \mathfrak{d}\, \mathfrak{Y}_h \mathfrak{Z}_h + 2\,\mathfrak{d}_{31}^h \mathfrak{Z}_h \mathfrak{X}_h + 2\,\mathfrak{d}_{21}^h \mathfrak{X}_h \mathfrak{Y}_h.$$

Solche Glieder geben bei einer Lichtbewegung einen von Null verschiedenen Mittelwerth und demgemäss auch einen constanten Antheil an $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$, der sich in einem elektrostatischen Feld geltend machen muss.

An den Ansatz (54) bez. (57) kann man eine ähnliche Betrachtung anknüpfen. —

1) Fr. Pockels, Göttinger Nachr., Math.-physik. Klasse p. 102. 1894.

Auch die früher von mir[1]) zur Erklärung des normalen Zeeman-Effectes aufgestellten Differentialgleichungen gestatten die gleiche Behandlung.

Hier war an Stelle des Systems (3) für isotrope Körper das folgende geschrieben

$$(60)\qquad \mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} + c_h \left(C \frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} - B \frac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} \right) = \varepsilon_h X,$$

. . . .

wobei die c_h Constanten bedeuten, und unter A, B, C die Componenten des äusseren *magnetischen* Feldes verstanden sind. Es entspricht dem in diesem Abschnitt angenommenen, in die letzteren Grössen auch die bei der Lichtschwingung veränderlichen Antheile L, M, N der magnetischen Componenten einzubeziehen; da die in c_h multiplicirten Glieder keinen Antheil zur Energie liefern, so erleidet *deren* Werth hierdurch keine Veränderung.

Wirkt dann kein äusseres Feld, so lauten nach dieser Annahme die vorstehenden Formeln

$$(61)\qquad \mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} + c_h \left(N \frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} - M \frac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} \right) = \varepsilon_h X,$$

. . . .

die in c_h multiplicirten Terme geben bei periodischen Schwingungen im allgemeinen einen von Null verschiedenen Mittelwerth, verlangen somit in $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$ einen constanten Antheil und daher in der Lichtwelle ein constantes elektrisches Feld.

Es möge erwähnt werden, dass nach dem Inhalt dieser Formeln ein magnetisch-activer, absorbirender, isotroper Körper bei der Durchstrahlung ein elektrisches Moment annehmen muss, dessen Axe mit der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes zusammenfällt. Der Sinn des Momentes wird durch das Vorzeichen der c_h, d. h. durch den Sinn der magnetischen Drehung der Polarisationsebene in dem Körper bestimmt. Auch diese lichtelektrische Wirkung ist ausserordentlich schwach.

Resultate.

Die Hertz'schen Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie sind im Vorstehenden behufs Darstellung der

1) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 347. 1899.

optischen Wirkungen eines elektrischen Feldes nach folgenden Grundsätzen erweitert: 1. die Wirkung des Feldes wird als von der Anwesenheit ponderabler Theile abhängig betrachtet; 2. die Vorgänge werden als conservativ angenommen; 3. die Superposition verschiedener Schwingungen bleibt erhalten; 4. die Feldcomponenten werden in der niedrigst möglichen Potenz eingeführt. Diese Potenz ist bei den acentrischen Krystallen die *erste*, bei den centrischen Krystallen und den isotropen Körpern die *zweite*.

Die so gewonnenen Formeln liefern die Gesetze der besonders von Hrn. Pockels untersuchten elektro-optischen Phänomene in acentrischen Krystallen, sowie der von Hrn. Kerr entdeckten elektrischen Doppelbrechung in isotropen Körpern.

Auch die Berücksichtigung der bei gewissen acentrischen Krystallen auftretenden natürlichen Activität bietet keine Schwierigkeit.

Für Medien mit scharfen Absorptionslinien ergeben die Formeln als Wirkungen des elektrischen Feldes Zerlegungen oder Verschiebungen dieser Linien, also eine elektrische Analogie zum Zeeman-Effect.

Den elektro-optischen Wirkungen ordnet die Theorie merkwürdige reciproke Vorgänge zu, nämlich die Erregung eines constanten elektrischen Feldes in acentrischen Krystallen, sowie die Veränderung der Elektrisirungszahlen von centrischen Krystallen und von isotropen Körpern durch das Licht.

Die allgemeinen Ansätze der Theorie erleiden eine Specialisirung, wenn man gemäss der Vorstellung von der Einheit der elektrischen Kraft die Annahme einführt, dass das constante elektrische Feld in den Formeln nicht anders auftreten dürfe, als die in der Lichtwelle schwingende elektrische Kraft.

Auch bei dieser Auffassung ordnen sich den elektrooptischen Wirkungen reciproke zu. Dasselbe gilt bei Benutzung der gleichen Vorstellung über die magnetische Kraft nach der früher entwickelten Theorie auch von den magnetooptischen Vorgängen.

Göttingen, Anfang August 1899.

(Eingegangen 15. August 1899.)

17. *Die Ursache der Veränderung des Leitungsvermögens in Bleisuperoxyd;*
von Th. Sundorph.

Einzelne Stoffe, wie PbO_2 und CuS[1]), haben die Eigen-
iaft, ihr Leitungsvermögen zu vermindern, wenn sie von
ktrischen Wellen getroffen werden. Ich habe wiederholt
t Bleisuperoxyd Versuche angestellt, indem ich erst auf fol-
nde Weise untersuchte, welche Wirkung ein gewöhnlicher
rom ausübt. In einen Glascylinder *C*, welcher Bleisuper-
yd enthielt, waren zwei genau gleich grosse Messingstangen *A*
d *B* gesteckt, welche von Korken an den beiden Oeffnungen
s Cylinders gehalten wurden; ihre Entfernung betrug ca.
i cm; das Pulver hatte eine Höhe von ca. 2,5 cm. Ein
i zwei Millimeter von jeder Metallstange und ebenfalls in
r Mitte des Pulvers brachte ich ein Thermometer an. *A* und
verband ich mit zwei Schiebern, welche nach einem Neu-
berdrahte, dessen Enden einen Spannungsunterschied von
0 Volt hatten, bewegt werden konnten. Die Stromstärke
llte ich durch ein eingeschaltetes Gal-
nometer fest. Verschob ich die Schieber,
konnte ich untersuchen, wie sich das
lver verhielt, wenn der Spannungsunter-
iied zwischen *A* und *B*, welcher in jedem
zelnen Versuche constant gehalten wurde,
ischen 5 und 110 Volt variirte. Bei
lem Versuche verwendete ich neues Pulver
d reinigte die Messingstangen sorgfältig.
genügt, das Resultat eines Versuches
zuführen; da sie alle, was Stromstärke und Temperatur an-
langen, einer wie der andere verliefen. In nachfolgendem
iszuge einer Tabelle bedeutet *M* die Zeit in Minuten,
lie Stromstärke in Ampère, t_1 den Stand des Thermometers an
r positiven Elektrode, t_2 den Stand des Thermometers an der

---

1) E. Branly, Lum. électr. **40.** p. 511. 1891; E. Aschkinass,
ied. Ann. **66.** p. 288. 1898.

negativen Elektrode. Der Spannungsunterschied zwischen *A* und *B* beträgt 33 Volt.

M	0	1	2	3	4	5	10	20	45	50	55
s	0,4	0,9	1,1	0,425	0,275	0,225	0,175	0,125	0,125	0,125	0,125
t_1	20	91	170	240	251	245	226	190	160	160	160
t_2	20	70	105	122	105	94	73	60	48	46	46

Das sich in der Mitte des Pulvers befindende Thermometer zeigte eine Temperatur, welche zwischen t_1 und t_2 liegt.

Die Tabelle zerfällt in drei Theile. Im ersten Theile wächst die Stromstärke bedeutend und nähert sich einem Maximum, im zweiten nimmt sie ab und nähert sich einem Minimum, im dritten hält sie sich annähernd constant. Die Ursache dieser Erscheinung ist die von dem Strome hervorgebrachte Wärme, die den Widerstand vermindert und theilweise PbO_2 in das schlecht leitende PbO umbildet. Eine Bestätigung hierfür sind theils die von mir angestellten chemischen Untersuchungen, bei welchen ich feststellte, dass ein beträchtlicher Theil des Pulvers in PbO umgebildet war und zwar, wie zu erwarten, am meisten derjenige, welcher der wärmsten Stange am nächsten war; theils wird es durch folgende Versuche bestätigt. Um den Cylinder *C*, den ich nebst einem Galvanometer in die Leitung einiger Elemente eingeschaltet hatte, leitete ich einen warmen Luftstrom; innerhalb 40 Minuten stieg die Temperatur des Pulvers auf 116° und behielt dieselbe bei. Bei jedesmaligem Ablesen der Stromstärke schloss ich den Strom nur einen Augenblick; in den ersten Minuten wuchs er stark, nahm allmählich ab und blieb dann bei fallender Tendenz ziemlich gleich. Bei den Stromstärken gingen also genau dieselben Veränderungen vor, wie bei den oben angeführten Versuchen. Dasselbe Resultat erzielte ich, wenn ich den Cylinder mit 100° heissem Wasser umgab.

Die angeführte Tabelle zeigt das Verhältniss, wenn der Spannungsunterschied zwischen *A* und *B* gleich 33 Volt ist; die anderen, unter möglichst denselben Verhältnissen angestellten Versuche ergaben folgende Resultate. Ist der Spannungsunterschied zwischen *A* und *B* kleiner als 33 Volt, so hält der Zeitraum, in welchem die Stromstärke wächst, länger

an; höchstens ungefähr eine halbe Stunde; ist der Spannungsunterschied zwischen *A* und *B* grösser als 33 Volt, so wird der Zeitraum kürzer und kürzer und ist zuletzt gleich Null. Der dazu nothwendige Spannungsunterschied hängt in hohem Grade von dem Zusammenpressen des Pulvers ab. Bei den Versuchen, in welchen der Widerstand des Pulvers, bei einem hohen Spannungsunterschiede zwischen *A* und *B*, augenblicklich wächst, war die Veränderung des Pulvers im Verhältniss zur Widerstandsvergrösserung klein, ebenso war die Temperatursteigerung klein. Ich führe hier einen Versuch an, in dem die Stromstärke sofort von 2 Amp. auf 0,1 Amp. sank und diesen Werth während den folgenden 8 Secunden behielt, wonach der Versuch abgebrochen wurde. Das Thermometer der einen Metallstange stieg 1^0, das der anderen 3^0; das Pulver enthielt nach dem Versuche 91,10 Proc. PbO_2, während es vor dem Versuche 95,80 Proc. enthalten hatte.

Eine Erklärung hierfür liegt nach meiner Ansicht in dem Temperaturunterschiede, indem die eine Metallstange (meistens die positive) immer bedeutend wärmer als die andere war (vgl. die Tabelle).

Dieser Temperaturunterschied entsteht sofort, nachdem der Strom geschlossen ist. Die grösste Wärmeentwickelung findet unmittelbar bei der einen Metallstange statt, was daraus hervorgeht, dass die positive Stange sich bei der Berührung sehr warm erwies, wenn ihr Thermometer z. B. 60^0 zeigte; die negative Stange aber fühlte sich nicht warm an, wenn später ihr Thermometer 60^0 zeigte. Hieraus folgt, dass sich, gleich nachdem der Strom geschlossen ist, unmittelbar bei der einen Stange viel PbO bildet, wodurch der Widerstand und ebenfalls die Wärmeentwickelung ausnahmsweise gross wird. Die Bildung von PbO bei der einen Stange mag hauptsächlich bei höherem Spannungsunterschiede zwischen *A* und *B* stattfinden, wodurch die grosse Zunahme des Widerstandes trotz der geringen Umwandelung des Pulvers ihre Erklärung findet.

Da nun ferner die Temperatursteigerung bei den Versuchen, in welchen der Widerstand sofort wächst, sehr klein ist ($^1/_2$—3^0), wenn der Versuch nach einigen Secunden unterbrochen wird, während die Widerstandsvergrösserung gross ist, ist es nicht unwahrscheinlich, dass Funken zwischen

Metall und Pulver die Umbildung erzeugen. Solche Funken konnte man wahrnehmen, wenn man das Pulver schüttelte.

Die Einwirkung elektrischer Wellen auf Bleisuperoxyd untersuchte ich, indem ich den Cylinder *C* zusammen mit einem Galvanometer in die Leitung einiger Elemente einschaltete. Den Strom schloss ich nur bei jedesmaligem Ablesen der Stromstärke; das Pulver war keinen sonderlich starken elektrischen Wellen ausgesetzt. Die Versuche zeigten, was Stromstärke anbetrifft, denselben Verfauf, wie wenn die Metallstangen in den früher erwähnten Versuchen einem so hohen Spannungsunterschiede ausgesetzt wurden, dass der Widerstand sofort vermehrt wurde. Von einem der Versuche führe ich einzelne Daten an. Bevor das Pulver den elektrischen Wellen ausgesetzt war, betrug die Stromstärke 8,5 Milliamp., nach zwei Minuten 6,25 Milliamp., nach zwanzig Minuten 5 Milliamp.; auf dieser Höhe hielt sich die Stromstärke während den folgenden fünfzig Minuten ziemlich gleichmässig; das Pulver enthielt nach dem Versuche 92,23 Proc. PbO_2, vor dem Versuche 93,21 Proc. Da diese Umwandelung nun von den kurzen Stromschlüssen, welche zum Ablesen der Stromstärke stattfanden, herrühren konnten, so unternahm ich einige Versuche, wobei der Cylinder *C* mit den Metallstangen elektrischen Wellen ausgesetzt wurde, ohne dass durch das Pulver ein Strom geleitet wurde; das Pulver zeigte sich andauernd ein wenig verändert. Als Beispiel führe ich einen Versuch an, in welchem das Pulver, ca. 1 m von der Funkenbahn entfernt, während zwei Stunden elektrischen Wellen ausgesetzt war. Ein viertel Theil des Pulvers und zwar derjenige, welcher den Messingstangen am nächsten war, enthielt 87,10 Proc. PbO_2, während der mittlere Theil 94,00 Proc. enthielt. Vor dem Versuche hatte das Pulver 95,80 Proc. PbO_2 enthalten.

Es ist also wie bei den Versuchen mit Strömen von grosser Spannung eine im Verhältniss zur wahrscheinlichen Zunahme des Widerstandes geringe Veränderung vor sich gegangen, und diese Veränderung des Pulvers findet hauptsächlich bei den Metallstangen statt. Wie vorher bemerkt, ist es wahrscheinlich, dass die Umwandelung von Funken herrührt, welche am kräftigsten bei den Metallstangen auftreten und dort eine schlecht leitende Schicht bilden. Bei diesen Ver-

suchen fand keine oder nur eine äusserst geringe Temperatursteigerung statt.

Die Ursache, warum bei gewöhnlichen Strömen die eine Stange wärmer als die andere ist, geht aus meinen Versuchen nicht hervor. Chemische Processe (PbO_2 enthielt etwas Feuchtigkeit) können nicht die Ursache sein, da sonst immer dieselbe Stange am wärmsten sein musste, ebenso wenig konnte sie in den Metallstangen zu suchen sein, da diese regelmässig gereinigt und umgetauscht wurden. Der Grund liegt auch nicht in der verschiedentlichen Zusammenpressung des Pulvers bei den Metallstangen, noch in der verschiedentlichen Stromdichte bei diesen; man könnte annehmen, dass die positive und negative Stange sich gleichmässig erhitzen würden, wenn die Spannung bei *A* und *B* numerisch dieselbe wäre; dieses findet aber nicht statt. Wahrscheinlich wird eine schlecht leitende Schicht mit verschiedenem Widerstand bei beiden Stangen gebildet.

Kopenhagen, Seeofficierschule, Juni 1899.

(Eingegangen 3. August 1899.)

---

18. *Erwiderung; von W. Voigt.*

In einer „Zur kinetischen Theorie der Flüssigkeiten" überschriebenen Notiz kommt Hr. G. Jäger[1]) nochmals auf seine gegen drei Arbeiten von mir erhobenen Einwände zurück; aber ich muss das jetzt von ihm Beigebrachte nicht minder nachdrücklich zurückweisen, als das Frühere.

1. Hr. Jäger behauptete anfangs, dass meine kinetischen Betrachtungen für die Flüssigkeiten überhaupt nur das Mariotte-Gay Lussac'sche Gesetz lieferten. Jetzt beschränkt er die gleiche Behauptung auf die ersten beiden Arbeiten, in denen allerdings die Grösse der Molecüle nicht in Rechnung gezogen ist. Da aber die Wechselwirkuug zwischen den Molecülen berücksichtigt ist, so ergiebt sich dort das van der Waals'sche Gesetz zwar mit verschwindendem b, keineswegs aber das Mariotte-Gay Lussac'sche.

In Abschnitt II meiner zweiten Arbeit ist hierüber ausführlich gesprochen. Das dort Gesagte ergiebt zugleich, dass der Weg, auf welchem Hr. Jäger in seiner letzten Notiz den Wanddruck der Flüssigkeit berechnen und hierdurch seine Behauptung beweisen will, unrichtig ist.

2. Hr. Jäger nimmt ferner an dem Resultat Anstoss, dass die Anwendung der Reibungsformeln der kinetischen Theorie auf Flüssigkeiten für dieselbe Substanz im gasförmigen und im flüssigen Zustand sehr verschiedene „Moleculargrössen" liefert, und behauptet, dass dies Resultat meine Entwickelungen, welche *die Molecüle als starre Kugeln behandelten,* in directen Widerspruch mit den Anschauungen der kinetischen Theorie setze.

Demgegenüber begnüge ich mich mit der Wiederholung einiger Sätze aus dem III. Abschnitt meiner zweiten (allein auf die Frage der inneren Reibung eingehenden) Arbeit, aus denen hervorgeht, dass die Annahme starrer Kugeln eine

1) G. Jäger, Wied. Ann. 68. p. 615. 1899.

Hypothese ist, die zwar Hr. Jäger heranzieht, die ich aber gerade mit Nachdruck *abweise.*

Meine Definition der „Stosskugel", die ich mit gutem Bedacht an Stelle des „Volumens" des Molecüles gesetzt habe, beschreibt diese im engen Anschluss an von Clausius vertretene Anschauungen [1]) als „eine um ein Molecül construirte Kugel, in welche bei der Bewegung der Schwerpunkt eines anderen Molecüles nicht zu dringen vermag, ohne eine merkliche Ablenkung zu erfahren" — was schon deutlich genug die Annahme starrer Kugeln ablehnt.

Aber ganz unmissverständlich lautet der Satz, den ich dort an die Constatirung des mit dem Aggregatzustande wechselnden „Stossradius" anschliesse.

„Dies Resultat würde gegen unsere gesammte Auffassung sprechen, wenn wir die Molecüle als elastische Kugeln aufzufassen gezwungen wären. Hält man dagegen die viel plausiblere Vorstellung fest, dass die Molecüle für die Zwecke der kinetischen Theorie als blosse Kraftcentra betrachtet werden dürfen, so lässt sich das Ergebniss wohl begreiflich machen;..."

Im IV. Abschnitt derselben Arbeit beschäftige ich mich dann mit der Veränderung der inneren Energie eines mehratomigen Molecüles beim Passiren der Grenze Dampf—Flüssigkeit, was auch mit der mir von Hrn. Jäger beigelegten Auffassung des Wesens der Molecüle in hinreichend deutlichem Widerspruche steht.

Dass ich in der *dritten* Abhandlung an einer Stelle, wo die Verschiedenheit der Auffassungen keine Rolle spielt, (wie dort ausdrücklich hervorgehoben), *bloss im Interesse der Einfachheit* die Molecüle wie starre Kugeln behandelt habe, steht hiermit nicht im Widerspruche; die dort gewonnenen Resultate lassen sich auch, wenngleich weniger einfach, mit Hülfe von Kraftcentren und Stosskugeln ableiten.

3. Noch muss ich Einspruch dagegen erheben, dass Hr. Jäger meine, gegen seine Entwickelungen gerichteten Einwände mit der Bemerkung abthut, „es seien sämmtliche

---

1) Wie Hr. Jäger demgegenüber unter Nr. 4 seiner letzten Notiz behaupten kann, dass die Auffassung der Molecüle als Kraftcentren im Widerspruch mit der Festsetzung eines „Stossradius" stände, ist mir nicht verständlich.

bisher gelieferte Arbeiten über die kinetische Theorie der Flüssigkeiten nicht völlig einwurfsfrei." Bei meinen Einwänden handelt es sich nicht etwa um zur Vereinfachung gemachte Hypothesen oder um angenäherte Rechnungen, sondern um schwerwiegende *principielle Fehler.*

Um dies darzuthun, genügt es, die betreffende Stelle aus meiner ersten Abhandlung[1]) zu wiederholen.

„Wenn in der ersten Arbeit[2]) (des Hrn. Jäger) die Dampfspannung bei verschiedener Temperatur einfach der Anzahl der während der Zeiteinheit aus der Flüssigkeit in den Dampfraum austretenden Molecüle proportional gesetzt wird, so kann ich dem nicht beistimmen und halte, abgesehen von anderen Einwänden, schon deshalb die so gewonnene, der Beobachtung merkwürdig entsprechende Gleichung nicht für kinetisch begründet. Nicht minder anfechtbar scheint mir in der zweiten Arbeit[3]) das Verfahren, die aus der Flüssigkeit in den Dampfraum austretende Masse gleich $\varrho u'$ zu setzen, wobei ϱ die Dichte der zum Austreten fähigen Theile in der *Flüssigkeit*, u' ihre zur Grenze normale Geschwindigkeit im *Dampfraum* bezeichnet.

Mit diesen Grundlagen dürften aber alle Resultate der beiden Arbeiten hinfällig werden."

Göttingen, Juli 1899.

---

1) W. Voigt, Nachr. v. d. Gött. Gesellsch. d. Wissensch. von 1896, p. 342.

2) G. Jäger, Sitzungsber. der k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Wien **99**. p. 679. 1890.

3) G. Jäger, l. c. p. 860.

(Eingegangen 24. Juli 1898.)

19. *Ueber die Deutung der Beugungserscheinungen bei Röntgenstrahlen; von C. H. Wind.*

Berichtigung

zu dem Aufsatze in diesen Annalen **68.** p. 896 ff. 1899.

Man lese:

p. 898, Z. 5 v. u.
p. 899, Z. 1, 9, 10, 11, 14
p. 900, Z. 8, 10, 16 v. u.
} überall $\sqrt{\lambda}$ statt λ^2,

und statt der Gleichungen auf p. 899 die folgenden:

$$J\,d\,n = -\,i\,d\sqrt{\lambda},$$

$$i = \frac{2\,v}{\lambda^{3/2}}\,J,$$

$$\frac{d\,i}{d\sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{\lambda}\left(-\,\frac{3\,v}{\lambda^{5/2}}\,J - \frac{2\,v\,n}{\lambda^{5/2}}\,\frac{d\,J}{d\,n}\right),$$

$$\frac{d\,J}{d\,n} = -\,\frac{3}{2}\,\frac{J}{n}.$$

Die punktirten Linien der Figur müssten ein wenig geändert werden, entsprechend der neuen Form der letzten Gleichung.

Das hiermit berichtigte Versehen ist auf die Richtigkeit der Schlussfolge ohne Einfluss gewesen.

(Eingegangen 14. August 1899.)

Erklärung der Tafel III

zur Abhandlung Robert Emden, p. 264.

Fig. 1. Luftstrahl. Durchmesser d der conischen Düse $B = 2{,}65$ mm. Ausflussdruck $p = 2{,}3$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 1{,}75$ mm.

Fig. 2. Luftstrahl. Durchmesser d der conischen Düse $B = 2{,}65$ mm. Ausflussdruck $p = 2{,}9$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 2{,}65$ mm.

Fig. 3. Luftstrahl. Durchmesser d der conischen Düse $B = 2{,}65$ mm. Ausflussdruck $p = 3{,}85$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 3{,}65$ mm.

Fig. 4. Luftstrahl. Durchmesser d der conischen Düse $B = 2{,}65$ mm. Ausflussdruck $p = 5$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 4{,}4$ mm.

Fig. 5. Luftstrahl. Durchmesser d der conischen Düse $A = 3{,}63$ mm. Ausflussdruck $p = 2{,}6$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 1{,}9$ mm.

Fig. 6. Luftstrahl. Durchmesser d der conischen Düse $A = 3{,}63$ mm. Ausflussdruck $p = 3{,}3$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 3{,}28$ mm.

Fig. 7. Luftstrahl. Durchmesser d der conischen Düse $A = 3{,}63$ mm. Ausflussdruck $p = 5$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 5{,}67$ mm.

Fig. 8. Luftstrahl. Durchmesser d der conischen Düse $A = 3{,}63$ mm. Ausflussdruck $p = 6$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 6{,}32$ mm.

Fig. 9. Kohlensäurestrahl. Durchm. d der conischen Düse $A = 3{,}63$ mm. Ausflussdruck $p = 5$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 5{,}5$ mm.

Fig. 10. Luftstrahl. Durchmesser d der Flachdüse $F = 2{,}72$ mm. Ausflussdruck $p = 4{,}1$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 4{,}0$ mm.

Fig. 11. Luftstrahl. Durchmesser d der conischen Düse $D = 0{,}3$ mm. Ausflussdruck $p = 7$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 0{,}55$ mm.

Figg. 12—15. Vacuumstrahlen.

Fig. 12. Düsendurchmesser = 2,9 mm. Ausflussdruck $p_1 = 3$ Atm. Aussendruck $p_0 = 57{,}2$ cm. $p_1/p_0 = 3{,}6$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 3{,}3$ mm.

Fig. 13. Düsendurchmesser = 2,9 mm. Ausflussdruck $p_1 = 4$ Atm. Aussendruck $p_0 = 50{,}3$ cm. $p_1/p_0 = 4{,}7$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 4{,}7$ mm.

Fig. 14. Düsendurchmesser = 2,9 mm. Ausflussdruck $p_1 = 6$ Atm. Aussendruck $p_0 = 39{,}8$ cm. $p_1/p_0 = 10{,}8$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 6{,}8$ mm.

Fig. 15. Düsendurchmesser = 3,5 mm. Ausflussdruck $p_1 = 6{,}6$ Atm. Aussendruck $p_0 = 30{,}8$ cm. $p_1/p_0 = 15{,}3$ Atm. Wellenlänge $\lambda = 10{,}1$ mm.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1899. ANNALEN № 10.
DER
PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND 69.

1. *Ueber die bei Explosionen in der Luft eingeleiteten Vorgänge; von W. Wolff.*

(Hierzu Taf. V, Figg. 1—6, und Taf. VI, Figg. 1—4.)

I.

Die bei der Explosion eines Sprengstoffs frei werdende Energie E ist durch das Gewicht ω des explodirenden Stoffs und durch seine Explosionswärme Q gegeben. Sie beträgt in Arbeitsmaass ausgedrückt

$$E = \omega Q A ,$$

wo A das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Explosionswärme heisst die bei der explosiven Umsetzung der Gewichtseinheit des betreffenden Stoffs frei werdende Wärmemenge.

Die verfügbare Energie kommt zum Ausdruck in der Zerstörungsarbeit im Explosionsherde, als fortschreitende Erderschütterung, in der Bewegung von Sprengstücken etc. und in der Bewegung von Luft. Trifft die bewegte Luft einen Körper, so hängt es von der Beschaffenheit dieses Körpers ab, wieviel Energie er aufnimmt. Ist der Körper absolut fest und starr, so nimmt er gar keine Energie auf, sondern reflectirt die gesammte, ihn treffende Luftmenge, ist er sehr träge, so nimmt er nur wenig Energie auf, und zwar um so mehr, je mehr sich seine Trägheit derjenigen der ihn treffenden Luft nähert, und die umgebende Luft übernimmt die gesammte auf sie übertragene Energie von Schicht zu Schicht, ohne dass diese dadurch wesentlich abgeschwächt würde; die einzige dämpfende Kraft ist die Reibung der Luft, die hier vollkommen zu vernachlässigen ist.

Messungen über die Grösse der Wirkung der bei der Explosion grösserer Sprengstoffmengen frei werdenden Energie auf bestimmte in der Umgebung befindliche Körper, konnten in der Literatur nicht gefunden werden und sind wohl bisher

auch nicht angestellt worden. Die zahlreichen Beobachtungen, die an den Wirkungen zufälliger Explosionen gemacht worden sind, bedürfen in mancher Beziehung der Aufklärung, zumal über die relative Abnahme der Wirkung mit der Entfernung und über den zeitlichen Verlauf der auftretenden Kräfte thatsächliche Angaben fehlen.

Auf Veranlassung des kgl. preussischen Kriegsministeriums seitens der Artillericprüfungscommission auf dem Schiessplatze Cummersdorf in der Zeit vom October 1896 bis Mai 1897 vorgenommene Sprengungen boten Gelegenheit, Versuche in dieser Richtung anzustellen.

Bei den gewaltigen Energiemengen, welche hier frei wurden, und in Berücksichtigung der Unklarheit, welche noch hinsichtlich des Verhältnisses bestand, in welchem die von einem Körper aufgenommene zu der bei einer Explosion erzeugten Energie steht, lag eine Schwierigkeit in der Wahl geeigneter Beobachtungsverfahren, sodass man auf zum Theil unerprobte Methoden angewiesen war.

Die Versuche erstreckten sich im wesentlichen auf Messungen:

1. der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Explosionswirkung fortpflanzt;

2.[1]) der Energie, welche von bestimmten Körpern in verschiedenen Entfernungen aufgenommen wird;

3. des zeitlichen Verlaufes des Explosionsstosses in verschiedenen Entfernungen vom Explosionsherde.

Da keine Versuchsbedingungen geschaffen werden konnten, welche den späteren Verhältnissen auch nur annähernd entsprachen, so wurden Vorversuche nur in geringem Umfange angestellt. Falls daher die beabsichtigten Messmethoden versagten, sollte aus dem Grade der Zerstörung von — 9 qm grossen — Bretterwänden und der Zersplitterung von Fensterscheiben, die um den Explosionsherd herum gruppirt waren, eine ungefähre Anschauung über den relativen Verlauf der Kraftabgabe mit der Entfernung gewonnen werden.

Die Messgegenstände wurden an starken, in die Erde gegrabenen Pfählen oder Bohlen befestigt. Diese waren strahlenförmig um den Explosionsherd gruppirt. In den einzelnen

1) Von diesen werden am Schlusse nur kurz die Resultate mitgetheilt werden.

Strahlen waren sie 25, 50, 75 und so fort bis zu 250 m vom Explosionscentrum entfernt aufgestellt. Die Zahl der Strahlen war von Versuch zu Versuch verschieden und richtete sich nach der Beschaffenheit des Geländes und nach der Grösse des Kreissectors, über welchen sich die Messungen erstreckten. Die Vertheilung der Messstationen bei den verschiedenen Sprengungen zeigt Taf. V, Fig. 1. Die aus leichten Baustoffen (Hartgypsdielen oder Monierconstruction) errichteten Sprengstoffmagazine 1—4 waren auf zwei aneinander stossenden Seiten mit einem Wall umgeben, dessen Lage aus den Zeichnungen hervorgeht. Das Magazin 5, welches zuletzt gesprengt wurde, war aus sehr festem Material (Kiesbeton) gebaut und nur mit einem kurzen Wall versehen, der den Zweck hatte, eine schwere eiserne Doppelthür aufzufangen.

Bei den beiden ersten Versuchen waren die Apparate hauptsächlich auf einem relativ *kleinen* Sector der wall*freien* Seiten aufgestellt. Dies geschah deswegen, weil die zu den Vorbereitungen und zu den nachherigen Aufnahmen nothwendige Arbeit wuchs mit der Grösse des mit Messinstrumenten zu versehenden Feldes, und daher zunächst Erfahrungen über die zweckmässigste Arbeitsvertheilung hierbei gesammelt werden mussten, und weil angenommen wurde, dass die Tauglichkeit der gewählten Beobachtungsverfahren auf den wallfreien Seiten am sichersten erprobt werden könnte. Erst nachdem über diese Dinge Klarheit geschaffen war, wurden die Versuchsobjecte, welche direct zur Kraftmessung dienten, im ganzen Umkreise gleichmässig vertheilt. Bei der 5. Sprengung war dies wegen der geringen Ausdehnung des Walles nicht erforderlich.

Für die Vorbereitungen standen immer zwei Tage zur Verfügung. Am ersten Tage wurden die Plätze für die Instrumente ausgewählt, die Entfernungen mit Hülfe der Messkette abgesteckt, die die Apparate tragenden Pfähle und Stative eingegraben und die nothwendigen Schutzhütten errichtet. Am zweiten Vorbereitungstage, der stets dem Versuchstage unmittelbar voranging, wurden die erforderlichen elektrischen Leitungen ausgelegt, die Apparate, welche Nachts im Freien bleiben konnten, aufgestellt und eingerichtet, während die Vorrichtungen, welche Registrirungen aufzunehmen bestimmt waren, und die feineren Instrumente erst am Morgen des Versuchs-

tages angebracht wurden. Die Sprengungen fanden, je nachdem die Vorbereitungen fertig gestellt werden konnten, zwischen 10 und 12 Uhr Vormittags statt, worauf die an Ort und Stelle auszuführenden Aufnahmen und Messungen erledigt, die die Registrirungen enthaltenden Gegenstände verwahrt und der gesammte Versuchsapparat gesammelt und in Sicherheit gegen die Witterung gebracht wurden.

In der Zwischenzeit von einer zur anderen Sprengung wurden die Beobachtungen einer überschläglichen Berechnung unterworfen, um etwaige Hinweise für die späteren Versuche zu gewinnen, die Apparate wieder in Stand gesetzt, ergänzt und nöthigenfalls abgeändert.

2.

Für die Beurtheilung der Natur der in der Umgebung eines Explosionsherdes hervorgerufenen Erscheinungen von hervorragender Wichtigkeit ist die Kenntniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosionswirkung.

Ueber den Gegenstand liegen bereits eine Reihe von Untersuchungen [1]), die E. Mach mit seinen Schülern ausführte, vor. Für den vorliegenden Fall von Interesse sind besonders die von ihm ausgeführten Messungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der von explodirenden Zündhütchen und von elektrischen Funken hervorgerufenen Schallwellen. Es wurde nur mit ganz geringen Explosivstoffmengen gearbeitet, sodass sich grosse Schwierigkeiten boten, die Erscheinungen in klarer messbarer Form herzustellen. Alle Wirkungen der Explosionswellen, die zur Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit verwendet werden können, äusserten sich bei den Mach'schen Versuchen nur auf geringe Entfernungen (einige Centimeter) von der Wellenquelle, und die Eigenthümlichkeiten der Explosionswellen, welche dieselben von gewöhnlichen Schallwellen unterscheiden, verschwanden schon nach einer kurzen Wegstrecke. Die Einzelheiten der höchst interessanten Arbeiten müssen in den Originalen eingesehen werden. Die hierher gehörigen

1) E. Mach u. J. Wosyka, Sitzungsber. der k. Gesellsch. der Wissensch. zu Wien. 72. 1875; W. Rosicky, l. c. 73. 1876; E. Mach u. J. Sommer, l. c. 75. 1877; E. Mach, O. Tumlirz u. C. Kögler, l. c. 77. 1878.

Resultate sind bereits in der Arbeit von Mach und Sommer zusammengefasst und haben sich auch bei den späteren Versuchen bestätigt. Sie gipfeln in Folgendem: [1])

1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der von Explosionswellen ausgehenden Bewegung, mag man sie als Schallbewegung auffassen oder nicht, ist jedenfalls von derselben Ordnung wie die Schallgeschwindigkeit.

2. Diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt von der Art und Intensität der Explosion ab und nimmt mit der Heftigkeit der letzteren zu. Sie beträgt bei stärkeren Zündhütchen bis 700 m und übersteigt bei elektrischen Entladungen noch 400 m.

3. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nimmt mit der Entfernung von der Explosionsstelle ab.

Ferner hat sich de Waha [2]) experimentell mit Funkenwellen beschäftigt; indessen liefern seine Untersuchungen gegenüber den Mach'schen Arbeiten nichts Neues.

Als diese Arbeit bereits druckfertig vorlag, erschien eine Mittheilung von Vieille [3]), welche sich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosionswellen in einem abgegrenzten Raume befasst. (In einer 4 m langen Stahlröhre von 22 mm Weite wurde Jagdpulver und Knallquecksilber zur Explosion gebracht.) Da sich die Drucklegung verzögerte, kann auf diese Arbeit sowie eine „die Explosion unter Wasser“ betitelte Abhandlung von R. Blochmann [4]) noch hingewiesen werden.

Auf die Vorgänge in der Umgebung eines Explosionsherdes treffen theilweise die Voraussetzungen zu, welche Riemann [5]) seiner Theorie über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite im Jahre 1860 zu Grunde gelegt hat. Mach [6]) spricht schon in der Arbeit, welche er mit Sommer zusammen veröffentlichte, die Vermuthung aus, dass er es wahrscheinlich mit einer Art Rie-

1) E. Mach u. J. Sommer, l. c. **75.** p. 127. 1877.

2) M. de Waha, Publ. de l'Inst. de Luxembourg. 1877.

3) P. Vieille, Compt. rend. **126.** p. 31. 1898.

4) R. Blochmann, Marinerundschau. Heft 2. p. 197—227. 1898.

5) B. Riemann, Abh. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. 1860; Riemann's gesammelte mathematische Werke p. 145 ff. Leipzig 1876.

6) E. Mach u. J. Sommer, l. c. p. 128. 1877.

mann'scher Wellen zu thun hatte. Eine spätere Abhandlung [1]) lässt darüber keinen Zweifel, dass der Verfasser der Ansicht ist, dass Funkenwellen und Explosionswellen akustische Erscheinungen im Sinne der Riemann'schen Theorie sind.

Die nachfolgend zu besprechenden Versuche werden zeigen, dass die oben angeführten, von Mach für ganz minimale Sprengstoffmengen erhaltenen Resultate auch auf grosse Sprengstoffmassen auszudehnen sind. Natürlich ist das Wirkungsbereich hier ein weit grösseres.

Es soll versucht werden, zu zeigen, dass auch die Mach'sche Anschauung, dass man es bei Explosionen mit Riemann'schen Wellen zu thun hat, zutreffend ist, und dass die Folgerungen aus der Riemann'schen Theorie den Thatsachen entsprechen und die Beobachtungen zu erklären im Stande sind.

3.

Um die Zeit zu messen, in welcher die durch die Explosion in dem Gleichgewicht der Luft hervorgerufene Störung um eine bestimmte Strecke vorwärts gerückt ist, wurden mit dem Namen Luftstossanzeiger bezeichnete Apparate verwendet,

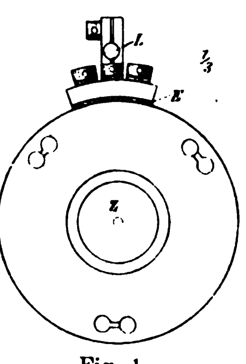


Fig. 1.

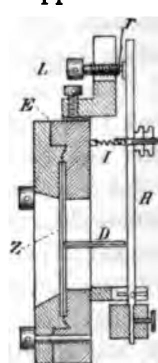


Fig. 2.

die ursprünglich für die Messung von Geschossgeschwindigkeiten construirt waren. Als Chronographen dienten le Boulengé-Apparate und später eine Registrirtrommel.

Die Luftstossanzeiger (Figg. 1 u. 2) bestehen aus elektrischen Contacten, welche durch den Ausschlag einer Metall-

1) E. Mach, l. c. 77. 1878.

membran geöffnet oder geschlossen werden, sobald diese ein Luftstoss, z. B. die Stirnwelle eines Geschosses trifft.[1])

Der Contact wurde bei den verwendeten Apparaten gebildet durch eine mit Platinspitze *r* versehene, verstellbare Schraube *L*, gegen die ein um eine Axe drehbarer Hebel *H* mit Hülfe einer Spannfeder *J* angedrückt wird, welcher der Platinspitze gegenüber ein Stück Platinblech aufgelöthet enthält. Die Contactschraube ist von dem Hebel und den übrigen Metalltheilen des Apparates durch Ebonit *E* isolirt, sodass der Contact ausschliesslich durch die beiden Platintheile hergestellt wird. Gegen den Contacthebel drückt ein mit der Stahlmembran *Z* verbundener Stift *D*, der den Hebel von der Platinspitze abdrückt, sobald auf die Membran ein Druck ausgeübt wird. Die Empfindlichkeit des Apparates kann mit Hülfe der Spannfeder *J* variirt werden und ist durch ein besonderes Verfahren justirbar. Bei diesen Apparaten verursacht ein Luftstoss eine kurz andauernde Stromöffnung, worauf der Contact automatisch wieder hergestellt wird. Durch geringe Abänderungen kann sowohl der automatische Stromschluss verhindert, als auch das Instrument in ein solches verwandelt werden, bei welchem der Ausschlag der Lamelle einen Stromschluss herbeiführt. Alle drei dieser Modificationen kamen bei den Versuchen zur Verwendung.

Da die Apparate auch auf starke Erderschütterungen reagiren können, mussten namentlich die in der Nähe des Explosionsherdes aufgestellten Luftstossanzeiger vor solchen besonders geschützt werden. Zu diesem Zwecke wurden als Stative eiserne Füsse von Strassenlaternen (Fig. 3) benutzt, an deren oberem ringförmigen Rande drei Strähnen von Heftgarn befestigt wurden, welche eine etwa 40 kg schwere Bleiplatte als Aufstellungstisch für die Luftstossanzeiger in der Schwebe hielten.

Die Chronographen standen 300 bis 700 m bei den einzelnen Sprengungen von der Sprengstelle entfernt und waren

1) Es ist vielleicht nicht uninteressant, daran zu erinnern, dass die so berühmt gewordenen Versuche Mach's, Projectile im Fluge zu photographiren, welche ihn zu der militärtechnisch nicht unwichtigen Entdeckung der Stirnwelle der Geschosse führten, ihren Ausgangspunkt in den oben citirten Untersuchungen über Explosionswellen hatten.

entweder durch besondere Schwebegerüste oder — wenn die Grösse der Entfernung dies überflüssig erscheinen liess — durch untergelegte Kautschukscheiben gegen Erderschütterungen geschützt.

Die Flugzeitenmesser le Boulengé bestehen bekanntlich aus zwei durch getrennte elektrische Ströme gespeisten Elektromagneten, an denen je ein stabförmiger Anker hängt. Der eine, der „Zeitmesser", wird mit einer Zinkhülse versehen und fällt, nachdem sein magnetisirender Strom geöffnet ist, frei herab. Während seines Falles empfängt er durch ein von dem nach Unterbrechung des zweiten Stromes herabfallenden zweiten Anker, dem „Gewichte", ausgelöstes Messer eine scharfe Marke. Die Entfernung derselben von einer Marke, die erzeugt wird, wenn beide Ströme gleichzeitig geöffnet werden, ist das Maass für die gesuchte Zeitdifferenz.

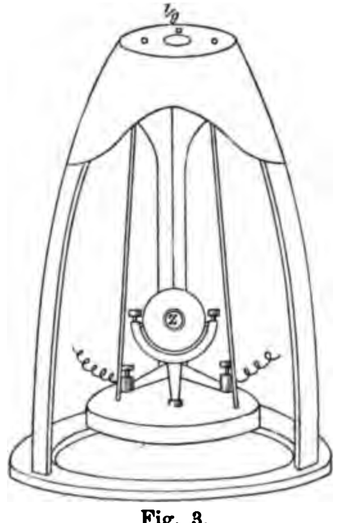


Fig. 3.

Die Apparate sind also nur für die Bestimmung einer einzigen Zeitdifferenz eingerichtet, die bei den üblichen Dimensionen dieser Apparate kleiner sein muss als 0,3 Secunden. Sie bedürfen zur Messung derselben je zweier vollständig getrennter Stromkreise, in welchen sich je eine die Stromöffnung herbeiführende Vorrichtung befindet.

Ferner verbietet es die Einrichtung der Apparate, die Vorrichtung, welche das Schlusssignal einer Strecke bei einem Flugzeitenmesser giebt, gleichzeitig für die Abgabe des Anfangssignals der nächsten Strecke bei einem anderen Chronographen zu verwenden, weil die Ströme für das erste Signal etwa 6 mal so stark sein müssen, wie die für das zweite — im vorliegenden Falle etwa 1 bez. 0,15 Amp. Es konnten daher mit den verfügbaren 10 Luftstossanzeigern nur fünf Zeitdifferenzen gemessen werden, für welche verhältnissmässig viel Leitungs- und Batteriematerial erforderlich war.

Die Flugzeitenmesser geben bei einigermaassen guter Justirung Zeitdifferenzen bei wiederholter Messung bis auf 0,0001 Secunden gleichmässig an, wie vor einigen Jahren gezeigt wurde.[1]) Diese Zeitdifferenzen sind aber mit — ihrer absoluten Grösse nach — schwer bestimmbaren constanten Fehlern behaftet, die bei verschiedenen Apparaten verschiedene Werthe haben und auch je nach der Einstellung der Apparate verschieden sind, sodass den Messungen bei möglichst gut eingestellten Apparten nur eine absolute Richtigkeit von der Grössenordnung 0,001 Secunde zugeschrieben werden kann.

Bedingung für diesen Genauigkeitsgrad ist eine sehr feine Abstimmung der wirksamen Elektromagnetismen, welche die zur Messung dienenden Ströme erzeugen; und ausserdem dürfen diese Ströme erst unmittelbar vor jeder Messung geschlossen werden, um eine Erwärmung der Elektromagnetrollen möglichst einzuschränken.

Beide Bedingungen konnten bei den Versuchen nicht erfüllt werden, sodass die oben bezeichnete Genauigkeit mit den le Boulengé-Chronographen wahrscheinlich nicht erreicht wurde.

Der Aufstellungsort derselben lag verschieden weit — bis zu etwa 400 m — entfernt von dem Sicherheitsstande, welcher zur Unterkunft des Versuchspersonals während der Explosion diente, sodass die Apparate lange vor der Zeitmessung schon Strom erhielten, der erheblich stärker gewählt werden musste, als für ein tadelloses Messen der Chronographen statthaft ist.

Als Ausgangszeitsignal wurde der Moment der Sprengung selbst registrirt, was dadurch geschah, dass ein isolirter Kupferdraht, der einen Theil des das erste Signal gebenden Stromkreises bildete, durch die Mitte der Sprengstoffmasse geführt, bei der Explosion also zerstört wurde. Das zweite Signal gab ein 25 m (bei dem ersten Versuche 27 m) vom Explosionsmittelpunkt entfernt aufgestellter Luftstossanzeiger. Während des Gebrauches der le Boulengé-Chronographen befanden sich an jeder Stelle zwei Luftstossanzeiger, von denen der eine das Schlusssignal der vorderen, der andere das Anfangssignal der folgenden Strecke gab. Die Länge der Strecken betrug,

1) W. Wolff, Mitth. über Gegenst. d. Artill.- u. Geniewes. 1895

mit Ausnahme der ersten, 25 m (bez. 27 m) langen Strecke, 50 m.

Um eine grössere Anzahl von Messungen zu erhalten, wurden von der dritten Sprengung an die le Boulengé-Chronographen bis auf einen, der als Normale diente, durch eine von einem Elektromotor getriebene Registrirtrommel ersetzt, die ihre Aufstellung in unmittelbarer Nachbarschaft des zur Zündung benutzten Sicherheitsstandes fand. Die Registrirungen wurden durch einen kleinen Elektromagneten, welcher eine Schreibfeder in Thätigkeit setzte, vorgenommen. Der Kern des hufeisenförmigen Elektromagneten war bei einer Dicke von 1 mm nur etwa 8 mm lang und enthielt eine nur sehr geringe Anzahl Windungen aus 0,5 mm starkem Kupferdraht. Dieser Elektromagnet, der durch den Sprengstoff führende Draht und fünf Luftstossanzeiger, bei denen der automatische Stromschluss verhindert war, bildeten mit einer Batterie einen einfachen Stromkreis (Fig. 4). In der Mitte zwischen je zwei solchen Strom*unterbrechungsstellen* war als Brücke über die beiden Hauptleitungsdrähte je ein Luftstossanzeiger eingeschaltet, der bei dem Ausschlag der Lamelle Strom*schluss* herstellte. Die Apparate standen je 25 m voneinander entfernt. Der erst unmittelbar vor der Sprengung geschlossene Strom wurde durch die Sprengung geöffnet, worauf dann abwechselnd Stromschluss und Stromöffnung durch die fortschreitende Explosionswirkung herbeigeführt werden sollte.

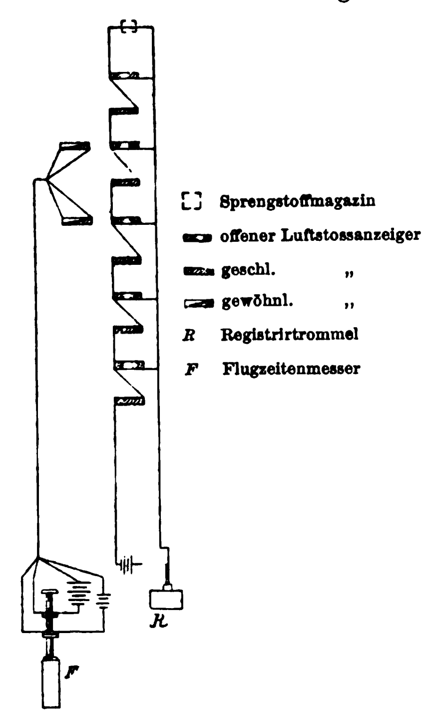


Fig. 4.

Da die Registrirtrommel mit einer Zeitmessvorrichtung nicht versehen war, wurde mit einem le Boulengé-Chrono-

graphen die Zeitdifferenz für die Wegestrecke 75—125 m gemessen. Der Abstand der für die gleiche Wegestrecke auf der Registrirtrommel verzeichneten Marken gab, in Verbindung mit der durch den le Boulengé-Chronographen gemessenen Zeitdifferenz, dann das Maass für die Rotationsgeschwindigkeit der Trommel. Da diese sich bei zahlreichen früheren Versuchen als gut ausbalancirt erwiesen hatte, wurde angenommen, dass die Rotationsdauer sich während der kurzen Zeit der Messungen nicht wesentlich ändere. Durch diese Art der Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit mussten sich natürlich die Fehler des Flugzeitenmessers systematisch auf alle Messungen übertragen, indessen war eine erheblich bessere Uebereinstimmung der Messungen untereinander zu erwarten, als sie bei der Benutzung von fünf verschiedenen le Boulengé-Chronographen erreichbar ist.

4.

In den nachfolgenden Tabellen 1 bis 4 sind die erhaltenen Messungen unter t eingetragen. Die mit den le Boulengé-Chronographen gemessenen Zeitdifferenzen sind hierbei aneinander gereiht. Unter r sind diejenigen Entfernungen vom Explosionscentrum in Metern angegeben, für welche die übrigen Werthe gelten.

Berechnet man die mittleren Geschwindigkeiten für die einzelnen Messstrecken $(r_{n+1} - r_n)/(t_{n+1} - t^n)$, so erhält man Werthe, die in der Nähe des Explosionsherdes bis zu 800 m betragen, sich aber mit zunehmender Entfernung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des normalen Schalles nähern. Zahlen sind dafür in den Tabellen nicht angegeben, weil, wie sich gleich zeigen wird, an ihrer Stelle die Werthe dr/dt, d. h. die Geschwindigkeit an jeder Stelle berechnet werden konnten.

Um eine analytische Beziehung zwischen r und t zu finden, wurden die zusammengehörigen Werthe für diese Grössen in ein Coordinatensystem eingetragen. Die erhaltene Curve zeigte die Form einer Hyperbel, deren Axe in der Coordinate der t liegt.

Aus der Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel

$$\mathfrak{a}^2 y^2 - \mathfrak{b}^2 x^2 = -\mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2$$

erhält man die gesuchte Beziehung, wenn man $y = r$ und $x = t - \mathfrak{a}$ setzt, nämlich

(1) $$r^2 = \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2} t^2 + 2 \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}} t,$$

für $t = 0$ wird $r = 0$.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

(2) $$t = \mathfrak{a} \left(\sqrt{1 + \frac{r^2}{\mathfrak{b}^2}} - 1 \right)$$

und durch Differentiation

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{b}^2}{r^2}}.$$

Je grösser r wird, desto mehr nähert sich der Werth von dr/dt der Grenze $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$. Es ist schon erwähnt worden, dass sich die mittleren Geschwindigkeiten dem Werthe der Schallgeschwindigkeit nähern. Der Quotient $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ soll daher mit $\mathfrak{u}$ bezeichnet werden, sodass die Gleichung lautet:

(3) $$\frac{dr}{dt} = \mathfrak{u} \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{b}^2}{r^2}}.$$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate können $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ leicht berechnet werden. Ihre Werthe finden sich am Kopf der Tabellen[1]) verzeichnet. Der Quotient $(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) = \mathfrak{u}$ hat die Grösse der den meteorologischen Verhältnissen entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit u des normalen Schalles, wie ebenfalls aus dem Kopf der Tabellen hervorgeht. Die Abweichung liegt durchweg nach derselben Seite hin. Die Constante $\mathfrak{u}$ ist bei den einzelnen Versuchen um 4,8, 3,0, 0,3 und 4,6 Proc., im Durchschnitt 3,2 Proc. grösser gefunden als die Schallgeschwindigkeit u betrug.

Die aus den Gleichungen (2) und (3) mit den empirischen Constanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ berechneten Werthe sind in den Tabellen unter t_2 und dr/dt verzeichnet. Die Erklärung für die übrigen Columnen wird in Abschnitt 7 gegeben werden.

1) *Bedeutung der einzelnen Columnen der Tabellen 1—4*: t = *gemessene* Zeit in Secunden, t_2 = aus Gleichung (2) *berechnete* Zeit in Secunden; dr/dt = aus Gleichung (3) berechnete Geschwindigkeit in Metern; $f(\varrho')$ = nach der Riemann'schen Theorie aus den Werthen für dr/dt berechnete Geschwindigkeiten der Lufttheilchen in der Welle; ϱ'/λ = nach der gleichen Theorie berechnete Maximalverdichtung in der Welle; ϱ' = nach der gleichen Theorie berechnete Maximaldichte in der Welle; $\mathfrak{L}$ = Gewicht der von den Explosionsgasen verdrängten Luft in Gramm, welche durch 1 qcm hindurchströmt.

Tag der Sprengung: 8. October 1896.	Temperatur: 21,2° C.	Schallgeschwindigkeit u = 344,75 m.
Bauart des Magazins: Hartgypsdielen.	Luftfeuchtigkeit: 80 Proc.	Constante $\mathfrak{a}$ = 0,0419″.
Sprengstoff: 1500 kg *Schwarzpulver*.	Luftdichte λ = 0,0012.	Constante $\mathfrak{b}$ = 15,12 m.
Barometerstand: 758,7 mm.	Windgeschwindigkeit: 3 m.	Constante $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} = \mathfrak{u}$ = 361,2 m.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r	t^*[1])	t_2^*[1])	$t_2 - t^*$[1])	dr/dt	$f(\varrho')$	ϱ'/λ	ϱ'	$\varrho' - \lambda$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{L}/\varrho' - \lambda$
10 m	—	—	—	654,8 m	243,7 m	1,950	0,0023400	0,0011400	0,10300 g	90 cm
25	0,0502″	0,0438″	− 0,0064″	422,1	50,6	1,1479	0,0013775	0,0001775	0,01642	92
50	—	—	—	377,4	13,4	1,0375	0,0012450	0,0000450	0,00411	91
75	0,1757	0,1754	− 0,0003	368,5	6,0	1,0168	0,0012201	0,0000201	0,00183	91
100	—	—	—	365,3	3,4	1,0095	0,0012114	0,0000114	0,00103	90
125	0,3112	0,3122	+ 0,0010	363,8	2,2	1,0064	0,0012077	0,0000077	0,00066	86
150	—	—	—	362,9	1,4	1,0039	0,0012047	0,0000047	0,00046	98
175	0,4502	0,4500	− 0,0002	362,5	1,1	1,0030	0,0012037	0,0000037	0,00034	92
200	—	—	—	362,2	0,9	1,0022	0,0012027	0,0000027	0,00026	96
225	K. M.[2])	—	—	362,0	0,7	1,0018	0,0012022	0,0000022	0,00020	91
250	—	—	—	361,9	0,6	1,0015	0,0012018	0,0000018	0,00016	89

1) Die mit einem * versehenen Columnen enthalten Zahlen, welche sich auf Entfernungen beziehen, die 2 m grösser waren als in Columne 1 angegeben, was seinen Grund in der Aufstellung der Messapparate hat.

2) K. M. bedeutet hier und in der ganzen Abhandlung, dass dort keine Messung erhalten wurde.

Tabelle 2.

Tag der Sprengung: 17. December 1896.
Bauart des Magazins: Monierconstruction.
Sprengstoff: 1500 kg *Schwarzpulver.*
Barometerstand: 749,6 mm.

Temperatur: $-3{,}8°$ C.
Luftfeuchtigkeit: 60 Proc.
Luftdichte $\lambda = 0{,}001293$.
Windgeschwindigkeit: 3 m.

Schallgeschwindigkeit $u = 330{,}12$ m.
Constante $\mathfrak{a} = 0{,}0305''$.
Constante $\mathfrak{b} = 10{,}38$ m.
Constante $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} = \mathfrak{u} = 339{,}9$ m.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r	t	t_2	$t_2 - t$	dr/dt	$f(\varrho')$	ϱ'/λ	ϱ'	$\varrho' - \lambda$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{L}/\varrho' - \lambda$
10	—	—	—	489,4 m	124,1 m	1,4485	0,0018730	0,0005800	0,10300 g	177 cm
25	K. M.	0,0491″	—	369,0	23,4	1,0703	0,0013839	0,0000909	0,01642	181
50	0,1189″	0,1197	+ 0,0008″	347,1	6,0	1,0178	0,0013160	0,0000230	0,00411	179
75	0,1926	0,1922	− 0,0004	343,1	2,7	1,0079	0,0013032	0,0000102	0,00183	179
100	0,2666	0,2653	− 0,0013	341,7	1,5	1,0045	0,0012988	0,0000058	0,00103	177
125	0,3389	0,3385	− 0,0004	341,1	1,0	1,0029	0,0012968	0,0000038	0,00066	175
150	0,4107	0,4119	+ 0,0012	340,7	0,7	1,0020	0,0012956	0,0000026	0,00046	176
175	0,4851	0,4853	+ 0,0002	340,5	0,5	1,0015	0,0012950	0,0000020	0,00034	171
200	0,5588	0,5587	− 0,0001	340,34	0,4	1,0011	0,0012944	0,0000014	0,00026	185
225	0,6319	0,6322	+ 0,0003	340,26	0,3	1,0009	0,0012941	0,0000011	0,00020	178
250	0,7060	0,7057	− 0,0003	340,19	0,2	1,0007	0,0012939	0,0000009	0,00016	176

Tag der Sprengung: 29. October 1896.	Temperatur: 12,8° C.	Schallgeschwindigkeit u = 340,87 m.
Bauart des Magazins: Hartgypsdielen.	Luftfeuchtigkeit: 87 Proc.	Constante $\mathfrak{a}$ = 0,0674″.
Sprengstoff: 1500 kg *Granatfüllung.*[1])	Luftdichte λ = 0,0012.	Constante $\mathfrak{b}$ = 23,03 m.
Barometerstand: 741,7 mm.	Windgeschwindigkeit: 2,3 m.	Constante $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} = \mathfrak{u}$ = 341,7 m.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r	t	t_2	$t_2 - t$	dr/dt	$f(\varrho')$	ϱ'/λ	ϱ'	$\varrho' - \lambda$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{L}/\varrho' - \lambda$
10 m	—	—	—	857,8 m	428,4 m	3,2	0,0038400	0,0026400	0,21500 g	82 cm
25	0,0342″	0,0321″	− 0,0021″	464,6	102,0	1,3360	0,0016032	0,0004032	0,03438	85
50	—	0,0937	—	376,3	27,9	1,0168	0,0013041	0,0001041	0,00859	83
75	0,1623	0,1622	− 0,0001	357,4	13,0	1,0387	0,0012464	0,0000464	0,00382	82
100	—	0,2329	—	350,7	7,4	1,0220	0,0012264	0,0000264	0,00215	82
125	0,2964	0,3045	+ 0,0081	347,5	4,8	1,0141	0,0012169	0,0000169	0,00138	81
150	—	0,3766	—	345,7	3,3	1,0099	0,0012118	0,0000118	0,00096	81
175	0,4461	0,4491	+ 0,0030	344,7	2,5	1,0073	0,0012088	0,0000088	0,00070	81
200	—	0,5217	—	344,0	1,9	1,0055	0,0012066	0,0000066	0,00054	82
225	0,6009	0,5944	− 0,0065	343,6	1,6	1,0045	0,0012054	0,0000054	0,00042	78
250	—	0,6664	—	343,2	1,2	1,0035	0,0012043	0,0000043	0,00034	81

1) Ein dem Trinitrophenol verwandter Körper.

Tabelle 4.

Tag der Sprengung: 1. April 1897.
Bauart des Magazins: Monierconstruction.
Sprengstoff: 1500 kg *Granatfüllung*.
Barometerstand: 734,3 mm.

Temperatur: 11,4° C.
Luftfeuchtigkeit: 57 Proc.
Luftdichte $\lambda = 0{,}001196$.
Windgeschwindigkeit: 4,7 m.

Schallgeschwindigkeit $u = 339{,}73$ m.
Constante $\mathfrak{a} = 0{,}0624''$.
Constante $\mathfrak{b} = 22{,}19$ m.
Constante $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} = \mathfrak{u} = 355{,}5$ m.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r	t	t_2	$t_2 - t$	dr/dt	$f(\varrho')$	ϱ'/λ	ϱ'	$\varrho' - \lambda$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{L}/\varrho' - \lambda$
10 m	—	—	—	865,6 m	423,4 m	3,1154	0,0036260	0,0024300	0,21500 g	88 cm
25	0,0315″	0,0316″	+ 0,0001″	475,3	99,5	1,3123	0,0015695	0,0003735	0,03438	92
50	0,0909	0,0915	+ 0,0006	388,9	27,7	1,0804	0,0012922	0,0000962	0,00859	89
75	0,1590	0,1576	− 0,0014	370,7	12,6	1,0359	0,0012890	0,0000430	0,00382	89
100	0,2245	0,2258	+ 0,0013	364,1	7,2	1,0208	0,0012203	0,0000243	0,00215	88
125	0,2965	0,2947	− 0,0018	361,1	4,6	1,0130	0,0012116	0,0000156	0,00138	88
150	0,3631	0,3642	+ 0,0011	359,4	3,2	1,0091	0,0012068	0,0000108	0,00096	88
175	0,4340	0,4338	− 0,0002	358,3	2,4	1,0067	0,0012040	0,0000080	0,00070	88
200	0,5031	0,5037	+ 0,0006	357,7	1,8	1,0052	0,0012022	0,0000062	0,00054	87
225	0,5737	0,5736	− 0,0001	357,2	1,4	1,0041	0,0012009	0,0000049	0,00042	87
250	K. M.	—	—	356,9	1,2	1,0032	0,0011999	0,0000039	0,00034	89

5.

Es ist versucht worden, den Verlauf der Verdichtung der ıft an verschiedenen Stellen der Umgebung der Explosions-elle zu registriren. Der hierzu benutzte Apparat ist in der estalt, die er schliesslich erhalten hat, und wie er bei der tzten Sprengung benutzt worden ist, in Fig. 5 dargestellt.

Der unten geschlossene Messingcylinder *C* wurde mit einer hr feinen Kautschukmembran *M* bespannt, die ein bestimmtes uftvolumen in dem Cylinder abschloss, welches bis kurz vor m Versuche mit der äusseren Luft in Communication stand, ınn aber abgesperrt wurde. Auf der Mitte der Membran

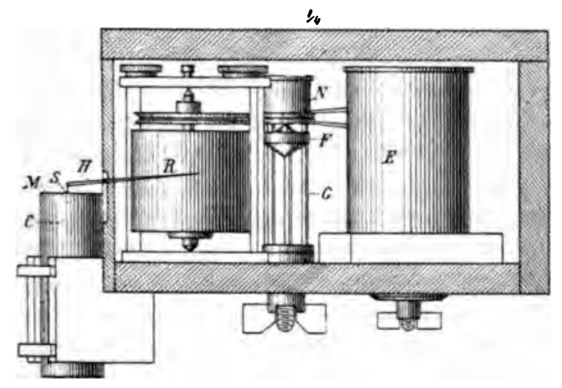


Fig. 5.

r mit Kautschuklösung ein Stift *S* befestigt, welcher mit n Hebel *H* in Verbindung stand, der die Bewegung der mbran in etwa dreifacher Uebertragung auf die durch einen inen Elektromotor *E* um ihre senkrecht stehende Axe in tation versetzte Registrirtrommel *R* aufzeichnete. Der ssingcylinder war an einer Wand ausserhalb des die übrigen eile des Apparates bergenden Kastens befestigt, der nur ıen Schlitz hatte, um den Schreibhebel hindurchzulassen, d der in einer Höhe von etwa 1,5 m an einer festen, in die de gegrabenen Bohle befestigt wurde. Als Schreibhebel ırden bei der ersten Anwendung der Apparate direct auf die embranen geklebte Federposen verwendet, an deren Enden t Siegellack Schreibfedern aus ganz feinem Stahlblech be-stigt waren; da aber von fünf derartigen Apparaten nur ıer eine Registrirung ergab, während bei den vier anderen

die Federposen von den Membranen oder die Schreibfedern von den Federposen abgerissen wurden, ehe eine brauchbare Aufzeichnung erreicht war, wurden dann genau ausbalancirte Messinghebel verwendet, an welche die Stahlfedern angelöthet wurden.

Das Maass für die Umdrehungsgeschwindigkeit der Registrirtrommeln wurde anfangs dadurch gewonnen, dass in dem Kasten ein eben solcher kleiner elektromagnetisch betriebener Schreibhebel, wie er p. 338 erwähnt ist, eingebaut war (in der Figur nicht gezeichnet), der mit zwei um 25 m auseinander stehenden Luftstossanzeigern in einen Stromkreis geschaltet wurde. Durch die Explosionswelle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf anderem Wege gemessen wurde, sollten die beiden Luftstossanzeiger in Function treten und je eine Marke liefern, deren Sinn durch eine vorangegangene überschlägliche Bestimmung der Tourenzahl leicht festgestellt werden konnte. Letztere wurde so gewählt, dass zwischen zwei Marken etwas weniger als eine Umdrehung lag. Da die Luftstossanzeiger aber statt je einer Unterbrechung immer deren mehrere hervorriefen, sodass in einem Falle die Rotationsdauer nicht genau ermittelt werden konnte, musste ein sichereres Verfahren der Zeitregistrirung angewendet werden. Dieses bestand darin, dass ein durch drei Gleitstangen *G* (Fig. 5) geführtes Fallgewicht *F* mit einer Schreibfeder versehen wurde, welche während des Falles eine Curve auf der Registrirtrommel beschrieb. Das etwa 70 g schwere Fallgewicht wurde bis kurz vor dem Eintreffen des Explosionsstosses an dem dem Magazine zunächststehenden Registrator elektromagnetisch gehalten. Ein Luftstossanzeiger, der mit den Elektromagneten *N* aller fünf Apparate einen Stromkreis bildete, löste die Fallgewichte gleichzeitig aus.

Die Aichung dieser Instrumente wurde mit Hülfe eines Wassermanometers vorgenommen, welches die Centimeter Wasserdruck angab, die einer bestimmten Hebelstellung entsprachen.

Von diesen Instrumenten wurden die Curven 1, 2, 3 . . ., welche auf der Taf. V, Fig. 2—6 wiedergegeben sind, registrirt. Da die Hebelarme Kreisbögen beschrieben, mussten die Abscissen vorher auf geradlinige Coordinaten transformirt werden,

was auf graphischem Wege geschehen ist, wobei die geringe Correction wegen der Krümmung der Registrirtrommel unberücksichtigt geblieben ist.

Wegen der Eigenschwingungen des die Verdichtungen angebenden Systems sind diese Curven theilweise erheblich getrübt. Sie geben also in der mitgetheilten Form nicht den reinen zeitlichen Verlauf der Gleichgewichtsstörung an den betreffenden Stellen an. Anfangs war geplant, diesen durch empfindliche Flammen mit Hülfe photographischer Registrirung zu fixiren. Der hohen Kosten wegen, welche die dazu projectirten Apparate verursachten, wurde von dieser einwandfreien Methode Abstand genommen.

Um ein Bild über den wirklichen Verlauf der Dichte zu erhalten, müssen die erhaltenen Curven von den superponirten Eigenschwingungen des Systems befreit werden. Hierbei wurde von dem Gesichtspunkte ausgegangen, dass der Ausschlag nach der *einen* Seite den der Dämpfung des Systems entsprechenden Ausschlag nach der *anderen* Seite hätte zur Folge haben müssen, wenn das System sich selbst überlassen geblieben wäre. Die Differenz dieses Ausschlages und der thatsächlich registrirten Ordinate, welche der zugehörigen Phase der Eigenschwingungen entsprach, wurde daher als Folge der vorhandenen Dichte angenommen.

Die Grösse der Dämpfung und die Dauer der Eigenschwingungen wurde in der Weise gefunden, dass dem Hebelarm durch mechanisches Herabdrücken der Membran ein entsprechender Ausschlag gegeben wurde. Während die Registrirtrommel sich in Rotation befand, wurde der Druck plötzlich aufgehoben, sodass die Membran ihre Schwingungen aufzeichnen konnte.

Curve 12 (Fig. 6, Taf. V) ist eine auf diesem Wege erhaltene.[1]) Es zeigt sich, dass die zahlreichen Schwingungen, die oft erhalten worden sind, thatsächlich mit den Eigenschwingungen des Apparates nahe übereinstimmen, woraus zu schliessen ist, dass nur die ersten Ausschläge als annähernd den wirklichen Verdichtungen an den betreffenden Stellen entsprechend an-

---

1) Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass jede Membran ihre eigene Dämpfungs- und Schwingungscurve hatte, die den entsprechenden Curven bei der Reduction zu Grunde gelegt wurde.

gesehen werden können, während die übrigen Ausschläge als Folgen der Eigenschwingungen zu betrachten sind.

Nach Ausführung der angedeuteten Correction, die auf graphischem Wege für die Curven, in welchen Eigenschwingungen deutlich erkennbar sind, durchgeführt ist, ergeben sich die Curven 1a, 2a, 3a . . ., welche einen einigermaassen einheitlichen Charakter zeigen, der dem thatsächlichen Verlauf der Verdichtung besser entsprechen dürfte, als die Originalcurven. Neben der wohl annähernd richtigen Registrirung der maximalen Verdichtung in der Explosionswelle ergiebt sich daraus, dass der Werth ϱ/λ, nachdem die Explosionswelle an einer Stelle vorbeigegangen ist, eine Zeit lang unter 1 herabsinkt. Hierfür sprechen alle, auch die uncorrigirten Curven, insbesondere aber die Curve Nr. 1, in welcher an den Stellen, wo ϱ/λ bereits < 1 geworden ist, die Secundärschwingungen der Membran noch vorhanden sind. Im übrigen kann aus den Curven nur ein Schluss über die Gesammtdauer der Gleichgewichtsstörung gezogen werden. Diese war bei allen Curven kleiner als 0,05″.

Die sich aus den Curven ergebenden Maximalwerthe für ϱ/λ stimmen mit den aus den Zeitmessungen [1]) berechneten nicht schlecht überein, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

Tabelle 5.

Datum der Explosion	Curve Nr.	Entfernung von der Explosionsstelle	Maximalwerth der Verdichtung nach der Curve	Maximalwerth der Verdichtung nach den Zeitenmessungen
17. 12. 96	1	100 m	1,015 (unsicher)	1,005
1. 4. 97	2	75	1,0355	1,0359
	3	100	1,025	1,0203
	4	125	1,039	1,0130
	5	150	1,005	1,0091
	6	175	1,009	1,0067
5. 6. 97	7	75	1,021	K. M.
	8	100	1,026	
	9	125	1,022	
	10	150	1,007	
	11	175	1,0045	

1) Vgl. Columne 7 der Tab. 1—4 und Gleichung (10) p. 358.

6.

In sämmtlichen Berichten über zufällige Explosionen findet man neben den „directen“ Explosionswirkungen, d. h. denjenigen, durch welche die Trümmer zerstörter Gegenstände in die Richtung vom Explosionsherde weggeschleudert werden, auch „indirecte“ Wirkungen verzeichnet, welche dadurch gekennzeichnet sind, dass die Trümmer in die Richtung zum Explosionsherd hingeworfen werden, als ob sie zu ihm hingesaugt worden wären. Diese indirecten Wirkungen werden vorzugsweise in grösseren Entfernungen beobachtet, während die directen auf eine relativ geringe Zone beschränkt bleiben, aber weit heftiger sind als die indirecten, die z. B. darin bestehen, dass Ziegel von Dächern, die mehrere Kilometer weit vom Explosionsherde entfernt sind, abgerissen werden, oder dass Fensterscheiben zerbrochen werden etc.

Diese Thatsachen haben bisher eine befriedigende Aufklärung nicht gefunden. Es wurde angenommen, dass bei einer Explosion die Explosionsgase vornehmlich in die Höhe geschleudert wurden und eine Aspirationswirkung auf die Umgebung ausübten, wodurch Luftmassen aus grossen Entfernungen zum Explosionsherde hinstürzten. Diese angesaugten Luftmassen sollten die indirecten, kilometerweit reichenden Wirkungen hervorrufen. Bei näherer Ueberlegung ist jedoch diese Erklärung nicht stichhaltig.

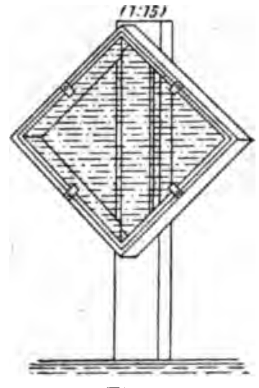


Fig. 6.

Die schon auf p. 330 kurz erwähnten Fensterscheiben ergaben über diese Verhältnisse einwandfreies Beobachtungsmaterial.

Quadratische Scheiben, aus 1,5 mm starkem gewöhnlichen Fensterglas von 40 cm Seitenlänge, waren in Holzrahmen (Fig. 6) befestigt, und, mit ihrer Fläche dem Explosionsherde zugewendet, etwa 75 cm über dem Erdboden an Pfählen angebracht, die in Entfernungen von 25 bis 275 m um den Explosionsherd herum gruppirt waren.

Hierbei wurde folgendes beobachtet:

Die Splitter der dem Explosionsherde zunächst (25 m von ihm entfernt) aufgestellten Scheiben waren zum weitaus grössten Theile vom Explosionsherde fortgeschleudert, während ein kleiner Bruchtheil auch in die Richtung zu ihm hingefallen war. In den folgenden Zonen lagen die Splitter (derselben Scheiben) zu etwa gleichen Theilen vom Magazin weg und zu diesem hingestreut.

Je weiter die Scheiben vom Explosionsherd entfernt waren, um so höher war der Procentsatz der Bruchstücke, die nach dem Magazin zu gefallen waren, bis schliesslich die zerbrochenen Scheiben ausschliesslich nach dem Magazin zu geworfen waren und in entgegengesetzter („directer“) Richtung keine Bruchstücke von zerbrochenen Scheiben mehr aufgefunden wurden.

Diese auffällige Vertheilung der Glassplitter, die schon früher, wenn auch weniger vollständig, bei zufälligen Explosionen vielfach beobachtet wurde, liess als erwiesen erscheinen, dass, wo die Lage der Glassplitter dies anzeigte, an derselben Stelle sowohl positiv gerichtete Kräfte, welche Körper vom Explosionsherde weg, als auch negativ gerichtete, welche Körper zum Explosionsherde hin zu bewegen im Stande sind, in der Umgebung der Explosionsstelle auftraten.

Um zu prüfen, wie sich die zum Magazin hin gerichtete Kraft zeitlich zu der von ihm fortgerichteten verhielt, und ob die indirecte Kraft ihren Ursprung in einer nach dem Magazin hingerichteten Luftströmung habe, wurden genau symmetrisch gebaute elektrische Stromunterbrecher verwendet, von welchen der eine Theil nur auf eine negative, d. h. nach dem Magazin hin gerichtete Kraft, der andere nur auf eine positive Kraft reagiren konnte. Die den Stoss auffangenden Flächen waren genau in derselben Ebene justirt. Die Construction wurde so gewählt, dass die Apparate einer relativ grossen Arbeitsmenge bedurften, um in Thätigkeit zu treten.

Die Unterbrecher bestanden aus schweren, 5 mm starken Messingplatten P (Fig. 7), die um ein Charnier S drehbar waren und durch ein kräftiges Gummiband (in der Figur nicht gezeichnet) fest gegen eine Platinspitze C gedrückt wurden. Beim Auftreffen des Luftstosses auf die Stossfläche sollte der Contact an der Platinspitze unterbrochen und kurz darauf durch Vorschnellen einer Feder F, die zunächst von einem

kleinen Stifte *R* zurückgehalten wurde, der sein Widerlager an einem Ansatz *A* der Platte *P* hatte, wieder geschlossen werden.

Diese kurzen Unterbrechungen wurden mit Hülfe eben solcher kleinen Elektromagnete, wie sie für die Luftstossanzeiger benutzt wurden, auf der gleichen Registrirtrommel, auf welcher die durch die Luftstossanzeiger erzeugten Unterbrechungen aufgezeichnet wurden, registrirt.

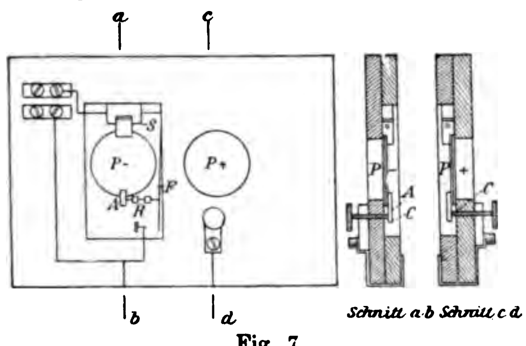


Fig. 7.

Fünf dieser Apparate wurden neben fünf Luftstossanzeigern aufgestellt, sodass sie sich mit diesen in möglichst gleicher Entfernung vom Explosionsherde befanden. Nachstehend sind die mit diesen Vorrichtungen am 17. 12. 96 bei der zweiten Sprengung von Schwarzpulver erhaltenen Messungen mit den mit Luftstossanzeigern in der gleichen Entfernung erhaltenen Resultaten zusammengestellt. Der Contact wurde von den verschiedenen Apparaten in den betreffenden Entfernungen zu den in Columne 2—4 verzeichneten Zeiten nach erfolgter Sprengung unterbrochen.

Tabelle 6.

1	2	3	4
Entfernung von der Sprengstelle	Luftstossanzeiger	Plattenunterbrecher für	
		positiven Stoss	negativen Stoss
50 m	0,1189s	0,1211s	K. M.
75	0,1926	0,1959	0,1961s
100	0,2666	0,2705	0,2713
125	0,3389	0,3423	0,3450
150	0,4107	K. M.	0,4181

Die Zahlen der Columne 4 zeigen, dass eine Luftströmung, die — im Sinne der bisherigen Anschauung — ihren Ursprung in entfernter gelegenen Stellen und ihr Ende in der Explosionsstelle hat, also ein sogenanntes „Saugen", nicht stattgefunden hat, denn die dem Explosionsherde näheren Unterbrecher traten durchweg früher in Thätigkeit als entfernter von ihm aufgestellte. Bemerkenswerth ist, dass von den für negativen Stoss eingerichteten Unterbrechern der dem Magazine zunächst, von den auf positiven Stoss eingerichteten der von ihm am weitesten aufgestellte, nicht functionirt haben, woraus zu schliessen ist, dass die betreffenden Kräfte an diesen Stellen zu gering waren, um die Apparate in Thätigkeit zu setzen.

Der Vergleich der Columnen 3 und 4 zeigt, dass sich eine Wirkung, die nach dem Explosionsherde hin gerichtet war, nach diesen Versuchen mit ungefähr der gleichen Geschwindigkeit vom Explosionsherde fortbewegt hat, wie der positive Stoss selbst. Diese Wirkung ist durchweg etwas später an der betreffenden Stelle zur Geltung gekommen wie der positive Stoss. Da aber die Empfindlichkeit der Apparate nur in roher Weise regulirt werden konnte, und von den positiv ansprechenden Plattenunterbrechern die dem Magazin näheren, von den negativ ansprechenden die ferneren die unempfindlicheren waren, so kann man aus den Zahlen nur schliessen, dass die positiven und negativen Kräfte an derselben Stelle ungefähr gleichzeitig aufgetreten sind.

7.

Alle in den Abschnitten 3—6 geschilderten Beobachtungen deuten darauf hin, dass man es bei den durch Explosionen in der Luft eingeleiteten Vorgängen mit Wellenbewegungen zu thun hat, die der Schallbewegung verwandt sind. Die Verdichtungen, die auftreten, sind aber nicht, wie beim normalen Schall unendlich klein, sondern wie durch die Messungen nachgewiesen ist, von endlicher Grösse.

Die Explosion eines Sprengstoffes findet, selbst in freier Luft, stets unter einem sehr hohen Drucke im Explosionsherde statt, welcher infolge der rapiden Gasentwickelung mehrere Tausend Atmosphären beträgt. In dieser plötzlichen Gleichgewichtsstörung hat die Wellenbewegung ihren Ursprung. Die

Folge der unter hohem Drucke stattfindenden Gasentwickelung zeigt sich in dem Bestreben der Explosionsgase, das ihnen unter den herrschenden Bedingungen zukommende Volumen auszufüllen.

Befindet sich der explodirende Körper, welcher der Einfachheit wegen als Kugel gedacht sein möge, in einem homogenen Medium, z. B. in ruhender Luft, von überall gleicher Beschaffenheit, so breiten sich die Explosionsgase nach allen Richtungen hin gleichmässig aus, weil der Widerstand, den sie finden, in allen Richtungen der gleiche ist. Würde die Bewegung eine vollständig aperiodische sein, oder würde die Ausdehnung langsam vor sich gehen, so würde die Bewegung ihr Ende erreichen, sobald die Gase das ihnen zukommende Volumen eingenommen haben. Vermöge der hohen Spannung im Explosionsherde beim Beginn der Erscheinung expandiren jedoch die Gase plötzlich, und die Gastheilchen können infolge ihrer Trägheit dieses Volumen überschreiten, was eine vorübergehende Luftverdünnung im Explosionsherde zur Folge haben würde. Diese durch die Expansion der Gase bedingte translatorische Bewegung ist indessen auf einen relativ geringen Raum beschränkt. So entwickelt 1 kg Granatfüllung z. B. das beträchtliche Gasvolumen von 870 Litern, gemessen bei 0° und 760 mm Druck. Daraus berechnet sich, dass 1500 kg dieses Stoffes ein Gasvolumen entwickeln, welches in dem gleichen Zustande eine Halbkugel erfüllt, deren Radius etwa 8,6 m beträgt. Wäre der Widerstand, den die Gase bei dieser Ausdehnung finden, längs ihrer Bewegungsrichtung auf der ganzen Strecke der gleiche, würden sie ihre Gleichgewichtslage sehr beträchtlich überschreiten; da aber der Widerstand, welchen die zu verdrängende Luft leistet, auf dieser Strecke fortwährend wächst, ist die Bewegung der Explosionsgase eine stark gedämpfte, sodass die translatorische Bewegung derselben sich keinesfalls bis auf das Doppelte des genannten Werthes des Radius erstreckt.

Die Gasmengen treten bei einer Explosion mit solcher Rapidität auf, dass die Theile des umgebenden Mediums, z. B. der Luft, nicht schnell genug ausweichen können, um eine starke Verdichtung der Luft zu verhindern. Bei ihrer gewaltsamen plötzlichen Ausdehnung schieben sie die Luft, welche

sie verdrängen, in die umgebende Schicht hinein, und die so erzeugte Verdichtung überträgt sich auf immer wachsenden Oberflächenschichten.

Dass die Explosionswelle auch bei den vorliegenden Versuchen, bei welchen die Sprengstoffe weder aus einer Kugel bestanden, noch kugelförmig gelagert waren, eine kugelförmige Welle war, geht ausser aus anderen Beobachtungen aus zwei von der Artillerieprüfungscommission aufgenommenen Photographien Taf. VI, Fig. 1 u. 2 hervor, welche zwei kurz aufeinander folgende Momente der Rauchentwickelung bei der Explosion am 17. 12. 96 darstellen. Auf beiden dieser Bilder ist ein eigenthümlicher Hof erkennbar, der die Sprengstelle umgiebt. Zeichnet man in die beiden Aufnahmen das Magazin ein, so stellt der Hof auf jedem Bilde genau einen Halbkreis um das Magazin dar, dessen Durchmesser auf dem ersten Bilde 65 m, auf dem zweiten 80 m beträgt. Es mag unerörtert bleiben, welcher Ursache die Hofbildung zuzuschreiben ist. Zweifellos war sie vorhanden, pflanzte sich unabhängig von der Masse der Rauchwolken fort und bestand in einem Dichteunterschied gegenüber der umgebenden Luft. Die genau halbkreisförmige Gestalt des Hofes zeigt, dass sich der Dichteunterschied jedenfalls in grosser Annäherung auf Kugeloberflächen fortpflanzt.[1])

Wie schon oben bemerkt wurde, hat Riemann die Theorie für die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite entwickelt. Er hat dabei nicht im Auge gehabt, dass seine Untersuchung der experimentellen Forschung nützliche Ergebnisse liefern würde, sondern „wünscht, sie nur als einen Beitrag zur Theorie der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen betrachtet zu sehen". Der Inhalt seiner Arbeit ist von ihm in einer Selbstanzeige [2]) derselben folgendermaassen zusammengefasst:

„Obwohl die Vergleichung der Resultate unserer Untersuchung mit der Erfahrung durch Versuche und Beobachtungen grosse Schwierigkeiten hat und gegenwärtig kaum ausführbar

1) Die Reproductionen lassen die Höfe leider nicht in der wünschenswerthen Schärfe erkennen, weil sie nach Positiven angefertigt werden mussten, da die Originalnegative beim Transport zu Bruch gingen.

2) Göttinger Nachrichten 1859, Nr. 19; Gesammelte mathematische Werke, p. 165. 1876.

sein wird, so mögen diese doch, soweit es ohne Weitläufigkeit möglich ist, hier mitgetheilt werden.

Die Abhandlung behandelt die Bewegung der Luft oder eines Gases nur für den Fall, wenn anfangs also auch in der Folge die Bewegung allenthalben gleichgerichtet ist, und in jeder auf ihrer Richtung senkrechten Ebene Geschwindigkeit und Dichtigkeit constant sind. Für den Fall, wo die anfängliche Gleichgewichtsstörung auf eine endliche Strecke beschränkt ist, ergiebt sich bekanntlich bei der gewöhnlichen Voraussetzung, dass die Druckverschiedenheiten unendlich kleine Bruchtheile des ganzen Druckes sind, das Resultat, dass von der erschütterten Stelle zwei Wellen, in deren jeder die Geschwindigkeit eine bestimmte Function der Dichtigkeit ist, ausgehen und in entgegengesetzten Richtungen mit der bei dieser Voraussetzung constanten Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho)}$ fortschreiten, wenn $\varphi(\varrho)$ den Druck bei der Dichtigkeit ϱ und $\varphi'(\varrho)$ die Derivirte dieser Function bezeichnet. Etwas ganz Aehnliches gilt nun für diesen Fall auch, wenn die Druckverschiedenheiten endlich sind. Die Stelle, wo das Gleichgewicht gestört ist, zerlegt sich ebenfalls nach Verlauf einer endlichen Zeit in zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen. In diesen ist die Geschwindigkeit, in der Fortpflanzungsrichtung, eine bestimmte Function $\int \sqrt{\varphi'(\varrho)}\, d \log \varrho$ der Dichtigkeit, wobei die Integrationsconstante in beiden verschieden sein kann, in jeder ist also mit einem und demselben Werthe der Dichtigkeit stets derselbe Werth der Geschwindigkeit verbunden, und zwar mit einem grösseren Werthe ein algebraisch grösserer Werth der Geschwindigkeit. Beide Werthe rücken mit constanter Geschwindigkeit fort. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Gase ist $\sqrt{\varphi'(\varrho)}$, im Raume aber um die in der Fortpflanzungsrichtung gemessene Geschwindigkeit des Gases grösser. Unter der in Wirklichkeit zutreffenden Voraussetzung, dass $\varphi'(\varrho)$ bei wachsendem ϱ nicht abnimmt, rücken daher grössere Dichtigkeiten mit grösserer Geschwindigkeit fort, und hieraus folgt, dass die Verdünnungswellen, d. h. die Theile der Welle, in denen die Dichtigkeit in der Fortpflanzungsrichtung wächst, der Zeit proportional an Breite zunehmen, die Verdichtungswellen aber ebenso an Breite abnehmen, und schliesslich in Verdichtungsstösse übergehen

müssen. Die Gesetze, welche vor der Scheidung beider Wellen oder bei einer über den ganzen Raum sich erstreckenden Gleichgewichtsstörung gelten, sowie die Gesetze für das Fortschreiten von Verdichtungsstössen, können hier, weil dazu grössere Formeln erforderlich wären, nicht angegeben werden.

In akustischer Beziehung liefert demnach diese Untersuchung das Resultat, dass in den Fällen, wo die Druckverschiedenheiten nicht als unendlich klein betrachtet werden können, eine Aenderung der Form der Schallwellen, also des Klanges, während der Fortpflanzung eintritt. Eine Prüfung dieses Resultates durch Versuche scheint aber trotz der Fortschritte, welche in der Analyse des Klanges in neuester Zeit durch Helmholtz u. a. gemacht worden sind, sehr schwer zu sein; denn in geringen Entfernungen ist eine Aenderung des Klanges nicht merklich, und bei grösseren Entfernungen wird es schwer sein, die mannichfachen Ursachen, welche den Klang modificiren können, zu sondern. An eine Anwendung auf die Meteorologie ist wohl nicht zu denken, da die hier untersuchten Bewegungen der Luft solche Bewegungen sind, die sich mit der Schallgeschwindigkeit fortpflanzen, die Störungen der Atmosphäre aber allem Anscheine nach mit viel geringerer Geschwindigkeit fortschreiten.“

Die Aehnlichkeiten und Unterschiede, welche in den Voraussetzungen, welche Riemann seiner Theorie zu Grunde legt, und den Verhältnissen bestehen, mit denen man bei einer Explosion zu rechnen hat, lassen sich hieraus leicht ableiten.

Zunächst ist klar, dass man es bei einer Explosion mit einer Gleichgewichtsstörung zu thun hat, die im Anfang auf eine endliche Strecke beschränkt ist, nämlich auf das Volumen des explodirenden Körpers. Ferner sind auch die Druckverschiedenheiten im Anfange des Phänomens endlich. Denn in dem denkbar äussersten Falle steht den endlichen Massen der sich bildenden Explosionsproducte doch immer das endliche Volumen des ursprünglichen Sprengstoffes zur Verfügung. Die Dichte kann also nicht unendlich gross werden.

Andererseits ist die Bewegung nach der Explosion nicht wie bei Riemann *überall gleichgerichtet*, sondern findet nach allen Richtungen hin gleich statt; Dichtigkeit und Geschwindigkeit sind nicht wie bei Riemann in jeder auf der Bewegungs-

richtung senkrechten Ebene constant, sondern die Flächen gleicher Dichtigkeit und Geschwindigkeit sind unter den obigen Voraussetzungen Kugeloberflächen.

Allgemein gelten folgende von Riemann unter Zugrundelegung des Poisson'schen Gesetzes

$$\varphi(\varrho) = p = a^2 \varrho^k \tag{4}$$

abgeleitete Gleichungen:

$$\sqrt{\varphi'(\varrho)} = a\sqrt{k}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}, \tag{5}$$

$$\int \sqrt{\varphi'(\varrho)}\, d\log\varrho = \frac{2a}{k-1}\sqrt{k}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}} + \text{const.} = f(\varrho), \tag{6}$$

k ist das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen zu einander, a also aus correspondirenden Werthen von p und ϱ z. B. für Luft aus dem dem Barometerstande entsprechenden Drucke und der beobachteten Luftdichte zu berechnen. Der Werth $f(\varrho)$ bedeutet die Geschwindigkeit der Luft in der Schicht für die Dichte ϱ, während $\sqrt{\varphi'(\varrho)}$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher sich die Dichte ϱ von Schicht zu Schicht überträgt.

Nimmt man für die Bestimmung der Integrationsconstante an, dass sich die Welle in ruhender Luft von der Dichte λ bewegt, so hat man von λ bis zu dem Maximalwerth ϱ' der Dichte in der Welle zu integriren. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit stetiger Wellen ergiebt sich dann zu

$$v = a\sqrt{k}\,\varrho'^{\frac{k-1}{2}} + \frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\left(\varrho'^{\frac{k-1}{2}} - \lambda^{\frac{k-1}{2}}\right), \tag{7}$$

was auch geschrieben werden kann:

$$v = a\sqrt{k}\,\lambda^{\frac{k-1}{2}}\left[\left(\frac{\varrho'}{\lambda}\right)^{\frac{k-1}{2}}\left(1 + \frac{2}{k-1}\right) - \frac{2}{k-1}\right]. \tag{7a}$$

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Unstetigkeitsstellen gegen ruhende Luft findet Riemann den Ausdruck

$$v' = \sqrt{\frac{\varrho'}{\lambda}\, a^2\, \frac{(\varrho'^k - \lambda^k)}{\varrho' - \lambda}}. \tag{8}$$

Für ebene Wellen ergeben sich also, da hier der Maximalwerth der Dichte während des ganzen Verlaufes der Bewegung constant ist, auch constante Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in beiden Fällen.

Wellen endlicher Dichte, deren Oberflächengestalt eine Aenderung der Maximaldichte während ihrer Bewegung bedingt, haben keine constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit. In diesen Fällen hat man, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle zu finden, in die obigen Gleichungen für ϱ' die Function einzusetzen, welche die Veränderlichkeit der Maximaldichte darstellt.

Bei Kugelwellen in der Luft steht die Aenderung der Dichte im umgekehrten Verhältniss zum Quadrate des Wellenradius, für einen unendlich grossen Radius ist die Dichte gleich derjenigen der Luft. Man hat also

$$(9) \qquad \varrho' = \lambda + \frac{b'^2}{r^2} \quad \text{oder} \quad (9a) \quad \frac{\varrho'}{\lambda} = 1 + \frac{b'^2}{r^2 \lambda}$$

in die Gleichungen (7) bez. (7a) und (8) einzusetzen, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für stetige bez. unstetige kugelförmige Luftwellen von endlicher Schwingungsweite in ruhender Luft zu erhalten. Die Constante b'^2 hängt von den Anfangsbedingungen der Bewegung ab.

Stellt man aus Gleichung (7a) ϱ'/λ als Function von v und $u = \alpha \sqrt{k} \lambda^{\frac{k-1}{2}}$ dar, so findet man

$$(10) \qquad \frac{\varrho'}{\lambda} = \left[\frac{v(k-1) + 2u}{u(k-1)}\right]^{\frac{2}{k-1}}.$$

Die nach dieser Gleichung mit den empirischen Werthen dr/dt (für v) und u (für u) berechneten ϱ'/λ (Columne 7 der Tabellen 1—4 auf p. 341—344) folgen in der That der in Gleichung (9a) aufgestellten Beziehung. Die in Columne 8 und 9 der gleichen Tabellen verzeichneten Werthe für ϱ' und $\varrho' - \lambda$ finden sich in leicht ersichtlicher Weise aus Columne 7 mit der am Kopfe der Tabellen gegebenen Luftdichte.

Der Werth $f(\varrho')$ bestimmt sich aus Gleichung (7) nach mehrfachen Transformationen zu

$$(11) \qquad f(\varrho') = \frac{2}{k+1}\left[v - \sqrt{\varphi'(\lambda)}\right],$$

oder mit dem Werthe 1,41 für k und den empirischen Werthen für v und $\sqrt{\varphi'(\lambda)}$ zu

$$f(\varrho') = 0{,}83 \left(\frac{dr}{dt} - \text{u}\right),$$

(vgl. Columne 6 der Tabellen 1—4).

Entwickelt man den Ausdruck (7a), nachdem für ϱ'/λ der Werth (9a) eingesetzt ist, in eine binomische Reihe, so ergiebt sich unter Vernachlässigung der Glieder, welche im Nenner r^4 und höhere Potenzen von r enthalten,

$$v = a\sqrt{k}\,\lambda^{\frac{k-1}{2}}\left[1 + \frac{k+1}{2}\,\frac{b'^2}{r^2\lambda}\right].$$

Der Factor vor der Klammer stellt die den meteorologischen Verhältnissen entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit u des normalen Schalles dar. Führt man diese Bezeichnung ein und setzt

$$b^2 = \frac{k+1}{\lambda}\,b'^2,$$

so kann der vorstehende Ausdruck angenähert auch geschrieben werden

$$v = u\sqrt{1 + \frac{b^2}{r^2}}, \tag{12}$$

was sich genau mit der empirisch gefundenen Gleichung

$$\frac{dr}{dt} = \mathfrak{u}\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{b}^2}{r^2}} \tag{13}$$

deckt. Diese beiden Ausdrücke unterscheiden sich allein dadurch, dass die in deutschen Schriftzeichen wiedergegebenen Constanten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{b}^2$ der Gleichung (13) empirisch, während die Constanten u und b^2 der Gleichung (12) theoretisch sind.

Die Dimensionen und die Werthe der beiden Grössen $\mathfrak{u}$ und u stimmen überein. Es bleibt zu untersuchen, wie sich in dieser Beziehung die beiden Constanten $\mathfrak{b}^2$ und b^2 verhalten.

Bei Explosionswellen wird, wie oben auseinandergesetzt wurde, das verdichtete Gebiet durch die Explosionsgase erzeugt, welche eine gewisse Luftmenge verdrängen und in die umgebende Luft hineinschieben. Dadurch wird eine Kugeloberflächenschicht gebildet, in welcher die Dichte grösser ist als in der Umgebung, und deren Volumen gegeben ist durch

$$\int_{r-(l/2)}^{r+(l/2)} 4\,r^2\pi\,dr,$$

wenn l die Schichtbreite bedeutet. Die Gasmenge, welche in diesem Gebiete vorhanden ist, beträgt

$$\int_{r-(l/2)}^{r+(l/2)} 4\, r^2 \pi\, \varrho\, d\, r$$

und besteht aus der in der Schicht schon vorher vorhandenen Luftmenge von der Dichte λ und der infolge der Explosion hineingetriebenen Menge. Das Gewicht dieser letzteren kann in erster Annäherung dem Gewicht der Explosionsgase gleichgesetzt werden. Infolge der anfänglich hohen Temperatur der Explosionsgase, und infolge davon, dass die Gase bei ihrer Ausdehnung ihre Gleichgewichtslage vorübergehend ein wenig überschreiten, sodass im Explosionsherde vorübergehend eine Luftverdünnung hervorgerufen wird, kommt zwar noch ein bestimmter Betrag hinzu. Da aber die Arbeitsleistung der Gase bei einer Explosion in freier Luft nur auf minimalen Widerstand stösst, die Abkühlung also sehr rasch und anscheinend ziemlich vollständig erfolgt, so kann dieser Betrag nicht sehr erheblich sein. Dass bei Explosionen, wie den hier behandelten, die Abkühlung thatsächlich sehr rasch erfolgt, kann daraus gefolgert werden, dass bei der Explosion am 17. 12. 1896 die nach starkem Schneefall stattfand, auch in nächster Nähe des Explosionsherdes nirgends Schmelzspuren beobachtet wurden.

Aus diesen Gründen ist daher im Folgenden, mangels näherer Kenntniss, der hinzukommende Betrag ganz vernachlässigt, und das Gewicht der verdrängten Luftmenge dem Gewicht $\alpha\,\omega$ der Explosionsgase gleichgesetzt worden, wo ω das Gewicht des explodirenden Körpers, α das Gewicht der von der Gewichtseinheit desselben entwickelten Gasmenge bedeutet. Dann ist

$$\int_{r-(l/2)}^{r+(l/2)} 4\, r^2 \pi\, \varrho\, d\, r = \int_{r-(l/2)}^{r+(l/2)} 4\, r^2 \pi\, \lambda\, d\, r + \alpha\, \omega,$$

ϱ ist in dieser Gleichung eine Function von r und l; für einen bestimmten Werth von r ist ϱ nur eine Function von l; ein bestimmter Werth von ϱ, z. B. der Maximalwerth, ist nur eine Function von r, nämlich $\varrho' = \lambda + (b'^2/r^2)$. Ist l gegen r klein,

so kann die Gleichung für einen bestimmten Werth von r geschrieben werden

$$4 r^2 \pi \int_0^l \varrho \, d l = 4 r^2 \pi \lambda l + \alpha \omega .$$

Denkt man sich die Gasmenge $\alpha \omega$ in dem ganzen Gebiet gleichmässig vertheilt, dieses also homogen, z. B. von der maximalen Dichte ϱ', so entspricht dieser Hypothese eine minimale Schichtbreite l'. Für ein bestimmtes r erhält man dann

$$4 r^2 \pi \varrho' l' = 4 r^2 \pi \lambda l' + \alpha \omega$$

oder

$$\varrho' = \lambda + \frac{\alpha \omega}{4 r^2 \pi l'} \cdot$$

Bei Explosionen an der Erdoberfläche, wo wegen der einseitigen Begrenzung der Luft durch den Erdboden das verdichtete Gebiet sich auf der Oberfläche einer Halbkugel ausbreitet, wird, wie ohne weiteres ersichtlich

(12) $$\varrho' = \lambda + \frac{\alpha \omega}{2 r^2 \pi l'} \cdot$$

Berücksichtigt man, dass in Gleichung

(9) $$\varrho' = \lambda + \frac{b'^2}{r^2}$$

b'^2 eine constante Grösse ist, so folgt der Schluss, dass die Breite der Schicht unter den gemachten Annahmen während des ganzen Verlaufes der Bewegung oberhalb einer bestimmten Minimalgrenze liegt, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt wird. Man kann unter der oben angedeuteten Vernachlässigung diese Grenze berechnen, wenn für irgend einen Werth von r der Werth ϱ' bekannt ist. Dividirt man (Tab. 1—4) die durch die Querschnittseinheit (Quadratcentimeter) in der Entfernung r hindurchgehende Menge $\mathfrak{L}$ der von den Explosionsgasen verdrängten Luft durch $\varrho' - \lambda$, so erhält man in der That constante Zahlen, wie Columne 11 der Tabellen zeigt.

Da sich, wie Riemann gezeigt hat, grössere Dichtigkeiten mit grösseren Geschwindigkeiten fortpflanzen als geringere, so wird das erschütterte Gebiet vom Anfang der Bewegung an allmählich immer breiter. Bei Beginn der Bewegung ist es am schmalsten. Die Minimalgrenze wird aber praktisch

auch hier nicht erreicht. Sie ist nur denkbar unter der Annahme einer idealen Detonation, d. h. wenn die Explosion in so kurzer Zeit vor sich geht, dass während dieser Zeit überhaupt keine Volumenzunahme stattfindet. In dem Falle würden die Explosionsgase in dem Zeitpunkte der beendeten Detonation das Volumen des ursprünglichen Sprengstoffes einnehmen. Denkt man sich diesen als eine homogene Kugel, so würde der Radius dieser Kugel die Minimalgrenze der Breite der Explosionswelle darstellen. In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse nicht so einfach, da die Sprengstoffmasse weder homogen ist, noch in idealer Weise detonirt. Kommt jedoch, wie in den vorliegenden Fällen, die Explosion der idealen Detonation nahe[1]), so kann man das Anfangsvolumen der Gase angenähert dem Volumen gleich setzen, auf welches die Sprengstoffe vertheilt waren, und daraus, allerdings nur in sehr roher Annäherung, die anfängliche Schichtbreite berechnen.

Das Volumen, auf welches die Sprengstoffe vertheilt waren, betrug bei allen Versuchen ungefähr 4 cbm, welchem angenähert das Volumen einer Kugel von 1 m Radius entspricht. Es mag daher $l' = 1$ m angenommen werden, eine Annahme, die mit den Werthen in Columne 11 in den Tabellen 1—4 recht gut vereinbar ist.

Der Versuch vom 17./12. 96 weicht davon allerdings ab und weist eine doppelt so grosse Minimalschichtbreite auf, als unter den gemachten Annahmen zu erwarten war. Dies ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, dass an diesem Tage eine wesentlich langsamere Explosion stattfand als sonst. Das geht unter anderen diesbezüglichen Beobachtungen auch aus den photographischen Aufnahmen der Artillerie-Prüfungscommission hervor (vgl. die Photographien Taf. VI, Fig. 1 u. 2), welche abweichend von den anderen Explosionen, gerade bei dieser

1) Dies war bei Granatfüllung u. a. an der Färbung der Rauchwolke zu erkennen. „Explodirende“ Granatfüllung wird nie vollkommen zersetzt, sondern ein grosser unzersetzter Theil färbt die Rauchwolke gelb, während durch den erreichbar heftigsten Grad der Explosion, welcher in der Praxis als „Detonation“ bezeichnet wird, stets vollständige Zersetzung eintritt, was bei Granatfüllung dadurch kenntlich ist, dass die Rauchwolke durch ausgeschiedene Kohle, wie in den vorliegenden Fällen, schwarz gefärbt ist.

Sprengung an den scharfen Spitzen der Rauchwolken, die sich über mehrere aufeinanderfolgende Aufnahmen erstrecken, erkennen lassen, dass sich längere Zeit neue Gasmassen bildeten als bei den übrigen Explosionen. Zum Vergleich sind die Photographien Taf. VI, Fig. 3 und 4 hier beigegeben. Dieselben stellen die beiden ersten erhaltenen Momente der Rauchentwickelung bei der Sprengung am 29./10. 96 dar. In Fig. 3 ist das Magazin noch völlig sichtbar, während gerade nach allen Seiten hin die Explosionsflammen durch die Wände schlagen. Der nächste Moment der Rauchentwickelung, der zeitlich der Photographie Fig. 2 entspricht, zeigt die Wolke schon vollständig abgerundet ohne irgendwelche Spitzenbildung, die auf weitere Gasentwickelung hindeuten könnte. In der Form, welche die Figuren 3 und 4, Taf. VI, erkennen lassen, verliefen nach den photographischen Aufnahmen alle Explosionen mit Ausnahme derjenigen vom 17./12. 96.[1])

Aus Gleichung (9) und (12) findet sich die Constante

$$b'^2 = \frac{\alpha\,\omega}{2\,\pi\,l'}$$

und da

$$b^2 = \frac{k+1}{\lambda}\,b'^2$$

gesetzt war, ergiebt sich

$$b^2 = \frac{(k+1)\,\alpha\,\omega}{2\,\pi\,\lambda\,l'}. \tag{13}$$

Dieser Ausdruck hat, wie die empirisch gefundene Constante b^2, die Dimension einer Fläche und sei, da er für stetige Wellen gilt, mit $b^2_{\text{st.}}$ bezeichnet.

Die gleiche Behandlung der Gleichung (8) führt zu einem Ausdruck gleicher Form wie (13) mit dem Unterschiede, dass der b^2 darstellende Quotient für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Unstetigkeitsstellen noch durch 2 zu dividiren, also

1) Die vier Photographien sind unter Zustimmung der Artillerie-Prüfungskommmission und mit Genehmigung des Kgl. Kriegsministeriums dem von Hauptmann Heydenreich entworfenen „Ergänzungsbericht 2 zu dem Bericht der Artillerie-Prüfungskommission über die im Jahre 1896—97 auf Schiessplatz Cummersdorf stattgehabten Sprengungen mit belegten Sprengstoffmagazinen“ entnommen worden.

halb so gross ist, wie für stetige Wellen. Berechnet man die Werthe $b_{st.}$ und $b_{unst.}$ aus den beiden Gleichungen

$$b_{st.} = \sqrt{\frac{(k+1)\,\alpha\,\omega}{2\,\pi\,\lambda\,l'}}\,,$$

$$b_{unst.} = \sqrt{\frac{(k+1)\,\alpha\,\omega}{4\,\pi\,\lambda\,l'}}$$

unter den Annahmen, welche zu dem Werthe $l' = 1$ m führten, so ergeben sich dafür die nachstehend mit den aus den Zeitmessungen empirisch berechneten b zusammengestellten Werthe. ω betrug in allen Fällen 1500 kg. Bei der Explosion von 1 kg Schwarzpulver werden $\alpha = 0{,}43$ kg gasförmige Explosionsproducte gebildet; für Granatfüllung ist dieser Werth etwa 0,9; für Gelatinedynamit nahezu 1.

Tag des Versuches	b	$b_{st.}$	$b_{unst.}$
8./10. 96	15,12 m	13,9 m	9,8 m
29./10. 96	23,03	20,9	14,8
17./12. 96	10,38	13,4	9,5
1./4. 97	22,19	20,9	14,8
6./5. 97	K. M.	21,6	15,3

Es zeigt sich, dass auch die Grösse der abgeleiteten Constante $b_{st.}$ mit der empirisch gefundenen übereinstimmt. Der Grad der Uebereinstimmung lässt die diesen Betrachtungen zu Grunde gelegten Voraussetzungen für Näherungsberechnungen als gerechtfertigt erscheinen.

Bei der Dynamitsprengung am 6./5. 97 haben die Luftstossanzeiger gar keine Messungen ergeben. Der Grund dafür ist nicht sicher aufgeklärt. Möglicherweise hat die Bauart des Magazines dabei mitgewirkt.

Aus Gleichung (7a) auf p. 357 können indessen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten einer stetigen Explosionswelle an Stellen, wo der Maximalwerth von ϱ'/λ bekannt ist, berechnet werden. Führt man diese Rechnung unter Benutzung der den meteorologischen Verhältnissen am 5./6. 97 entsprechenden Schallgeschwindigkeit $u = 339{,}01$ m und der aus den Curven 7—11 entnommenen Maximalverdichtungen aus, so ergeben sich folgende Geschwindigkeitswerthe v für die Entfernungen r:

r	*v*
75 m	347,5 m
100	349,5
125	347,8
150	341,7
175	341,0

Nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet sich hieraus die Constante $\mathfrak{b}$ zu 20,14 m, welche mit der abgeleiteten Constante $b = 21{,}6$ m ebensogut übereinstimmt, wie die aus den anderen Versuchen erhaltenen entsprechenden Werthe auf der vorigen Seite.

Die Curven 2—6 ergeben bei der gleichen Berechnung für $\mathfrak{b}$ den wahrscheinlichsten Werth 25,05 m. Lässt man jedoch die Curve 4, die einen augenscheinlich zu grossen Werth für ϱ'/λ besitzt, ausser Betracht, so wird $\mathfrak{b} = 22{,}55$ m, was sehr gut zu dem aus Zeitmessungen erhaltenen Werth 22,19 m stimmt.

Schallgeschwindigkeiten, die grösser als die normale waren, sind, wie schon wiederholt erwähnt, namentlich von Mach gemessen worden. Indessen ist noch von keiner Seite versucht worden, die Riemann'sche Theorie auf solche Messungen anzuwenden.

Dass die empirisch gefundene Gleichung (1) eine allgemeinere Bedeutung hat, als man ohne Ableitung aus der Riemann'schen Theorie geneigt ist anzunehmen, geht auch daraus hervor, dass die Mach'schen Versuche, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Funkenwellen betreffen[1], durch diese Gleichung in noch besserer Weise dargestellt werden als die oben mitgetheilten. Mach selbst hat eine Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Entfernung von der Wellenquelle nicht gesucht, sonst wäre er wahrscheinlich zu dem gleichen oder doch einem ähnlichen Ausdruck gelangt.

In nachfolgender Tabelle sind in Columne 1 und 2 die von Mach angegebenen Messungen enthalten. r (Meter) bedeutet die Entfernung, in welcher die Funkenwelle nach t Secunden anlangte. t_2 ist aus Gleichung (2), p. 340, abgeleitet, nachdem $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{u}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate aus r und t berechnet wurden. Die Schallgeschwindigkeit u

1) E. Mach, O. Tumlirz u. C. Kügler, l. c.

betrug nach Mach's Angabe bei den Versuchen 340 m. Es ergiebt sich $\mathfrak{a} = 0{,}000206''$; $\mathfrak{b} = 0{,}071367$ m; $\mathfrak{u} = 346{,}72$ m, also etwa 2 Proc. grösser als u.

Tabelle 7.

1	2	3	4
r	t	t_2	$t - t_2$
0,080 m	0,000106″	0,000103″	+ 0,000003″
0,137	0,000235	0,000239	− 0,000004
0,254	0,000560	0,000555	+ 0,000005
0,400	0,000960	0,000966	− 0,000006
0,977	0,002621	0,002620	+ 0,000001

Um für diese Versuche die Constante

$$b^2 = \frac{k+1}{4\pi\lambda}\,\frac{\alpha\,\omega}{l'}$$

abzuleiten, fehlt es an einer genügenden Kenntniss der Anfangsbedingungen. Indessen dürfte eine diesbezügliche Untersuchung bei Funkenwellen zu nicht uninteressanten Aufschlüssen führen.

Die oben erwähnten Vieille'schen Versuche sind unter so wesentlich anderen Versuchsbedingungen ausgeführt, dass eine Discussion derselben in dem vorstehenden Sinne hier nicht möglich ist. Es mag nur erwähnt werden, dass die Gleichung (7) unter Annahme der Luftdichte zu 0,0012, des Verhältnisses der specifischen Wärmen zu 1,41 und des Werthes u zu 340 m für einen Versuch, den Vieille mit Knallquecksilber anstellte[1]), bei welchem $\varrho' - \lambda = 0{,}00666$ zu setzen ist, zu einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 1278 m, die Gleichung (8) (für unstetige Wellen) zu einer solchen von 1128 m führt, während Vieille gemessen hat 1138 m. Die Riemann'sche Theorie scheint Vieille nicht zu kennen, dagegen erwähnt er eine Arbeit von Hugoniot[2]), in welcher theoretisch nachgewiesen wird, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Druckimpulses in einer Röhre abhängig ist von der Intensität des Druckimpulses.

1) P. Vieille, l. c. p. 33.

2) Literaturangabe fehlt; gemeint ist wahrscheinlich P. Sébert et H. Hugoniot, Compt. rend. 98. p. 507—509. 1884.

8.

Die auf p. 350 erwähnte auffällige Vertheilung der Splitter der zerbrochenen Fensterscheiben erklärt sich aus der Thatsache, dass man es bei einer Explosion mit einer longitudinalen Wellenbewegung zu thun hat. Die Riemann'sche Theorie lehrt, dass die Lufttheilchen innerhalb einer Welle von endlicher Verdichtung eine bestimmte Geschwindigkeit $f'(\varrho)$ besitzen, die in dem einen, vorderen Theil der Welle positiv, d. h. im Sinne des Fortschreitens der Welle, im anderen aber negativ, d. h. nach der Sprengstelle zu gerichtet ist. Der positiv gerichtete Werth für $f(\varrho')$ ist in den Tab. 1—4 mitgetheilt.

Der Werth der negativ gerichteten Geschwindigkeit lässt sich mit dem vorhandenen Versuchsmaterial nicht mit der gleichen Sicherheit berechnen, weil über den Zustand der Luft hinter der Explosionswelle keine genügend verbürgte Kenntniss

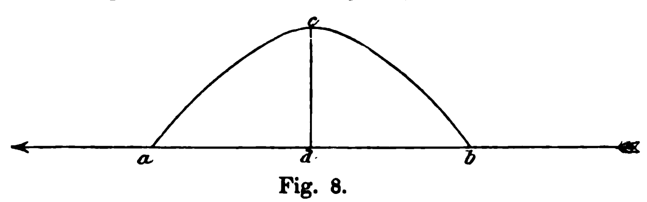


Fig. 8.

vorhanden ist. Da, wie die Curven auf Taf. V zeigen, der Verdichtung unmittelbar eine Verdünnung folgt, müssen die negativ gerichteten Geschwindigkeiten in der verdichteten Stelle jedenfalls grösser sein als die positiv gerichteten Geschwindigkeiten der Lufttheilchen.

Wird die Dichte in der Welle von der Breite $l = ab$ an irgend einer Stelle der Umgehung, z. B. durch die Curve acb Fig. 8 dargestellt, und herrscht in den Punkten a und b die Dichte λ der Umgebung, während in d die durch die Ordinate dc dargestellte Maximaldichte vorhanden ist, so bewegen sich Lufttheilchen sowohl von d nach a, d. h. in Richtung des Fortschreitens der Welle, als auch solche von d nach b, d. h. nach dem Explosionsherde zu. Diese Bewegung der Lufttheilchen ist nur relativ zur Welle und nicht translatorisch zu verstehen. In ruhender Luft bleiben die Theilchen im wesentlichen an der Stelle im Raume, wo sie die Welle trifft. In bewegter Luft kommt die translatorische Bewegung der Luft algebraisch hinzu.

An Stellen in der Umgebung eines Explosionsherdes, wo die Dichte durch eine derartige Curve dargestellt wird, treten demnach, der localen Bewegung der Lufttheilchen an dieser Stelle entsprechend, zwei entgegengesetzte Kräfte auf, eine Kraft, welche Körper vom Explosionsherde fort-, und eine, welche solche nach ihm hin zu bewegen im Stande ist. Daraus erklärt sich z. B. die auffällige Vertheilung der Glassplitter in der Nähe des Explosionsherdes, wo die Wellenform einen der obigen Darstellung entsprechenden Verlauf der Dichte bedingt.

Wie Riemann nachgewiesen hat und durch die oben erwähnten Versuche bestätigt worden ist, pflanzen sich stärkere Verdichtungen mit grösseren Geschwindigkeiten fort als geringere Verdichtungen. Bei der Weiterwanderung des Gebietes *ab* muss daher die Maximaldichte allmählich näher an *a* heranrücken, und der Verlauf der Dichte in der Welle kann dann etwa durch folgende Curve dargestellt werden:

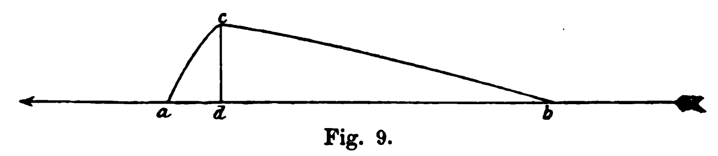


Fig. 9.

Hat die Wellenform diese Gestalt angenommen, so haben mehr Lufttheilchen eine Bewegung von *d* nach *b* als von *d* nach *a*. Infolge dessen überwiegt die nach dem Magazin hin gerichtete Kraft. Dem entspricht die allmähliche procentische Zunahme der nach dem Magazin zu geschleuderten Glassplitter. Im weiteren Verlauf rückt die Ordinate *dc* näher und näher an *a* heran, bis die Maximaldichte schliesslich an den Kopf der Welle gelangt ist. Die Welle hat dann die in Fig. 10

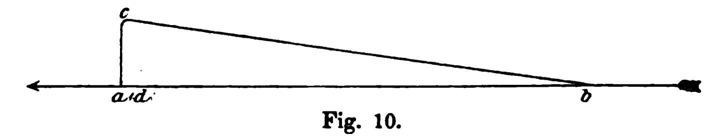


Fig. 10.

dargestellte Form, und eine Bewegung von Lufttheilchen, also auch eine Kraftäusserung innerhalb der Welle findet in ihrer Fortpflanzungsrichtung nicht mehr statt, sondern die in der Welle enthaltenen Lufttheilchen haben ausschliesslich eine Bewegungsrichtung zur Explosionsstelle hin.

Daraus erklärt sich, dass in grösseren Entfernungen Glasstücke ausschliesslich in diese Richtung geschleudert sind. Damit steht auch im Einklange die fast in allen Berichten über grössere Explosionen übereinstimmend enthaltene Beobachtung, dass in grossen Entfernungen die zerstörende Wirkung nach dem Explosionsherde hin gerichtet, also gleichsam durch eine saugende Wirkung hervorgerufen ist.

Es ist anzunehmen, dass in der Nähe des Explosionsherdes die Form der Explosionswelle eine derartige ist, dass die Maximaldichte näher bei *b* als bei *a* liegt, dass also dort die vom Explosionsherde fort gerichtete Kraft in der Welle die entgegengesetzt gerichtete übersteigt. Damit würde im Einklange stehen, dass die Splitter der dem Magazin zunächst aufgestellten Scheiben überwiegend von diesem fortgeschleudert wurden. Es steht mit der vorgetragenen Anschauung ferner im Einklange, dass von den auf p. 352 erwähnten Plattenunterbrechern der dem Magazin zunächst stehende, für negative Stossrichtung eingerichtete, und der von ihm entfernteste für positive Stossrichtung eingerichtet, nicht functionirt haben.

9.

Die unter 2. auf p. 330 angeführten Kraftmessungen wurden in der Weise ausgeführt, dass auf die erwähnten Pfähle auf besonderen Unterlagen Kugeln aus verschiedenen Stoffen und von verschiedener Grösse sehr empfindlich aufgelegt wurden, die durch die Explosionswirkung herabgeworfen werden sollten. Aus ihrer Fallhöhe, Wurfweite und Masse konnte die von ihnen aufgenommene Energie berechnet werden.

Ferner wurden besonders construirte Federkraftmesser verwendet, bei welchen der Explosionsstoss von Stempeln bekannten Querschnittes aufgefangen wurde. Die Stempel wirkten auf vorher geaichte Federn, deren Verkürzung registrirt wurde. Aus der Federverkürzung wurde die von diesen Instrumenten registrirte Energie berechnet.

Nach beiden Verfahren ergab sich übereinstimmend, dass die Intensität der aufgenommenen Energie im umgekehrten Verhältniss zum Quadrate der Entfernung stand.

Bei den Kugeln verhielt sich die an irgend einer Stelle aufgenommene zu der vorhandenen Energieintensität angenähert

wie das specifische Gewicht der Luft zu demjenigen der Kugel.

Ein näheres Eingehen auf Einzelheiten bei diesen Messungen liegt ausserhalb des Rahmens dieser Annalen.[1])

Resultate.

Nach den vorstehenden Untersuchungen sind, wie schon erwähnt wurde, die durch Explosionen in der Luft hervorgerufenen Wirkungen auf Schallbewegungen zurückzuführen. Nur in nächster Nähe des Explosionsherdes tritt zu diesen eine translatorische Bewegung der Explosionsgase hinzu und führt dort eine erhebliche Verstärkung der Zerstörung herbei.

Der Unterschied zwischen dem normalen Schall und der Explosionswirkung besteht darin, dass die Bewegung bei Explosionen die Folge von endlichen Verdichtungen ist, während der normale Schall als Bewegung infolge von unendlich kleinen Verdichtungen aufgefasst wird.

Im Explosionsherde wird durch die Explosion eine Gasverdichtung erzeugt, die sich nach allen Richtungen hin fortpflanzt. Die Gleichgewichtsstörung überträgt sich — abgesehen von der auf ein enges Gebiet beschränkten translatorischen Bewegung — von Stelle zu Stelle, und an jeder Stelle wiederholt sich unter abgeänderten Bedingungen, was sich in der Explosionsstelle zugetragen hat. Die Bedingungen sind insofern abgeändert, als im Explosionsherde das erschütterte Gebiet irgend eine Körperform, z. B. angenähert die Kugelform hatte, während an den Folgestellen das erschütterte Gebiet nicht die Gestalt dieses Körpers, sondern die Gestalt einer Oberflächenschicht desselben, z. B. einer Kugelschalenschicht hat.

Ueberall zerfällt das erschütterte Gebiet, die Explosionswelle, nach einer endlichen Zeit in nach entgegengesetzten Richtungen der Wellennormale fortschreitende Wellenzüge. Mit der Explosionswelle sind also genau wie im Explosionsherde selbst in der Richtung jeder einzelnen Wellennormale zwei in entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte verbunden.

1) Man findet dieselben in dem Ergänzungsbericht 1 zu dem auf p. 368 erwähnten Bericht der Artillerie-Prüfungscommission.

Die Verdichtung pflanzt sich mit einer gewissen Geschwindigkeit fort; und zwar ergiebt der Versuch übereinstimmend mit der Theorie für grössere Dichten grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, woraus folgt, dass sich die Wellenform im Verlaufe der Bewegung ändert. Der vordere Theil der Welle wird allmählich steiler und damit die positive Kraftwirkung geringer, während der hintere Theil der Welle allmählich flacher und damit die negative (indirecte) Kraftwirkung im Verhältniss zur positiven allmählich grösser wird. In der Nähe des Magazines tritt also die directe Wirkung stärker — und zwar zunächst ausschliesslich solche — hervor als die indirecte; allmählich geht aber dieses Verhältniss in das umgekehrte über, bis von einer gewissen Entfernung an nur noch die indirecte Wirkung auftritt.

Ein Strömen der Luft — in dem Sinne, wie die bisherige Anschauungsweise die indirecten Wirkungen zu erklären versuchte — vom Explosionsherde fort nach ferner gelegenen Punkten hin oder umgekehrt findet, abgesehen von der allernächsten Nähe des Explosionsherdes, aller Wahrscheinlichkeit nach überhaupt nicht statt. Jedenfalls konnte eine derartige translatorische Bewegung in Entfernungen, die mehr als 25 m vom Explosionsmittelpunkte betrugen, nicht festgestellt werden. Dass sie in geringeren Entfernungen vorhanden ist, zeigt die Thatsache, dass der aus verdichteten Gasen bestehenden Explosionswelle unmittelbar eine Welle aus verdünnten Gasen folgt, was nur erklärbar ist, wenn von der Explosionsstelle mehr Gase fortbewegt sind, als dem Gleichgewichtszustande entspricht.

Spandau, Militärversuchsamt, im Januar 1898.

(Eingegangen 6. Juli 1899.)

---

2. *Glimmlichterscheinungen bei hochfrequentem Wechselstrome*[1]; *von H. Ebert.*

(Mittheilung aus dem physikalischen Institute der Technischen Hochschul zu München.)

Eine Reihe von neueren Untersuchungen hat zu der Vermuthung geführt, dass in der Umgebung der Kathode einer elektrischen Gasentladung Veränderungen mit dem verdünnten Gas vor sich gehen, von denen es wahrscheinlich erscheinen musste, dass sie sich auch nach dem Ablaufe der eigentlichen Entladung eine gewisse, wenn auch nur kurze Zeit lang dauernd erhalten. Schon die Grundvorstellung über das Wesen des Glimmlichtes, der man sich jetzt allgemeiner als früher zuneigt, wonach dasselbe eine Art Fluorescenz- oder Phosphorescenzerscheinung des Gases ist, welches unter dem Einflusse der von der Kathode fortgeschleuderten negativ elektrischen Theilchen, der Kathodenstrahlen, luminescirt, sowie die vermuthlich weitgehende Dissociation, auf welche die Leitfähigkeit dieser „phosphorescirenden Luft" hinweist, legen die Vermuthung nahe, dass jene Vorgänge, welche die sichtbare Erscheinung des Glimmlichtes bedingen, auch *nach* dem Aufhören *unsichtbar* und doch so wirksam nachdauern, dass sie die nachfolgende Entladung und ihre charakteristische Erscheinungsform nicht unwesentlich beeinflussen. Um diese Vermuthung experimentell zu prüfen, verwendete ich zur Erzeugung der Entladungen den hochfrequenten, 800—1000 Pol-

1) Einzelne Theile dieser Arbeit sind in ausführlicherer Form bereits in drei Mittheilungen veröffentlicht worden, von denen zwei der kgl. bayer. Akad. der Wissensch. eingereicht wurden: „Unsichtbare Vorgänge bei elektrischen Gasentladungen", Sitzungsber. 28. p. 497—529. 1898 und „Zur Mechanik der Glimmlichtphänomene", Sitzungsber. 29. p. 23—37. 1899; die dritte Mittheilung, „Rückstosswirkungen elektrischer Wechselstromentladungen", vgl. Verhandl. der Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1. p. 141—144. 1899. Die genannten Veröffentlichungen geben die Einzelheiten der vorliegenden stark gekürzten, zusammenfassenden Darstellung.

wechsel in der Secunde aufweisenden Wechselstrom eines kleinen vierpoligen Gleichstrom-Wechselstromumformers, Typus G. Hummel, der auf einen kleinen Igeltransformator arbeitete. Die Spannung V (Volt) und Stromstärke i (Milliampères) im Hochspannungskreise konnte mittels früher beschriebener Messinstrumente[1]) trotz der hohen Spannung und Wechselzahl genau gemessen werden; das Product $E = V \times i \times 10^3$ (Watt) lässt den *Gang* des Energieconsums im Rohre verfolgen, wenn auch der wahre Werth desselben wegen der Phasenverschiebung davon nicht unerheblich abweicht.[2]) Der Gasdruck wurde mit dem Mac Leod-Manometer gemessen; d bedeutet in den folgenden Tabellen die Dicke des Hittorf'schen Kathodendunkelraumes in Millimetern.

Es gelang bei dieser raschen Aufeinanderfolge von Einzelentladungen, die abwechselnd in umgekehrter Richtung den Gasraum durchsetzten, in allen Fällen eine deutliche Wirkung der eben verklungenen Entladung auf die folgende nachzuweisen, also eine unsichtbare Nachdauer der durch die erste Entladung hervorgerufenen, oder diese bedingenden Vorgänge im Gase über die Zeit hinaus, wo die Wechselstromspannung durch ihren Nullwerth hindurchgeht und nach Ausweis des Drehspiegels die Lichterscheinung in der That vollkommen erloschen ist. Die Nachwirkung äussert sich in verschiedener Weise; immer hat sie den Charakter, als ob elektrisch geladene Partikelchen, etwa positiv geladene Ionen, längere Zeit sich mit ihren freien elektrischen Ladungen in dem Raume, der von dem *Glimmlichte* eingenommen war, zu erhalten vermögen. Von den verschiedenen hierdurch bedingten Erscheinungen bei der Hochfrequenzentladung hebe ich nur zwei als besonders charakteristisch hervor: 1. Die eigenthümliche Umkehrerscheinung, welche sich in den elektrischen Bestimmungsstücken bei gleichmässig fortschreitender Evacuation ergiebt; 2. Mechanische Rückstosswirkungen, welche die abwechselnd + und − geladenen Elektrodenplatten aufeinander ausüben, sobald die beiderseitigen, *nach*einander zum Leuchten kommenden Glimmlichträume in die gegenseitige Wirkungssphäre gerathen.

1) Vgl. H. Ebert, Wied. Ann. **65**. p. 761. 1898.
2) l. c. p. 787 und **67**. p. 615. 1899.

1. Die Umkehrerscheinung der Spannung, Stromstärke und des Wattconsums.

Erhalten sich die freien positiven Ladungen, welche im Glimmlicht durch Bestimmung der Spannungsgradienten nachgewiesen werden konnten, eine kurze Zeit lang, so findet von einem bestimmten Drucke an bei einer Folge rasch aufeinanderfolgender Entladungen, jede folgende das Gas nicht mehr in dem ursprünglichen Zustande vor, wie die erste. Dies muss bei gleichmässiger Evacuation von dem Momente an sich geltend machen, wo die Diffusionsgeschwindigkeit der geladenen Partikelchen nicht mehr ausreicht, einen vollkommenen Ausgleich herbeizuführen, d. h. wo durch jede Entladung mehr freie Ladung auf das Gas übertragen wird, als sich in der Zwischen-

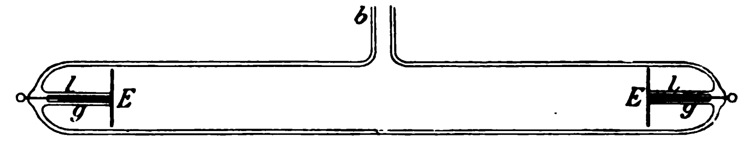


Fig. 1.

zeit etwa durch Auswanderung der geladenen Theilchen aus der Umgebung der Kathode ausgleichen kann. Eine Rückwirkung auf die Entladungsspannung, damit aber auch auf die Stromstärke und den Energieverbrauch im Rohre, ferner auf die Erwärmung in den der Kathode benachbarten Theilen, kann dann nicht mehr ausbleiben. Auf die Coincidenz der genannten Phänomene hatten schon die Herren A. Paalzow und F. Neesen[1]) hingewiesen; sie bemerkten auch schon, dass bei der „Umkehr" eine eigenthümliche Aenderung im Aussehen der Entladung eintritt. Dass die Erscheinung in der angedeuteten Weise zu erklären ist, glaube ich durch die folgenden Versuche beweisen zu können.

Zunächst mögen hier einige Messungsreihen an einem einfachen cylindrischen Entladungsrohre, Fig. 1 (Elektrodendurchmesser 2,0 cm, Elektrodenabstand 16,8 cm), angestellt, Platz finden, welche den Gang der Erscheinung bei Wechselstrom erläutern sollen. Die der „Umkehr" entsprechenden elektrischen Daten sind durch den Druck hervorgehoben.

1) A. Paalzow u. F. Neesen, Wied. Ann. 56. p. 276 u. p. 700. 1895.

Tabelle 1.

Wasserstoff.

p	4,43	2,49	2,15	1,06	0,88	0,58	0,47
d	1,2	2,3	2,5	4,2	4,9	6,3	7,6
i	14,02	16,39	**17,00**	16,57	15,94	15,01	13,91
V	742	614	**583**	592	648	698	784
E	10,40	10,07	**9,91**	9,80	10,33	10,48	10,66

Tabelle 2.

Luft.

p	2,76	1,30	0,83	0,51	0,27	0,20
d	0,9	1,5	2,2	2,8	5,0	6,7
i	12,61	15,76	**15,94**	15,39	13,49	12,37
V	718	574	**559**	602	725	812
E	9,05	9,06	**8,93**	9,27	9,77	10,06

Tabelle 3.

Kohlenoxyd.

p	1,81	0,99	0,46
d	1,3	2,0	3,0
i	14,02	**15,20**	14,12
V	673	**618**	707
E	9,43	**9,40**	9,98

Tabelle 4.

Kohlensäure.

p	3,92	1,21	0,91	0,88	0,52	0,33	0,22
d	0,7	1,5	2,0	2,0	2,9	4,5	5,0
i	13,49	17,25	17,58	**17,66**	16,83	15,30	14,72
V	815	598	596	**596**	659	748	831
E	11,00	**10,31**	10,47	10,52	11,10	11,45	12,23

Tabelle 5.

Leuchtgas.

p	5,09	2,69	1,76	1,01	0,64
d	1,1	2,0	2,5	3,0	5,0
i	12,83	17,00	**18,14**	17,25	15,58
V	795	568	**541**	592	676
E	10,21	**9,65**	9,81	10,21	10,54

Dass eine Art Diffusionsprocess im Spiele ist, zeigt der Umstand, dass die Umkehr bei den verschiedenen Gasen nahezu bei Drucken U eintritt, die sich wie die mittleren freien Weglängen λ der Gasmolecüle verhalten, wie man am besten sieht, wenn man die Spannungswerthe, welche am schnellsten mit dem Drucke variiren, als Ordinaten zu den Drucken als Abscissen aufträgt. Man erhält so (λ_{760} in $\mu\mu$ ausgedrückt):

Tabelle 5a.

	U	λ	λ / U
Wasserstoff	1,80	185	103
Luft	0,96	95	99
Kohlenoxyd	0,99	98	99
Kohlensäure	0,75	68	90

Eine vollständige Uebereinstimmung ist nicht zu erwarten, schon weil λ nicht ganz von der Temperatur unabhängig ist, die in den einzelnen Fällen gewiss eine sehr verschiedene war.

Da die freie Weglänge umgekehrt proportional dem Gasdrucke zunimmt, so kann man die hier gefundene Thatsache

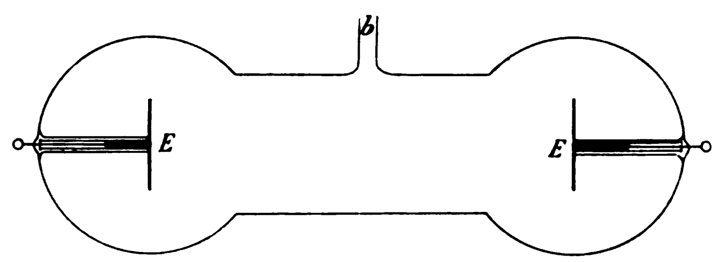


Fig. 2.

auch so ausdrücken: *Die Umkehr im Gange von Stromstärke, Spannung und Wattconsum findet bei derselben Röhre in dem Momente der fortschreitenden Evacuation statt, in welchem die mittlere freie Weglänge der verschiedenen Gase die gleiche geworden ist.*[1])

---

1) Dass bezüglich der Spannungswerthe eine ähnliche Relation auch bei den Entladungen der Influenzmaschine besteht, hat vor kurzem ein Schüler von mir, Hr. P. Ewers, nachgewiesen, vgl. Wied. Ann. **69.** p. 167. 1899; hier ist die Stromstärke natürlich constant und nur von der Production der Maschine abhängig.

In weiten Röhren können sich die elektrisirten Partikelchen weiter verbreiten, als in engeren, wo die Wolke oder „Atmosphäre geladener Theilchen“ (Righi) durch die Gefässwände in der Nähe der Elektroden zusammengehalten wird. Vergleicht man also mit der cylindrischen Röhre *B* (Fig. 1) eine weitere *D* (Fig. 2) (3,2 cm Elektrodendurchmesser, 14,5 cm Elektrodenabstand, Durchmesser der Elektrodenräume 8,5 cm, Raumverhältniss von *D*:*B* wie 7:1), so muss im weiten Rohre *D* die Umkehr immer erst später eintreten wie im engen Rohre *B*, wie es die folgenden Messungsreihen thatsächlich zeigen.

Tabelle 6.

Stickstoff. Röhre *D*.

p	3,45	—	2,01	—	—	1,02	—	—	0,63	0,53	—	0,33
d	0,7	—	1,5	—	—	1,9	—	—	—	2,7	—	3,95
i	14,62	—	17,66	—	—	19,00	—	—	Max.	19,23	—	18,78
V	632	—	464	—	—	387	—	—	Min.	390	—	424
E	9,25	—	8,19	—	—	7,36	—	—	Min.	7,51	—	7,97

Röhre *B*.

p	—	3,40	—	1,98	1,07	—	1,00	0,66	—	—	0,34	—
d	—	0,6	—	1,4	1,8	—	—	2,7	—	—	4,0	—
i	—	10,88	—	14,12	16,03	—	Max.	15,39	—	—	13,80	—
V	—	843	—	656	570	—	Min.	606	—	—	691	—
E	—	9,17	—	9,26	9,14	—	Min.	9,33	—	—	9,54	—

Tabelle 7.

Luft. Röhre *D*.

p	—	2,06	1,24	—	0,61	—	(0,60)	0,47	0,27	0,19
d	—	1,2	1,8	—	2,4	—	—	3,1	4,6	7,0
i	—	19,60	20,40	—	20,46	—	Max.	20,25	19,15	17,66
V	—	384	346	—	346	—	Min.	367	427	505
E	—	7,53	—	—	7,09	—	Min.	7,44	8.18	8,92

Röhre *B*.

p	2,08	—	1,24	(1,00)	—	0,60	—	0,47	0,27	0,19
d	1,2	—	1,7	—	—	2,9	—	4,0	6,0	8,0
i	15,11	—	16,74	Max.	—	16,39	—	15,58	13,71	11,90
V	608	—	529	Min.	—	559	—	614	707	835
E	9,19	—	8,86	Min.	—	9,16	—	9,57	9,69	9,94

Tabelle 8.

Sauerstoff. Röhre *D*.

p	2,77	—	—	—	1,38	—	1,21	(1,20)	1,19	—	0,92	—	0,58	0,53	[illegible]
d	0,6	—	—	—	1,2	—	1,3	—	1,5	—	1,5	—	2,4	2,5	[illegible]
i	20,95	—	—	—	21,43	—	21,63	—	21,63	Max.	21,70	—	20,88	20,82	[illegible]
V	377	—	—	—	343	—	332	Min	335	—	335	—	371	374	[illegible]
E	7,91	—	—	—	7,35	—	7,17	Min.	7,26	—	7,28	—	7,75	7,79	[illegible]

Röhre *B*.

p	—	2,75	1,80	(1,70)	1,32	1,24	1,21	—	—	0,93	—	0,89	0,58	0,54	[illegible]
d	—	0,5	0,7	—	1,1	1,3	1,3	—	—	1,5	—	1,7	2,4	2,4	[illegible]
i	—	19,53	19,74	Max.	18,46	17,82	17,58	—	—	17,91	—	17,74	17,66	17,17	[illegible]
V	—	447	433	Min.	502	527	531	—	—	536	—	550	566	579	[illegible]
E	—	8,73	8,55	Min.	9,28	9,39	9,35	—	—	9,60	—	9,76	9,99	9,94	[illegible]

Ebenso muss dann, wenn man die Cylinderröhre *B* von 16,8 cm Elektrodenabstand mit einer gleichweiten aber längeren Röhre, etwa der Röhre *A*, welche zwei gleichbeschaffene Elektroden in 33,9 cm Abstand hatte, bei denselben Drucken und den nämlichen Gasfüllungen vergleicht, die Umkehr in *A* bei tieferen Drucken auftreten als in *B*, was die folgenden Tabellen bestätigen.

Tabelle 9.

Luft. Röhre *A*.

d	2,5	3,0	4,0	4,5
i	13,76	13,82	13,89	13,09
V	1059	1013	1007	1042
E	14,56	14,01	13,98	13,66
				Umkehr

Röhre *B*.

i	13,63	13,63	13,37	13,37
V	765	801	834	839
E	10,42	10,92	11,15	11,21
	Umkehr			

Tabelle 10.

Wasserstoff. Röhre *A*.

p	3,05	2,04	1,37	0,95	0,72	0,54	0,40
d	1,5	2,0	2,8	4,0	5,0	5,6	7,0
i	12,40	12,40	12,40	12,40	12,11	12,11	12,40
V	1553	1276	1104	1024	1019	1024	1104
E	19,25	15,81	13,69	12,70	12,33 Umkehr	12,40	13,69

Röhre *B*.

i	13,23	12,54	12,54	12,11	12,40	12,40	12,54
V	801	715	767	(767)	1027	(923)	(967)
E	10,60	8,96 Umkehr	9,62	(9,29)	12,73	(11,45)	(12,13)

Tabelle 11.

Stickstoff. Röhre *A*.

p	2,81	1,91	1,28	0,93	0,65	0,45	0,30
d	0,5	1,5	2,1	2,5	3,5	4,0	6,0
i	11,05	12,13	12,65	12,97	12,80	12,80	12,97
V	1758	1472	1264	1114	1039	1033	1128
E	19,41	17,86	15,99	14,46	13,30	13,23 Umkehr	14,63

Röhre *B*.

i	12,80	12,97	12,97	12,97	12,97	12,97	12,97
V	1051	901	796	743	737	812	984
E	13,46	11,69	10,33	9,64	9,57 Umkehr	10,53	12,77

Während in den überall gleichweiten cylindrischen Röhren bei den höheren Drucken die Anodensäulen völlig ungeschichtet waren, trat eine deutliche Schichtung immer auf, sowie der Umkehrdruck erreicht war. Das Aussehen der Entladung änderte sich dann vollkommen.

Dem Umstande entsprechend, dass die Umkehr in dem längeren Rohre erst bei erheblich tieferen Drucken eintritt, zeigen sich hier auch die *Schichten* erst sehr viel später, als in dem mit ihm in Communication stehenden kürzeren Rohre. Beide Erscheinungen, Umkehr und Schichtenbildung, machen ganz den Eindruck, als beruhten sie auf einer Art Stauwirkung; das vollkommen entsprechende Verhalten derselben in vor-

liegendem Falle macht diese Anschauung nur noch wahrscheinlicher. Die die Umkehr von Stromstärke, Spannung und Energieconsum bedingenden Vorgänge scheinen hiernach ihren Sitz in dem ganzen Glimmlichtraume bis in den vorderen, unsichtbaren Saum desselben hinein zu haben. Es musste daher von Wichtigkeit sein, diesen Schluss in *demselben Entladungsraume bei demselben Drucke* und der gleichen Gasfüllung an einem Rohre zu prüfen, welches gestattete, *während der Entladung selbst* die vorderen Punkte der Glimmentladung gegen einander zu führen und so bei denselben äusseren Entladungsbedingungen, namentlich *bei demselben Drucke* jene eigenthümliche Umkehr nach Willkür hervorzurufen. Die Glimmlichtgebilde folgen ihrer Kathode, an der sie angeheftet zu sein scheinen; die die Umkehr herbeiführende Wirkung musste also lediglich durch Verkürzung des Elektrodenabstandes herbeizuführen sein.

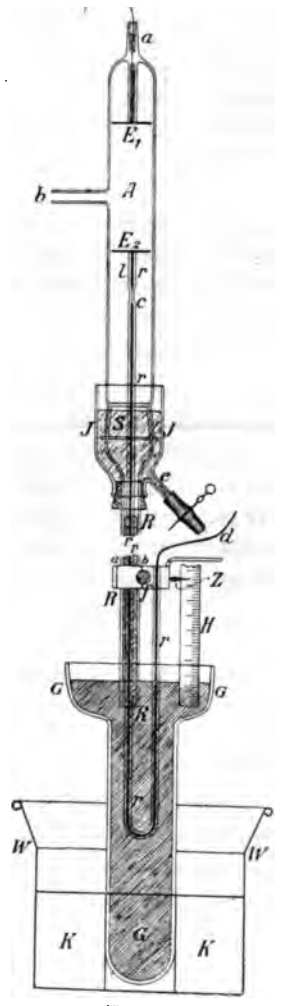


Fig. 3.

Um dies zu bewerkstelligen, wurde eine Anordnung mit einer festen und einer beweglichen Elektrode benutzt, wie sie ähnlich schon von Hrn. R. W. Wood beschrieben worden ist.[1])

Das 3,5 cm weite, 30 cm lange cylindrische Rohr *A* (Fig. 3) trägt oben die feststehende Elektrode E_1 (Kreisscheibe aus Aluminium von 2,7 cm Durchmesser); die Stromzuleitung geschieht von oben her mittels des angesetzten Quecksilbernäpfchens *a*, um Funkenstrecken zu vermeiden; durch *b* steht

1) R. W. Wood, Wied. Ann. 59. p. 246. 1896.

das Rohr *A* dauernd mit der Quecksilberluftpumpe in Verbindung. Unten trägt es den weiten Schliff *S*, an dem das 14 mm weite, 80 cm lange verticale Rohr *R* angesetzt ist. Durch *S* kann die untere, ebenfalls 2,7 cm im Durchmesser haltende Elektrode E_2 eingeführt werden, welche von einem Glasrohre *r* getragen wird, welches durch *R* hindurchgeführt und das unten U-förmig umgebogen ist. Die Zuleitung geschieht mittels eines durch *r* hindurchgezogenen Kupferdrahtes, der oben bei *c* an einen Platindraht hart angelöthet ist; auf diesen wird der Aluminiumstiel *l* der Elektrode E_2 fest aufgedrückt, sodass ein vollkommen metallischer Contact besteht. Bei *c* liess man das Rohr *r* vor der Gebläselampe zusammenfallen, bis sich das Glas allseitig dicht an das Platin anlegte; so wurde hier ein völlig gasdichter Abschluss erzielt.

Das untere Ende des Rohres *R* taucht in das mit Quecksilber gefüllte, oben napfartig erweiterte Standgefäss *S*, welches von einem in der Schwarzblechwanne *W* befindlichen Holzklotze *K* gehalten wird. Wird *A* durch *b* hindurch evacuirt, so steigt das Quecksilber in *R* in die Höhe und bildet einen Barometerabschluss, der dem Rohre *r* dennoch völlige Bewegungsfreiheit gestattet. Mittels desselben kann die Elektrode E_2 in jede beliebige Höhe gebracht und durch Festklemmen des Rohres *r* bei *f* in dieser erhalten werden; der Zeiger *Z* gestattet auf einer Scala *H* den Elektrodenabstand $E_1 E_2 = a$ direct abzulesen.

Tabelle 12.

Luft.

	d	—	—	—	1,5	2,2	3,2	5,0	7,5	10,0
$a = 22$ cm	*i*	11,50	11,65	12,96	13,63	14,02	14,02	13,89	13,63	13,76
	V	1826	1732	1312	846	759	734	794	992	1208
	E	20,94	20,18	17,00	11,53	10,64	10,30	11,03	13,52	16,62
							Umkehr			
$a = 12$ cm	*i*	13,23	—	14,02	14,02	14,02	14,02	14,15	13,89	14,27
	V	1076	—	819	578	541	585	746	1015	1240
	E	14,23	—	11,49	8,10	7,58	8,20	10,54	14,09	17,68
						Umkehr				
$a = 2$ cm	*i*	14,02	—	14,40	14,27	14,15	14,27	14,15	13,76	14,27
	V	430	—	406	351	396	497	715	996	1193
	E	6,04	—	5,84	5,02	5,60	7,09	10,11	13,71	17,03
					Umkehr					

Tabelle 13.

Wasserstoff.

	p	4,39	2,89	1,94	1,28	0,85	0,59	0,43
	d	1,0	2,0	3,0	3,5	4,2	5,5	6,5
a = 22 cm	i	12,54	12,25	12,82	12,68	12,82	12,68	12,54
	V	1083	851	726	679	706	773	880
	E	13,58	10,42	9,31	8,61	9,05	9,80	11,04
						Umkehr		
a = 12 cm	i	12,96	12,82	13,09	12,96	12,82	13,09	12,96
	V	679	556	521	525	538	676	817
	E	8,78	7,12	6,83	6,81	7,54	8,85	10,58
				Umkehr				
a = 2 cm	i	13,37	13,23	13,09	12,96	13,09	13,09	13,37
	V	363	346	380	421	517	642	781
	E	4,85	4,57	4,97	5,45	6,77	8,40	10,43
			Umkehr					

Tabelle 14.

Stickstoff.

	p	2,85	1,91	1,25	0,82	0,54	0,35	0,26
	d	1,0	1,5	2,0	2,7	4,0	6,5	8,0
a = 22 cm	i	12,13	12,30	12,30	12,47	12,65	12,65	12,47
	V	1119	925	849	740	720	791	965
	E	13,58	11,39	10,45	9,23	9,11	10,00	12,03
						Umkehr		
a = 12 cm	i	12,65	12,47	12,47	12,47	12,80	12,65	12,47
	V	667	567	509	533	592	723	984
	E	8,43	7,07	6,35	6,65	7,58	9,14	12,27
				Umkehr				
a = 2 cm	i	13,13	12,80	12,80	12,65	12,65	12,97	12,65
	V	321	333	363	411	513	694	930
	E	4,21	4,27	4,65	5,20	6,49	9,00	11,76
		Umkehr						

Damit an dem Schliffe *S* eine völlige Dichtung bei Anwendung möglichst geringer Mengen von Fett und dergleichen erzielt wird, ist von unten her um denselben herum der Glasbecher *J* mittels Kautschukstopfens befestigt, der mit Quecksilber gefüllt wird, welches durch *e* wieder abgelassen werden kann.

Die Resultate der mit diesem Apparate angestellten Beobachtungsreihen enthalten die vorhergehenden Tab. 12—14.

Diese Tabellen lassen übereinstimmend den folgenden Gang der Erscheinung deutlich erkennen: Bei demselben Druck wird die Stromstärke um so grösser, je näher die Elektroden einander kommen, die Spannung sowie der Wattconsum werden kleiner.[1]) Bei grossen Elektrodenabständen tritt die Umkehr bei viel tieferen Drucken ein als bei kleinen Abständen. Wenn ferner beim Annähern der beweglichen Elektrode auch die Spannung sinkt, die Stromstärke wächst, so geht dies doch immer langsamer vor sich, je näher die Glimmlichter einander rücken. Für die Spannung tritt dies am deutlichsten hervor, vgl. Tab. 15. Es findet eine Rückstauung statt. Ja, bei der Begegnung der Glimmlichter, in der Nähe der Umkehrdrucke

Tabelle 15.

Luft	d	—	—	—	1,5	2,2	3,2	5,0	7,5	10,0
$a = 22$ cm	V_1	1826	1732	1312	846	759	734	794	992	1208
$a = 12$ cm	V_2	1076	—	819	578	541	585	746	**1015**	1240
$a = 2$ cm	V_3	430	—	406	351	396	497	715	**996**	1193
$V_1 - V_2$		750	—	493	268	218	149	48	**— 23**	**— 32**
$V_2 - V_3$		646	—	413	227	145	88	31	19	47
H_2	p	—	4,39	2,89	1,94	1,28	0,85	0,59	0,43	—
	d	—	1,0	2,0	3,0	3,5	4,2	5,5	6,5	—
$a = 22$ cm	V_1	—	1083	851	726	679	706	773	880	—
$a = 12$ cm	V_2	—	679	556	521	525	588	676	817	—
$a = 2$ cm	V_3	—	363	346	380	421	517	642	781	—
$V_1 - V_2$		—	404	295	205	154	118	97	63	—
$V_2 - V_3$		—	316	210	141	104	71	34	36	—
N_2	p	2,85	1,91	1,25	0,82	—	0,54	—	0,35	0,26
	d	1,0	1,5	2,0	2,7	—	4,0	—	6,5	8,0
$a = 22$ cm	V_1	1119	925	849	740	—	720	—	791	965
$a = 12$ cm	V_2	667	567	509	533	—	592	—	723	984
$a = 2$ cm	V_3	321	333	363	411	—	513	—	694	930
$V_1 - V_2$		452	358	340	207	—	128	—	68	**— 19**
$V_2 - V_3$		346	234	146	122	—	79	—	29	54

1) Wie aus der Vergleichung der d- und der a-Werthe hervorgeht, wurde eine so grosse Annäherung der Elektroden, dass die eine in den Dunkelraum der anderen eindrang, wobei sich ausserordentliche Spannungssteigerungen ergeben, vermieden.

kann die Spannungsabnahme infolge der Annäherung sogar durch die von der Begegnung bedingte Spannungssteigerung überwunden werden, sodass die Spannung bei nahen Elektroden gleich oder sogar noch grösser ist als diejenige bei grösserem Elektrodenabstande. Analoges gilt für die Stromstärke. In den Tabellen sind die Werthe, welche diese Stauwirkung ganz besonders gut veranschaulichen, fett gedruckt. Man sieht, dass sie sich durchaus um die Umkehrdrucke gruppiren und erst häufiger werden, *nachdem* die Begegnung stattgefunden hat. Zu beachten ist dabei immer, dass es sich um eine Durchdringung nur der Glimmlichter, nicht aber der Hittorf'schen Dunkelräume handelt, und dass die Durchdringung desselben Raumes zeitlich *nacheinander* stattfindet. Auch treten die Umkehrungen immer schon bei so hohen Drucken und so kleinen d auf, dass die Anoden der jedesmaligen Entladungen bei den hier eingehaltenen Abständen a noch vollkommen ausserhalb ihrer eigenen zugehörigen Glimmlichter liegen, wie schon das Vorhandensein einer merklich ausgedehnten Anodensäule und die Controle im Drehspiegel erkennen lassen. Das Phänomen ist also nicht etwa auf die bekannte, in neuester Zeit von Hrn. Wehnelt[1]) durch Messungen genauer verfolgte Potentialsteigerung zurückzuführen, welche eintritt, wenn man die Anode durch ihr eigenes Glimmlicht hindurch gegen den Dunkelraum der der gleichen Entladung angehörenden Kathode voranschiebt.

Mittels eines kreuzförmig gestalteten Rohres wurde ferner nachgewiesen, dass die spannungssteigernde Wirkung vorhergehender Entladungen auch eintritt, wenn die zeitlich aufeinander folgenden Glimmlichter denselben Gasraum *senkrecht zu einander* durchstrahlen.

Mit Hülfe der Spannungssteigerung infolge von Vorgängen bei der Entladung selbst innerhalb desselben Rohres musste es möglich sein, eine Art *Autoventilwirkung* zu erzielen, d. h. die Entladung zu veranlassen, sich selbst von einem von ihr bisher allein eingenommenen Entladungswege abzudrängen und zum Theil in einen parallel geschlossenen mit hinüber zu gehen.

Zwei einander vollkommen gleiche Cylinderröhren R_1 und

1) A. Wehnelt, Wied. Ann. 65. p. 521 f. 1898.

R_2 werden nebeneinander nach dem Schaltschema (Fig. 4) in den Hochspannungswechselstromkreis eingeschaltet; die von dem Transformator *TT* kommenden Kabel wurden zwischen beiden Röhren so verzweigt, dass beiden der Strom durch kurze gleichlange und gleichdicke Leitungen von beiden Seiten her zugeführt wurde. Dass sowohl die Röhren wie die Zuleitungen wirklich als fast vollkommen identisch betrachtet werden konnten, wurde daran erkannt, dass bei höheren Drucken bald die eine, bald die andere Röhre aufleuchtete, ohne dass eine derselben irgendwie bevorzugt wurde.

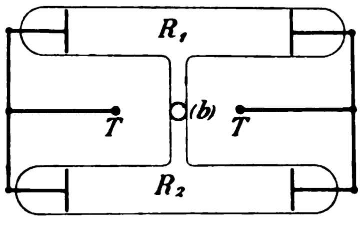


Fig. 4.

Bei tieferen Drucken wurde die Vertheilung der Entladung insofern stabiler, als die Entladung bei Stromschluss immer mehr dasjenige Rohr bevorzugte, welches schon vorher geleuchtet hatte. In demselben waren die Elektroden warm geworden und es ist bekannt, wie eine Entladung das Eintreten der nachfolgenden erleichtert, entweder dadurch, dass die Elektroden gereinigt und aufgelockert sind, oder durch Bildung von Ionen (vgl. die Anregbarkeit von elektrodenlosen Röhren in elektrischen Wechselfeldern), oder durch Verminderung des Uebergangswiderstandes. Näherte man sich dem „Umkehrdrucke," so setzte die Entladung nach jeder Unterbrechung mit Bestimmtheit immer wieder in demselben Rohre ein, dessen Elektroden dadurch sehr heiss gemacht werden konnten. In dem Momente aber, wo der rotirende Spiegel zeigte, dass die äussersten Glimmlichtspitzen nacheinander von beiden Seiten her die Mitte des Rohres trafen, begann *das andere Rohr regelmässig mitzuleuchten, die Entladung ging gleichzeitig durch beide Röhren.* Wiewohl also die Röhre, welche bis dahin den Ausgleich allein vermittelt hatte, erheblich prädisponirt war auch zur weiteren Stromführung, setzte doch die Entladung im genannten Augenblicke in dem anderen Rohre mit kalten Elektroden und ohne die unterstützende Wirkung vorhergehender Entladungen ein, augenscheinlich, weil sich in dem ersten Rohre bei der Begegnung der Glimm-

lichter die zur Entladung nöthige Spannung erheblich steigert. Es ist hier, wie in allen früheren Fällen, als ob sich in diesem Momente der Gasdruck in dem stromdurchflossenen Rohre erhöhe. Dass diese Druckerhöhung aber nur eine scheinbare ist, wurde durch sehr häufige Controlen an dem Manometer nachgewiesen; jedenfalls sind die durch die Entladung von den Elektroden etwa losgerissenen Spuren von Gasresten bei weitem nicht hinreichend, um die Umkehr und die im vorliegenden Falle damit in Verbindung stehende Ventilwirkung herbeizuführen.

Also nicht einfach deshalb, weil ein gewisser Druckwerth erreicht wird, tritt die Umkehr, die Spannungssteigerung und Stromabnahme ein, sondern, weil sich im Rohre selbst gewissermaassen elektromotorische Gegenkräfte entwickeln. Denn sonst wäre kein Grund vorhanden, warum die Entladung auf die andere Röhre überspringen sollte, in der ja genau der gleiche Gasdruck herrscht. Durch die Entladung selbst muss also ein Hinderniss geschafft werden. Das Auftreten der Gegenkraft ist an den Moment gebunden, wo das Glimmlicht der einen Entladung gezwungen wird, in einen Raum einzudringen, den vorher das Glimmlicht einer anderen Entladung, wenn auch nur zum kleinen Theile, inne gehabt hatte.

Dieser Ventilversuch gelingt mit allen Gasen, besonders gut mit Luft, Stickstoff, Kohlensäure und Wasserstoff. Das Mitleuchten einer parallel geschalteten gleichbeschaffenen Entladungsröhre giebt ein sehr einfaches und empfindliches Kriterium an die Hand zur Entscheidung der Frage, wann man beim Evacuiren bei dem Umkehrdrucke U angelangt ist.

Die vorstehenden Versuche dürften auch Licht auf eine Erscheinung werfen, welche Hr. E. Wiedemann und ich selbst[1]) in dem Hochfrequenzfelde des Endcondensator eines einmal überbrückten Lecher'schen Drahtsystems beobachteten: ein elektrodenloses, mit verdünntem Gase gefülltes, in dem Wechselfelde leuchtendes Glasgefäss erlischt in dem Momente, in welchem sich die von beiden Seiten her bei abnehmenden Drucken vorrückenden Glimmlichter in seiner Mitte begegnen. Die Folge davon ist, dass kleinere Entladungsgefässe, bei denen

1) H. Ebert u. E. Wiedemann, Wied. Ann. 62. p. 182. 1897.

es früher eintritt, schon bei höheren Drucken erlöschen als össere, bei denen die Glimmlichter die den tieferen Drucken tsprechende grössere Ausbreitung annehmen können, ehe die gegnung stattfindet. In dem Momente der Begegnung bent die zum Unterhalten der Entladung nöthige Spannung nauer gesagt der nöthige Spannungsgradient) erheblich zu chsen infolge der unsichtbaren Nachwirkung der eben vorgehenden sichtbaren Entladung; bei der sehr viel schnelleren feinanderfolge der Einzelerregungen bei dem Lecher'schen stem ist die Spannungssteigerung und Abnahme der Stromrke noch viel ausgeprägter als in den oben angeführten ellen für die hier angewendete viel niedrigere Frequenz. s Lecher'sche System stellt aber an seinem Endcondensator eine ganz bestimmte, und zwar verhältnissmässig kleine nnungsamplitude zur Verfügung. Folglich muss das in selben gebrachte Entladungsgefäss in dem Momente erhen, in welchem erheblich höhere Spannungswerthe erlert werden, und dieses findet statt, wenn sich die Glimmter begegnen; dieses wiederum hängt in unmittelbar chtlicher Weise von den *Dimensionen* der Gefässe ab.

2. Mechanische Rückstosswirkungen.

War nach dem vorigen das Andauern einer bestimmten lung von einer Wechselstromentladung bis zur nächsten wahreinlich gemacht, so war zu erwarten, dass Elektroden mit hen Atmosphären geladener Theilchen eine ponderomotorische rkung aufeinander ausüben, gleichgültig ob sie dazwischen übergehend auch wieder als Anoden functionirten. Da von i mit dem Hochfrequenzstrome gespeisten Elektroden immer eine Anode ist, während die andere Kathode wird, so s zunächst zwischen ihnen eine elektrostatische Anziehung tfinden. Dauert aber ein der Kathodenerscheinung eigenmlicher Zustand, z. B. der Ladezustand in der Glimmlichtion, von dem zahlreiche Untersuchungen gelehrt haben, s er durch freie *positive* Ladungen ausgezeichnet ist, längere t an, so muss sich über die anziehende Wirkung eine *stossende* lagern, die sich freilich zunächst nur an den chnamig geladenen Theilen der Gasmasse äussert. Denken uns aber die Ladungen von gewissen Vorgängen an der

Kathode herrührend, so wird die *rückstossende Wirkung* auch diese selbst ergreifen; es fragt sich nur, ob diese Wirkung stark genug werden kann, um die gleichzeitig bestehende anziehende Kraft zu überwinden. Bei den dahinzielenden Versuchen war besonderes Augenmerk darauf zu richten, dass nicht etwa die längst bekannten Repulsionen der von dem Kathode ausgehenden Kathodenstrahlen oder Radiometererscheinungen ins Spiel traten. Durch die folgende Anordnung und die weiter unten beschriebenen Controlversuche glaube ich jede mögliche Fehlerquelle eliminirt zu haben und bin geneigt, die thatsächlich gefundenen kräftigen Rückstosswirkungen schon bei sehr hohen Drucken als eine neue, den Hochfrequenzentladungen eigenthümliche Erscheinung anzusehen und dieselbe in dem oben angegebenen Sinne auf eine *Nachdauer* der Wirkung der einzelnen Entladungen auf das Gas zurückzuführen.

An eine dickwandige Glaskugel *A*, Fig. 5, von 14 cm Durchmesser waren zwei Schliffe angeblasen, oben ein 4,5 cm weiter *B*, seitlich ein engerer *C* von 1,8 cm lichter Weite. Durch den ersteren wurde eine mit dem einen Transformatorpol in metallischer Verbindung stehende *Drehwaage*, durch den letzteren das ablenkende, mit dem anderen Pole verbundene System eingeführt. Die Drehwaage hängt an dem 18 cm langen, nur 0,003 cm dicken Constantandraht *a*, der oben an den dicken kupfernen Zuführungsdraht *b* angelöthet ist; an diesen ist oben das Quecksilbernäpfchen *c* angekittet zum Einführen des Zuleitungsdrahtes. Damit sich die Entladung nicht an den Aufhängedraht *a* ansetzt und ihn erwärmt, begleitet denselben die unten napfförmig erweiterte Schutzröhre *d* aus Glas, welche weit genug ist, um der Suspension die nöthige Bewegungsfreiheit zu gewähren, aber eng genug, um das Auftreten von Entladungsbüscheln am Drahte selbst zu verhindern. Der Zuführungsdraht *b* ist oben in *d* mit Siegellack festgekittet. Die Röhre *d* wird von der Trageröhre *e* gehalten, in die sie eingekittet ist, letztere ist in dem Schliffstück *f* befestigt, welches unmittelbar auf *B* aufsitzt. Vermittelst des Schliffes *ff* wird es möglich, der Drehwaage jede gewünschte Anfangslage und dem Aufhängedrahte *a* nach erfolgter Ablenkung eine beliebige Torsion zu ertheilen. Eine hier angebrachte,

sowie eine zweite um den Aequator von A herumgelegte (in der Figur gleichfalls nicht gezeichnete) Gradscala gestattet, wie bei der Coulomb'schen Drehwaage, die entsprechenden Winkel zu messen.

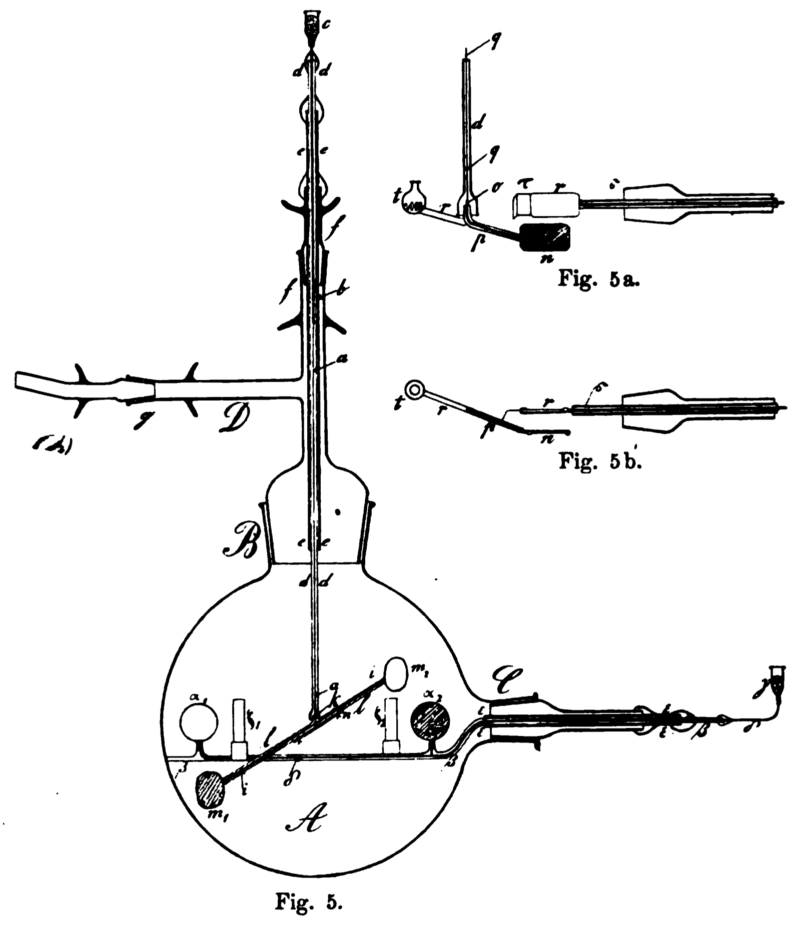


Fig. 5.

Durch das seitliche Rohr D wird der Apparat evacuirt. Die Verbindung nach der Quecksilberpumpe wird durch den Schliff g und einen zweiten (h) vermittelt, dessen Axe senkrecht zur Zeichenebene steht. Durch Drehen um diese beiden Schliffe ist es möglich, auch dem an der Pumpe befindlichen Apparat jede beliebige Neigung gegen die Verticale zu er-

theilen und zu bewirken, dass der Draht a genau axial in dem Rohre d herabhängt und nirgends anstösst; die Kugel A ruhte auf einem Strohkranz und einem in der Höhe verstellbaren Tischchen.

Die *Drehwaage* selbst besteht aus einem dünnen 8 cm langen Aluminiumstäbchen i, welches von einer eng anschliessenden, in der Mitte bei k geöffneten Glasröhre l umgeben ist. Durch die Oeffnung k ist der Aufhängedraht a eingeführt und an dem Stäbchen i befestigt. An beiden Enden sind die 1,5 cm im Durchmesser haltenden kreisscheibenförmigen Elektroden m_1, m_2 aus dünnem Aluminiumblech durch angebogene Hülsen, welche in die Röhre l über die etwas zugespitzten Enden von i gesteckt werden, befestigt. Es besteht daher eine ununterbrochene metallische Verbindung von c bis zu m_1, m_2 hin, ohne dass irgendwo Veranlassung zu störender Funkenbildung gegeben wäre. Die etwas nach oben gebogenen Ränder der Oeffnung k greifen so unter die Erweiterung von d, dass hier keine Entladung zu Stande kommt und doch die völlige Bewegungsfreiheit der Waage gewahrt bleibt.

Um starke Bewegungsantriebe zu erhalten, war es geboten, die Ausbildung des Glimmlichtes auf diejenige Seite zu concentriren, gegen welche die rücktreibende Kraft gerichtet sein sollte. Zu diesem Zwecke ist je eine Seite der Elektroden m_1, m_2 mit einem Glimmerblättchen bedeckt (schraffirt), welche von drei nach rückwärts umgebogenen Fortsätzen, die man an dem Rande der Aluminiumscheibchen hatte stehen lassen, festgehalten werden. Diese Bedeckung hindert vollkommen den Austritt der Entladung. In der perspectivischen Zeichnung 5 würde also das Glimmlicht an der Elektrode m_1 sich nur auf der vom Beschauer abgewandten, an m_2 nur an der diesem zugewandten Seite ausbilden.

Damit jedoch auch dem etwa zu erhebenden Einwande begegnet werden konnte, dass dabei durch Theilchen, welche von den Elektroden fortgeschleudert würden, ein merklicher Rückstoss eintreten und etwa durch diesen die beobachtete Abstossung der Flügel erklärt werden könne, wurden auch zahlreiche Versuche mit Elektroden ohne diese Glimmerbedeckung ausgeführt. Bei diesen bedeckten sich dann beide Seiten vollkommen gleichmässig mit Glimmlicht, nur war dieses nicht so dicht, die Wirkung daher etwas schwächer.

Um der Drehwaage noch ausser der Torsionskraft der Suspension ein bestimmtes Directionsmoment ertheilen zu können, war meist an der Glasröhre l unten eine äusserst feine, stark magnetisirte Nadel n befestigt, welche in dem Felde eines Hülfsmagneten, oder der Erde, oder des mehr oder weniger vollkommen astasirten Erdfeldes schwingend, die Empfindlichkeit der Drehwaage innerhalb sehr weiter Grenzen von aussen her, ohne inneren Eingriff nöthig zu machen, variiren liess.

Das *ablenkende System* besteht ebenfalls aus je zwei 1,5 cm grossen, entweder einseitig mit Glimmer belegten oder beiderseitig freien Aluminiumelektroden α_1, α_2, welche von Ansätzen der zweimal umgebogenen Glasröhre β getragen werden. Diese führt den am Ende mit dem Quecksilbernäpfchen γ versehenen Zuleitungsdraht δ und ist mit der Trageröhre ε in den Schliff C eingekittet. Beim Zusammensetzen des Apparates wird zuerst die Röhre β durch den Schliff C eingeführt, dann werden von B aus mittels einer langen Greifzange die Scheiben α_1 und α_2 mit ihren Hülsen in die Ansätze der Glasröhre β fest eingesetzt. Diese lehnt sich dabei mit ihrem zugeschmolzenen Ende an die Innenwand der Kugel A an, um dem Drucke beim Einsetzen der Elektroden genügenden Widerstand entgegensetzen zu können. Kurze Drahtstücke und Auskleidungen mit Stanniol vermitteln eine sichere funkenlose Zuleitung zu den Elektroden α_1, α_2; die allseitige Umkleidung mit Glas bewirkt, dass nur auf diesen Entladungserscheinungen auftreten.

Damit es, solange noch die elektrostatische Anziehung zwischen den einander gegenüber stehenden, unbedeckten Elektrodenflächen überwiegt, nicht bis zur metallischen Berührung und damit zu Kurzschlüssen in der Hochspannungsleitung kommen kann, sind an dem Glasstabe β noch zwei „Abweiser“ aus Glimmer auf den, den unbedeckten Hälften von α_1 und α_2 zugekehrten Seiten angekittet, zwei kleine Blättchen mit je zwei verticalen Einschnitten, in die nach dem Einsetzen von C von oben her (durch B hindurch) die längeren Glimmerstreifen ζ_1 und ζ_2 eingeschoben werden.

Schon bei den ersten Versuchen stellte es sich heraus, dass die rückstossenden Kräfte ziemlich grosse waren, sodass

augenscheinlich auch schon mit einer viel weniger empfindlichen und darum auch weniger subtilen Anordnung auszukommen war. Es wurde daher noch das einarmige in Fig. 5a von vorn (in etwas perspectivischer Ansicht), in Fig. 5b von oben gesehen dargestellte System angewendet. Die rechteckig gestaltete Elektrodenplatte *n* aus Messing von $0,8 \times 2,2$ cm² Fläche mit abgerundeten Ecken, mit oder ohne Glimmerbeleg, ist an einem Kupferdrahte *o* befestigt, der durch das rechtwinklig umgebogene Glasrohr *p* geschoben nnd an den dünnen, 12 cm langen, vorher gut gestreckten, harten Messingdraht *q* angelöthet ist. Auf der entgegengesetzten Seite von *p* ist mittels des kurzen Glasstäbchens *r* die kleine, oben offene Kugel *t* angeschmolzen, in welche Tarierschrot zur Ausbalancirung der Elektrode *n* gethan wird. Die feste Elektrode *v* ist ebenso beschaffen, wird von dem Zuleitungsdrahte *σ* getragen, und hält den kleinen, aus einem Glimmerblatte gebogenen Abweiser *τ*. Die bewegliche Elektrode *n* ist an ihrer Ansatzstelle so gebogen, dass sie in der der Elektrode *v* nächsten Stellung, die sie vermöge der Grösse von *τ* einnehmen kann, dieser parallel steht; dies hat den Vortheil, dass auch die Glimmlichtschichten und ihre Begrenzungen einander parallel verlaufen, und der Druck der abstossenden Kraft auf der ganzen Fläche gleichmässig erfolgt.

Beobachtungen 1. Ist der Druck in der Kugel *A* hoch, so vermag der Wechselstrom, der ja nur auf eine gewisse Spannung hinauf transformirt wird (etwa 2800 Volt), die Gasschicht nicht zu durchbrechen. Die Elektroden werden dann abwechselnd positiv und negativ auf diese Maximalspannung geladen. Die ungleichnamig geladenen Platten ziehen sich an, die Drehwaagenflügel schlagen ziemlich heftig gegen die Abweiser.

2. Dieses Verhalten besteht fort, wenn bei allmählicher Evacuation die ersten Glimm- und Anodenlichter auf den Platten erscheinen. Selbst wenn der Abstand der Elektroden im Ruhezustand mehrere Centimeter beträgt, werden die beweglichen Elektroden herangezogen.

3. Bedeckt das Glimmlicht die ganze Elektrodenfläche, so ändert sich zunächst nichts an dem Verhalten, so lange die Glimmlichtschicht noch dünn ist. Breitet sich dieselbe aber bei fortschreitender Evacuation weiter in den Gasraum hinein

aus, so tritt eine *neue* Erscheinung von *dem* Momente an ein, in welchem der vordere Glimmlichtsaum die Mitte des Abstandes zwischen den einander gegenüberstehenden Elektroden überschreitet: *die Anziehung wird lockerer, schon eine geringere Torsionskraft zieht den Drehwaagenarm zurück, gegenüber der Anziehung macht sich eine rückstossende Kraft geltend.*

4. Bei weiterem Auspumpen werden die Glimmlichtschichten immer dicker. In dem Momente der Anschaltung des Wechselstromes findet im ersten Momente noch Anziehuug statt; die Entladung ist noch nicht voll ausgebildet, auch findet das erste Glimmlicht, wenn es auf einer Seite hervorbricht, ja noch nicht die Veränderung im Gase durch eine vorhergehende, von der anderen Seite kommende Glimmlichtsäule vor, auf die wir die rückstauende Wirkung zurückführen. Sowie das Glimmlicht aber vollkommen ausgebildet ist, schiebt es die beweglichen Elektroden deutlich zurück; *die Anziehung der ungleichnamig geladenen Elektroden hat sich in eine Abstossung verwandelt.*

5. Wird der Druck noch tiefer, sodass die Glimmlichtausbildung an beiden Elektroden immer stärker wird, so tritt die rückstossende Kraft immer deutlicher hervor. War der Schliff *ff* so gestellt, dass die festen Elektroden α_1 α_2 von den beweglichen m_1 m_2 einen grossen Abstand haben und dreht man nun *ff* so, dass die Drehwaagenflügel mit ihren Glimmlichtern denen der feststehenden Elektroden genähert werden, so stellt sich in dem Momente der Begegnung der Glimmlichter dem weiteren Annähern ein Hinderniss entgegen, sodass nun der Aufhängedraht *a a* tordirt wird. Dabei tritt eine merkliche Deformation *beider* Glimmlichter ein; dieselben drücken sich scheinbar gegenseitig zusammen, wodurch selbst der unter ihnen liegende Dunkelraum schwache Zusammendrückungen erfährt. (Bei diesen wie den folgenden Versuchen war der kleine Richtmagnet *n* [Fig. 5] entfernt worden.)

6. Dass die Ursache der Erscheinung wirklich darin liegt, dass die Glimmlichter in die gegenseitige Wirkungssphäre gelangen, wird durch folgende *Controlversuche* bestätigt: Die Drehwaage wird durch Drehen an dem Schliff *ff* senkrecht zu der Verbindungslinie der feststehenden Elektroden α_1 α_2 gestellt: Bei Erregung des Wechselstromes war nicht der geringste Bewegungsantrieb zu erkennen. Wurden die Elek-

troden einander mehr genähert, etwa in 45° Stellung gebracht, so schien eine schwache Anziehung sich bemerklich zu machen. Dies würde die von Hrn. Warburg[1]) bei Batterieentladungen genauer verfolgte Erscheinung sein. Die *Abstossung* trat aber erst in Entfernungen ein, bei denen die beiderseitigen Glimmlichter denselben Ort im Gasraume erreichten. Durch diese Versuche mit grossen Elektrodenabständen, bei denen weder Anziehung noch Abstossung eintrat, wird zugleich bewiesen, dass nicht irgend welche Störungen, etwa durch schwache Entladungen am Aufhängedraht, die Ursache der oben beschriebenen Glimmlichtwirkungen sein können. Auch elektrodynamische Wechselwirkungen sind nicht zur Erklärung heranziehbar, wie man durch eine einfache Ueberlegung findet.

Ferner kann man die Erscheinung nicht darauf zurückführen, dass das Glimmlicht über die eigene Anode hinweggegangen wäre oder diese selbst gar in den zugehörigen Kathodendunkelraum eingetaucht hätte. In allen Fällen war der Elektrodenabstand so gross, dass sich die ganze Entladung vollkommen frei ausbilden konnte. Beim Zeichenwechsel des Wechselstromes war die Erscheinung vollkommen umgelagert, dazwischen wurde das Gas immer völlig dunkel, *die Wirkung muss also auf einer unsichtbaren Nachdauer in der Wirkung der sichtbaren Glimmlichterscheinung beruhen.* Wird sehr tief ausgepumpt, so wird die Erscheinung immer kräftiger und deutlicher. Zu den allertiefsten Drucken, bei denen dann lebhafte Entwickelung der Kathodenstrahlen eintrat, wurde indessen absichtlich nicht gegangen, um nicht dem Einwande zu verfallen, es handle sich um eine Art Radiometererscheinung. Die gewöhnlich benutzten Drucke waren immer viel zu hoch, als dass Bewegungsimpulse wie bei den Radiometern hätten auftreten können.

Dass die beobachtete Erscheinung nicht durch Rückwirkungen schon bei höheren Drucken etwa entstehender Kathodenstrahlen erklärt werden kann, sieht man am besten, wenn man beide Elektrodenseiten unbedeckt lässt, sodass sich das Glimmlicht auf beiden in gleicher Weise ausbildet. Dann müssten die Reactionsstösse auf beiden Seiten gleich stark er-

1) E. Warburg, Wied. Ann. 45. p. 1. 1892.

folgen und sich ihre bewegenden Kräfte aufheben. Nichtsdestoweniger gelingt der Abstossungsversuch. Auch müsste bei merklichen Reactionsstössen und einseitiger Elektrodenbedeckung sich die Drehwaage in allen Lagen in Bewegung setzen, was sie nicht thut. Vielleicht austretende Kathodenstrahlen würden ferner schon bei einigermaassen grossen Drehungswinkeln die gegenüber liegenden Elektrodenflächen gar nicht mehr treffen, sondern an ihnen vorbeigehen, da sie ja immer vorwiegend senkrecht zur emittirenden Elektrodenebene verlaufen.

Wurde bei Drucken, bei denen die Erscheinung unter Anwendung von Wechselstrom sehr deutlich war, die Vacuumdrehwaage an ein grosses Inductorium (25 cm Funkenlänge) angeschlossen und gingen in dem weiten Entladungsraume der Oeffnungsstrom wie der Schliessungsstrom durch das Gas hindurch, so war auch die Abstossung unter den oben genannten Bedingungen vorhanden, wenn auch minder deutlich. Wurde aber in den secundären Stromkreis vor die Vacuumkugel eine Funkenstrecke oder ein Geissler'sches Rohr eingeschaltet, sodass nur der Oeffnungsinductionsstrom überging, so *blieb die Abstossung völlig aus* und nur Anziehung wurde beobachtet.

Mit einer grossen 20plattigen Töpler'schen Maschine wurde immer nur Anziehung beobachtet.

Dass endlich auch nicht die Erwärmung der Gasmasse zwischen den Elektroden die Ursache der mechanischen Rückstauung sein kann, wie es Hr. Neesen[1]) vermuthungsweise aussprach, scheint mir aus folgender Ueberlegung hervorzugehen:

Geht zwischen zwei *vertical* stehenden plattenförmigen Elektroden, die in nicht zu grossem Abstande einander gegenüber stehen, eine kräftige Entladung über (wobei wir uns die Rückseiten mit Glimmer bedeckt denken, sodass die Entladung nur an den einander gegenüberstehenden Seiten auftritt, wie es bei den Versuchen meist der Fall war), so wird die zwischenliegende Gasmasse von der Entladung erwärmt und *steigt in die Höhe;* kältere Gasmassen dringen von unten

1) F. Neesen, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1. Nr. 3. p. 69. 1899.

nach und es entsteht in dem weiten Entladungsgefässe eine regelmässige Circulation. Hierbei kann es nicht fehlen, dass von den Gasströmungen, welche auch in den benachbarten Gasschichten erregt werden, und die alle von unten her gegen den Zwischenraum zwischen den Elektroden zusammenfliessen, die äussersten nicht mehr in das Innere zwischen die Elektrodenplatten gelangen, sondern von aussen her gegen diese Platten strömen und diese gegeneinander zu schieben suchen. Wir erhalten eine starke *ansaugende* Wirkung, welche wohl die elektrostatische Anziehung verstärken, nicht aber unsere Repulsionserscheinung hervorrufen kann. —

Es dürften somit die folgenden *Resultate* festgestellt sein:

1. Eine kräftige elektrische Entladung verändert ein verdünntes Gas namentlich in dem Theile, welcher von Glimmlichtstrahlen durchsetzt war, derart, dass die Veränderung noch eine gewisse Zeit nach dem Aufhören des eigentlichen Entladungsvorganges, wenn auch unsichtbar, nachdauert.

2. Die Nachdauer scheint hauptsächlich in dem Andauern gewisser Ladungen zu bestehen, welche dem Gase bei dem Entladungsprocesse mitgetheilt werden.

3. Sinkt demnach der Gasdruck, so sinkt zwar zunächst auch die Entladungsspannung; bei einem ganz bestimmten, durch die molecularen Eigenschaften des Gases bedingten Drucke aber beginnt die Spannung mit fortschreitender Evacuation wieder zu steigen; gleichzeitig nimmt die Stromstärke ab, der Wattverbrauch der Entladung zu.

4. Diese „Umkehrdrucke“ verhalten sich wie die mittleren freien Weglängen der Gasmolecüle bei demselben Drucke. Oder: Die Umkehr tritt bei verschiedenen Gasen ein bei Drucken, bei denen die mittleren freien Weglängen eine bestimmte Grösse erreicht haben.

5. Speciell bei den Wechselstromentladungen treten die Umkehrungen in cylindrischen Röhren auf, wenn die mit Glimmlicht erfüllten Gasmassen etwa die Hälften der ihnen zur Verfügung stehenden Entladungsräume beiderseitig erfüllt haben, also bei weiteren und längeren Röhren bei tieferen Drucken als bei engeren und kürzeren.

6. Etwas ganz ähnliches gilt von den Schichtungen, in die sich die Anodensäule in gleichweiten cylindrischen Röhren

bei den Hochfrequenzentladungen untertheilt. Dieselbe tritt in verschieden langen Röhren nicht bei demselben Gasdrucke auf, sondern dann, wenn die Glimmlichter sich etwa bis zur Mitte von beiden Seiten her verbreitet haben.

7. Dass es wirklich hauptsächlich die die Kathode zunächst umgebenden Gasschichten sind, welche die nachdauernde elektrische Wirkung tragen, sieht man, wenn man eine Elektrode beweglich macht; man kann dann die Umkehr in demselben Gasraume bei einem beliebigen Drucke (innerhalb gewisser Grenzen) durch Heranschieben einer Wechselstromelektrode gegen die andere herbeiführen.

8. Durch die Erhöhung der Entladungsspannung beim Umkehrdrucke kann man die Entladung veranlassen, sich zu theilen und ein gleich beschaffenes Entladungsrohr mit zu passiren; durch den Entladungsvorgang selbst wird also eine Art Ventilwirkung in der eigenen Entladungsbahn geschaffen.

9. Ist eine von beiden Elektroden leicht beweglich, so äussert sich an ihr die Rückstauung, welche die Entladungsspannung bei der Umkehr in die Höhe treibt, auch als mechanische Repulsion.

München, Juli 1899.

(Eingegangen 28. Juli 1899.)

---

3. *Ueber den Einfluss kleiner Beimengungen zu einem Gase auf dessen Spectrum; von Percival Lewis.*

Es ist häufig beobachtet worden, dass unter gewissen Bedingungen geringe Mengen einer fremden Substanz in einem Gase das Spectrum desselben in unerwarteter Weise beeinflussen. Ueber derartige Erscheinungen sind bisher noch wenig systematische Beobachtungen angestellt worden, und daher schien es von Interesse, den Einfluss einiger Substanzen zu prüfen, welche selten oder nie in Vacuumröhren fehlen. Es handelt sich vorzugsweise um Quecksilberdampf, Wasserstoff, Sauerstoff und Wasserdampf.

Es wurden folgende Fälle untersucht:

1. Das Spectrum des Wasserstoffs: a) des reinen Gases, b) Spuren von Quecksilberdampf enthaltend, c) mit Sauerstoff und d) mit Wasserdampf vermischt.

2. Das Sauerstoffspectrum: a) rein, b) wasserstoffhaltig, c) mit Spuren von Quecksilberdampf vermischt.

Die Versuchsmethode bestand darin, zuerst ein möglichst reines Gasspectrum zu beobachten, namentlich rein in Bezug auf diejenigen Substanzen, deren Einfluss auf das Spectrum festgestellt werden sollte. Es ging nicht an, die gesammten sich darbietenden Einzelheiten zu berücksichtigen; es wurde nur die charakteristische Erscheinung der Spectren studirt und photometrische Messungen der Intensität einzelner Spectralbezirke bez. Linien unter verschiedenen Gasdrucken vorgenommen. Es wurden sodann geringe Mengen fremder Substanzen eingeführt und die Beobachtungen wiederholt.

Um Störungen durch Entwickelung oder Absorption von Gasen seitens innerhalb der Röhren befindlicher Metallelektroden zu vermeiden, wurden äussere Elektroden, wie sie von Salet[1])

---

1) G. Salet, Ann. de Chim. et de Phys. 28. p. 20. 1873.

ieben sind, angewandt. Aus diesem Grunde waren ngen der Stromstärke nicht ausführbar.

Der Apparat.

ie allgemeine Versuchsanordnung ist in Fig. 1 ver- ıulicht. Der Wasserstoff wurde in dem Voltameter *V* :hwach phosphorsäurehaltigem destillirtem Wasser ent- t. Spuren von Sauerstoff, die der auf diese Weise dar- te Wasserstoff stets enthält, wurden entfernt beim Durch- des Gases durch die Waschflasche *A*, welche eine con- 'te Lösung von Pyrogallussäure enthielt. Das Gas wurde n in den Trockenröhren *C* angesammelt. Letztere ent- ı bez. Chlorcalcium, festes Kalihydrat und Phosphor-

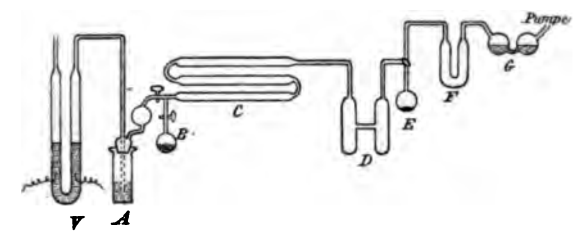


Fig. 1.

nhydrid. *G* ist ein Schwefelsäureverschluss zur Fern- ʒ von Quecksilberdämpfen von der Pumpe her. Die *F* ist mit festem Kalihydrat beschickt, um Dämpfe aus hwefelsäure zu absorbiren. Das Vacuumrohr *D* gehörte Typus der **H**-förmigen Spectralröhren (mit Durchsicht der Axe der Capillare). Die Elektroden bestanden aus :ücken Messingrohr und waren durch Glimmer von der ınd getrennt. Ohne diese Vorsichtsmaassregel wurde das)ei dem hohen angewandten Potential regelmässig von ınken durchschlagen. Der capillare Theil der am häufig- 'enutzten Röhre war ca. 10 cm lang bei einer lichten von 4 mm. *E* ist ein Quecksilberreservoir. Durch ı eines Hahnes konnte Quecksilberdampf in die Ent- sröhre eingelassen werden und zwar unter einem der ratur des Reservoirs entsprechenden Druck. Diese ratur war stets niedriger als die der Vacuumröhre. ıine Glaskugel mit übermangansaurem Kali, aus welchem Erhitzen Sauerstoff entwickelt werden konnte.

Zuerst wurden alle Theile des Apparates miteinander verblasen. Da dies aber beim Auswechseln oder Erneuern einzelner Theile zu Unbequemlichkeiten Veranlassung gab, wurden schliesslich einige Verbindungen mittels Siegellack hergestellt. Nachtheilige Wirkungen hiervon wurden nicht wahrgenommen, vorausgesetzt, dass keine Entladungen die Siegellackstellen trafen. In letzterem Falle traten stets die Kohlenoxydbanden auf. Dasselbe war der Fall bei Anwendung von Hähnen, welche daher anfangs wegen des Fettes vermieden wurden, indem das zu untersuchende Gas durch ein Barometerrohr eingeführt wurde. Für Versuche über die Wirkung des Quecksilberdampfes war natürlich diese Methode nicht anwendbar, die Anwendung von Hähnen daher unvermeidlich. Bei niederen Drucken erschienen die CO-Banden immer, wenn die Entladungen bereits mehrere Minuten angedauert hatten. Meine Beobachtungen wurden daher stets an frischem Gas angestellt, das noch keine Gelegenheit gehabt hatte, sich mit Dämpfen von den Hähnen zu verunreinigen. Ausserdem wurde die Diffusion dieser Dämpfe durch capillare Einschnürungen zwischen Entladungsröhre und Hähnen beschränkt.

Den Strom lieferte ein kleines Inductorium, welches unter gewöhnlichen Umständen Funken von ungefähr 5 cm Länge lieferte. Gespeist wurde dasselbe durch den Strom der städtischen Centrale mit einer Spannung von 110 Volt unter Anwendung eines Wehnelt'schen Unterbrechers. Die Röhre mit den äusseren Elektroden wirkt als Condensator und es zeigte sich, dass der Unterbrecher nicht so leicht und gleichmässig functionirte, wie bei geschlossenem Stromkreis. Infolge häufiger Erneuerung des Unterbrechers, Concentrationsänderungen etc. war es ohnehin nicht möglich, immer dieselben Bedingungen aufrecht zu erhalten. Während der Dauer einer Versuchsreihe variirten diese Bedingungen indessen nur wenig; und verschiedene Reihen wurden so weit als möglich auf die gleiche Scala reducirt, indem man annahm, dass bei reinen Gasen in einer gegebenen Röhre unter bestimmtem Druck, die Lichtintensität der Stromstärke proportional sei.[1])

Die photometrischen Messungen wurden mittels des Glan'-

1) E. S. Ferry, Phys. Review 7. p. 9. 1898.

schen Spectrophotometers ausgeführt. Zum Vergleich diente eine hinter einem Schirm von geöltem Papier aufgestellte gewöhnliche Glühlampe. Es wurden nur relative Bestimmungen der Intensität gemacht; die Intensität der Lichtstrahlung wurde gleichgesetzt dem Quadrat der Tangente des am Photometer abgelesenen Winkels, noch multiplicirt mit einem geeigneten constanten Factor.

Resultate.

I. Wasserstoff.

Zunächst wurden mit reinem Wasserstoff Versuche angestellt zur Feststellung von Beziehungen zwischen Lichtintensität und Druck. Die Intensität ist ausserdem Function der bei diesen Versuchen unbekannten Stromstärke; da indessen die Stromquelle möglichst constant gehalten wurde, sind die Resultate miteinander vergleichbar.

Die Messungen wurden in der Regel an frischem Wasserstoff vorgenommen, sodass die Resultate nur sehr wenig durch die Kohlenstoffverbindungen oder durch die von der Glaswand losgelösten Gase beeinflusst sind. In einigen Fällen wurden die Messungen mit ein und demselben Wasserstoffquantum wiederholt, wobei der Druck durch Auspumpen reducirt wurde. Meistens waren die hierbei erhaltenen Werthe (in der Tabelle durch (—) bezeichnet) etwas kleiner, als die bei frischem Wasserstoff gefundenen.

Für genauere photometrische Messungen besass der Spalt eine Oeffnung von ca. 0,5 mm oder mehr. Aus diesem Grunde erschien das stets anwesende zusammengesetzte[1]) Spectrum des Wasserstoffs als eine Gruppe breiter Bänder im Roth und Orange; im Grün war es scheinbar continuirlich. Photometrisch gemessen wurde H_α ($\lambda = 6563$), H_β ($\lambda = 4861$) und das zusammengesetzte Spectrum in der Umgebung der grünen Quecksilberlinie ($\lambda = 5460$). An H_β wurden nur wenige Beobachtungen gemacht, da die Intensität dieser Linie demselben Gesetz zu folgen schien wie H_α, und da ausserdem in diesem Theil des Spectrums die Messungen schwierig waren.

1) Die beiden Linienspectren des Wasserstoffs werde ich im Folgenden stets als elementares und zusammengesetztes Spectrum bezeichnen.

Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle I.

Reiner Wasserstoff.

Druck	Intensität H_α	Intensität zusammenges. Spectrum	Druck	Intensität H_α	Intensität zusammenges. Spectrum
0,7	33	4,5	(9)	45	8,8
0,7	35	4,9	(11,8)	24	6,2
(0,8)	33	4	12,5	18	6,2
1	44	4,5	15	17	4,5
1,3	70	7,3	15	16	4,5
1,4	65	8,8	(16)	13	4
(1,5)	55	8	(23,5)	4	2,8
1,5	65	9,4	(28)	3	2,5
1,7	81	12,6	(29)	3	2
(1,8)	65	8,8	(36)	2,5	1
(2,3)	78	8,8	42	1	2
2,6	96	12,8			
3	107	13		H_β	
3,2	103	12	0,9	52	
3,9	93	9,4	1,5	100	
(4,2)	90	12	2,6	106	
(4,5)	81	8,8	3,5	86	
5,5	73	9	4,5	92	
5,8	70	8,8	11	42	
8	63	8			

In Fig. 2 sind diese Ergebnisse graphisch dargestellt, in der oberen Curve (I. H_α) für H_α und in der oberen geschlängelten Curve für das zusammengesetzte Spectrum. Diese Curven zeigen, dass bei constanter Stromquelle die Intensität des elementaren, sowie des zusammengesetzten Wasserstoffspectrums bei einem Druck von ca. 3 mm ein Maximum erreicht, dann aber mit dem Druck schnell abnimmt. Bei zunehmendem Druck vermindert sich die Intensität des elementaren Wasserstoffspectrums schneller, als die des zusammengesetzten, und bei Drucken von mehr als 4 oder 5 cm bleibt letzteres allein sichtbar, allerdings zu lichtschwach, um noch gemessen zu werden. Bei Wiederholung der Versuche an einer Röhre mit inneren Elektroden zeigte sich, dass die Intensität be-

ständig zunahm bis zu den kleinsten Drucken, die sich zufolge des Schwefelsäureverschlusses erreichen liessen. Es betrugen diese etwa 0,6 mm.

Lagarde[1]) fand bei Anwendung innerer Elektroden und bei einer Stromstärke von $115 \cdot 10^{-6}$ Amp. keine Aenderung der Intensität der Linien H_α, H_β und H_δ bei Drucken zwischen

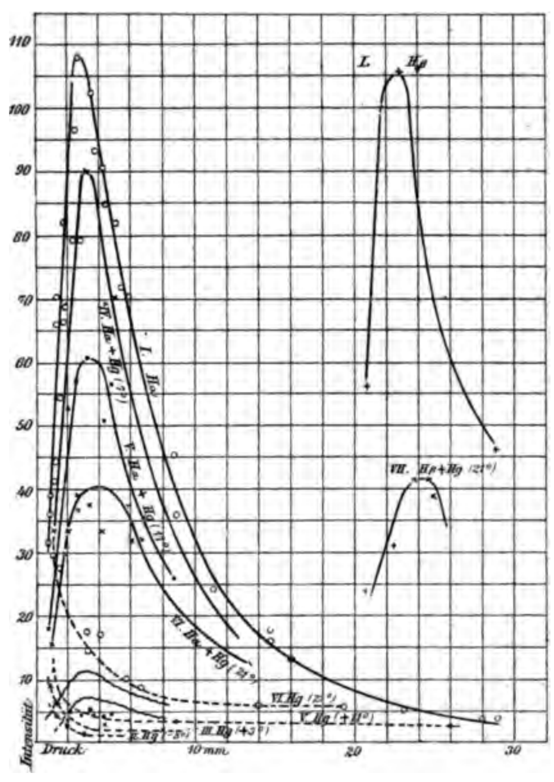


Fig. 2.

1,8 und 0,27 mm. Bei schwächeren Strömen nahm die Intensität ab, bei stärkeren stieg sie, wenn der Druck von 1,8 auf 0,27 mm erniedrigt wurde. Ferry[2]) fand ein beständiges Wachsen der Intensität von H_α und dem zusammengesetzten Spectrum bei Verminderung des Druckes bis zu 0,7 mm und bei Benutzung innerer Elektroden und Stromstärken von 1 bis

1) H. Lagarde, Ann. de Chim. et Phys. (6) 4. p. 352. 1885.
2) E. S. Ferry, Phys. Rev. 7. p. 6. 1898.

6 Milliamp. Der Gasdruck, welcher der Maximalintensität entspricht, ist demnach von der Stromstärke abhängig, und man kann keine Schlüsse ziehen hinsichtlich des Unterschiedes zwischen Röhren mit inneren Elektroden und solchen mit äusseren, ohne Kenntniss der Stromstärke in letzteren. Der allgemeine Charakter der Entladungserscheinungen lässt es kaum als möglich erscheinen, dass die Stromstärke so rasch abnimmt, wie die Lichtintensität unterhalb 3 mm.

Diese Resultate sind natürlich von der Stromdichte abhängig und können deshalb je nach der Gestalt der Röhren bedeutende Unterschiede aufweisen. Bei sehr weiten Röhren (1 cm im Durchmesser) erschien nur das zusammengesetzte Spectrum. Ferner wuchs bei engeren Capillaren oder bei zunehmender Stromstärke die Intensität des elementaren Spectrums rascher als die des zusammengesetzten. Obschon niemals ganz abwesend, war letzteres stets schwächer beim Vorhandensein von Spuren von Quecksilberdampf, Sauerstoff oder Wasserdampf. Von diesen Umständen wird später die Rede sein.

Einfluss des Quecksilberdampfes auf das Wasserstoffspectrum.

Quecksilberdampf aus der Pumpe wurde durch den Schwefelsäureverschluss ferngehalten. Aber es war ausserordentlich schwierig, vor Beginn einer Versuchsreihe die letzten Spuren von Quecksilberdampf zu beseitigen, die mit der atmosphärischen Luft des Zimmers in den Apparat gelangt waren. Die grüne Linie ($\lambda = 5460$) blieb sichtbar, auch nachdem die Röhre wiederholt erhitzt, ausgepumpt und mit frischem Wasserstoff gefüllt war. Selbst, wenn dem Anschein nach alles Quecksilber entfernt war, kam doch die grüne Linie im Spectrum immer wieder zum Vorschein, wenn die Röhre einige Minuten lang von den Entladungen durchsetzt oder wenn dieselbe erhitzt worden war. Es kostete in der Regel einen oder mehrere Tage unausgesetzten Arbeitens, bis jede Spur des Quecksilberspectrums verschwunden war. Ferner musste dieser Process jedesmal wiederholt werden, wenn Luft in die Röhre hineingelassen war. Unter diesen Umständen erscheint die Annahme, dass fortgesetzt Quecksilberdampf in der Röhre geblieben wäre, unwahrscheinlich. Vielmehr liegt der Gedanke an ein dünnes

Häutchen von Quecksilberoxyd nahe, welches an den Wandungen der Röhre haftend, durch Entladungen oder Erhitzen nach und nach zersetzt wurde. Aehnliche Resultate wurden bei späteren Versuchen mit Sauerstoff erzielt, bei welchen Quecksilberoxyd jedenfalls vorhanden war. Zuweilen leuchtete auch die grüne Linie hell auf, wenn die ersten Entladungen die Röhren passirten, um dann allmählich zu verblassen, als wenn der Quecksilberdampf einer Verbindung entzogen worden und nach und nach durch Diffusion verschwunden wäre.

Diese Thatsachen beweisen die spectroskopische Empfindlichkeit des Quecksilberdampfes, ein Umstand, der in der diesbezüglichen Literatur wenig hervorgehoben ist und der eines eingehenderen Studiums werth erscheint. Plücker und Hittorf[1]) bemerken zwar die ausserordentliche spectroskopische Empfindlichkeit des Quecksilberdampfes, aber viele andere Beobachter scheinen diese Thatsache als nebensächlich angesehen zu haben. Hertz[2]) sagt, nachdem er gezeigt hat, wie klein bei gewöhnlicher Temperatur der Sättigungsdruck des Quecksilberdampfes ist: „Die Kleinheit des in Rede stehenden Druckes und nicht eine hervorragende Eigenschaft des Quecksilbers dürfte auch der Grund für den verschwindenden Einfluss sein, welchen der stets vorhandene Quecksilberdampf auf die Entladungserscheinungen in Geissler'schen Röhren ausübt.“

In vielen Fällen waren zwischen Entladungsrohr und Pumpe Röhren eingeschaltet, die zur Absorption des Quecksilberdampfes mit Schwefel und zur Absorption des Schwefeldampfes mit Kupferspähnen angefüllt waren; aber es ist wenig über die Wirkungsweise dieser Anordnung mitgetheilt worden. Ames[3]), der sich derartiger Absorptionsröhren bediente, fand einige Quecksilberlinien auf seinen Photogrammen. Warburg[4]) fand, dass diese Methode nicht zum vollständigen Ausschliessen des Quecksilberdampfes ausreicht. In der vorangegangenen Versuchsreihe wurde gefunden, dass dies Verfahren einige Hg-Linien beseitigte und die grüne Linie merklich

1) J. Plücker u. W. Hittorf, Phil. Trans. **155.** p. 25. 1865.
2) H. Hertz, Wied. Ann. **17.** p. 200. 1882.
3) J. S. Ames, Phil. Mag. **30.** p. 49. 1890.
4) E. Warburg, Wied. Ann. **31.** p. 576. 1887.

schwächte; aber nie war sie aus dem Wasserstoffspectrum ganz verschwunden, ausser bei Anwendung des Schwefelsäureverschlusses.

E. Wiedemann[1]) untersuchte die Spectra von Gemischen aus Luft und Wasserstoff mit gesättigtem Quecksilberdampfe bei Temperaturen bis zu ca. 240⁰. Photometrische Messungen wurden von ihm nicht angestellt, aber er fand, dass in allen Fällen das Hg-Spectrum mit steigender Temperatur an Helligkeit rasch zunahm, während das Wasserstoff- oder Stickstoffspectrum blasser wurde und schliesslich bei sehr hoher Temperatur gänzlich verschwand. Abkühlung der Röhre verursachte die entgegengesetzte Erscheinung.

Koch[2]) fand, dass bei Abkühlung der Vacuumröhre bis auf -80^0 die Hg-Linien aus den Spectren des Wasserstoffs, Sauerstoffs und Stickstoffs vollständig verschwanden.

Es wurde beschlossen, den Einfluss des Quecksilberdampfes auf das Wasserstoffspectrum bei gewöhnlichen Temperaturen zu untersuchen, sowie Beziehungen zwischen Lichtemission und Dichte des Hg-Dampfes aufzustellen. Ferner sollte die kleinste Menge des letzteren bestimmt werden, die sich unter den gegebenen Bedingungen zur Hervorrufung des Quecksilberspectrums als nöthig erwies. Da die gelben und blauen Hg-Linien nur dann sichtbar wurden, wenn das Reservoir *E* (Fig. 1) nahezu Zimmertemperatur hatte, die höchste, die bei diesen Versuchen erreicht wurde, so wurde zu Messungen nur die grüne Linie herangezogen.

Nach Ausführung von Beobachtungen an reinem Wasserstoff wurde das Quecksilberreservoir *E* (Fig. 1), welches durch eine Kältemischung constante Temperatur erhielt, mit der Entladungsröhre in Verbindung gebracht und die relativen Helligkeiten von H_α und der grünen Hg-Linie gemessen, nach Ablauf einer für die Diffusion des Quecksilberdampfes hinreichenden Zeit. Die Helligkeit der Hg-Linie erreichte schon innerhalb weniger Minuten ihr Maximum, was immerhin überraschend ist, wenn man den Umstand in Betracht zieht, dass der Hg-Dampf eine ca. $^1/_2$ m lange und durchschnittlich

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 5. p. 517. 1878.
2) K. R. Koch, Wied. Ann. 38. p. 216. 1889.

ca. 6 mm weite Röhre zu passiren hatte. Die Messungen wurden wiederholt, während der Wasserstoff verschiedenen Drucken und das Reservoir *E* verschiedenen Temperaturen ausgesetzt war. Die ersten, bei Temperaturen des Reservoirs unter 0° ausgeführten Messungen stimmten nicht gut überein und waren nicht befriedigend. Der Grund hiervon liegt in der bedeutenden Schwierigkeit, die unter diesen Umständen geringe Intensität der grünen Linie zu messen; vielleicht ist dies auch Spuren von HgO, die noch in der Röhre enthalten waren, zuzuschreiben. Die bedeutendste Schwierigkeit verursachte indessen die Schätzung der Intensität des vom Wasserstoffspectrum gebildeten Hintergrundes, die von der scheinbaren Intensität der Hg-Linie abzuziehen war. Bei weitem Spalt und frischem Wasserstoff war derselbe in diesem Bereiche gleichförmig und continuirlich, und die wahre Intensität der Hg-Linie wurde angenommen als die Differenz zwischen ihrer scheinbaren Intensität und der der benachbarten Theile des zusammengesetzten Wasserstoffspectrums.

Es wurde die Beobachtung gemacht, dass bei kleinen Drucken, wenn die Entladungen einige Minuten angedauert hatten, in der Umgebung der grünen Linie mehrere lichtschwache und unscharfe grüne Linien auftraten. Sorgfältige Untersuchungen unter Ausschluss von Hg-Dampf führten zu der Entdeckung einer anderen Linie, die mit der Hg-Linie fast coincidirt. Wie sich herausstellte, waren die Intensitäten dieser vier Linien gleich bei verschiedenen Wasserstoffdrucken. In Zukunft wurde daher die Intensität der am nächsten gelegenen jener unbekannten Linien sowohl wie die des unterliegenden zusammengesetzten Wasserstoffspectrums von der scheinbaren Intensität der Hg-Linie abgezogen, um die wirkliche Intensität der letzteren zu bekommen. Augenscheinlich gehörten diese Linien nicht dem H-Spectrum an, da sie zugleich mit der Hg-Linie verschwanden, sobald ein langsamer Strom reinen Wasserstoffs durch die Röhre geleitet wurde. Sie zeigten sich auch in einer Röhre mit inneren Elektroden, sowie in einer solchen, welche Stickstoff enthielt. Sie wurden unsichtbar, wenn der Druck 4 bis 5 mm überstieg, desgleichen bei Gegenwart von viel Quecksilberdampf.

Die auf diese Weise ausgeführten Schätzungen der Hellig-

keit der Hg-Linie stimmen gut überein. War die Temperatur des Quecksilberreservoirs *E* niedriger als -5^0, so war die Linie für Messungen zu lichtschwach. Bei -20^0 war sie kaum noch mit dem Auge wahrnehmbar und bei -40^0 vollständig verschwunden. Diese Begrenzung änderte sich naturgemäss mit der Weite der Capillare der Entladungsröhre, sowie auch mit der Stromstärke. Befand sich der Wasserstoff unter hohem Druck, so änderte die Hg-Linie ihre Helligkeit sehr langsam, und wenn die Temperatur des Quecksilberreservoirs *E* 10^0 oder mehr beträgt, bleibt sie sichtbar noch bis zu Drucken von 10 cm und darüber, wofern nur das äusserst schwache, zusammengesetzte Spectrum des Wasserstoffs wahrnehmbar ist.

Gemessen wurde die Intensität von H_α, der grünen Hg-Linie und der benachbarten unbekannten grünen Linie (oder, wenn diese nicht erschien, das angrenzende zusammengesetzte Wasserstoffspectrum). Das Quecksilberreservoir hatte dabei eine Temperatur von -5^0, $+3^0$, $+7^0$, $+11^0$, $+21^0$ und stand mit der Vacuumröhre in Verbindung. Der Dampfdruck des Quecksilbers in der Röhre war gleich dem Sättigungsdruck desselben im Reservoir. Diese Drucke wurden nach der Hertz'schen [1]) Formel berechnet:

$$\log p = 10{,}59271 - 0{,}847 \log T - \frac{3342}{T}.$$

Gewöhnlich wurden die Ablesungen nach dem Einbringen von frischem Wasserstoff gemacht (nachdem für die Diffusion des Hg-Dampfes genügende Zeit belassen war); zuweilen wurden indessen die Beobachtungen an einem und demselben Gasquantum wiederholt, wobei dann der Druck durch Auspumpen vermindert wurde. Die so erhaltenen Resultate sind in den nachstehenden Tabellen mit (—) bezeichnet. Eine Anzahl ähnlicher Beobachtungen wurde zu verschiedenen Zeiten angestellt; sie ergaben dieselben qualitativen Ergebnisse. Die unten angegebenen schliessen sich indessen unmittelbar an die vorher beschriebenen Versuche mit reinem Wasserstoff an. Zum Schlusse wurden die Beobachtungen mit reinem Wasserstoff wiederholt, mit dem Ergebniss, dass die Verhältnisse sich

1) H. Hertz, Wied. Ann. 17. p. 199. 1882.

cht geändert hatten, sodass also die Resultate unter sich rgleichbar sind.

Tabelle II.

mperatur des Quecksilberreservoirs: – 5°; Dampfdruck: 0,000 116 mm.

Druck	Intensität			
	H_α	unbekannte Linie, + zusammenges. Spectrum	Hg beob.	Hg corrigirt
0,7	39	8,3	11,8	3,5
1,8	65	8,8	10	1,2
2,7	78	7,8	8,3	0,5

Tabelle III.

mperatur des Quecksilberreservoirs: + 3°; Dampfdruck: 0,00022 mm.

Druck	Intensität			
	H_α	unbekannte Linie, + zusammenges. Spectrum	Hg beob.	Hg corrigirt
(0,7)	36	5,3	12,6	7,3
(1)	41	7,3	13,3	6
(1,8)	69	9,4	11,2	1,8
(4)	61	7,3	10	2,7
9	36	3,6	4,9	1,3

Tabelle IV.

mperatur des Quecksilberreservoirs: + 7°; Dampfdruck: 0,00034 mm.

Druck	Intensität			
	H_α	unbekannte Linie, + zusammenges. Spectrum	Hg beob.	Hg corrigirt
0,9	33	2,5	10,6	8,3
1,2	34	2,8	8,2	5,4
3,6	90	5	8,8	3,8
(4,4)	68	5,3	8,8	3,5
5	70	5	10	5
10	33	5,3	7,8	2,5
13	16	3,6	6,7	3,1
22	4	2,5	4,5	2
31	1,5	1,5	3,0	1,5
44	0	1,5	2,5	1

Tabelle V.

Temperatur des Quecksilberreservoirs: 11°; Dampfdruck 0,00058 mm

Druck	Intensität				
	H_α	zusammenges. H-Spectrum		Hg beob.	Hg corrigirt
(0,8)	19	3,3	Fremde Linie nicht sichtbar	14,8	11,5
1,9	53	10,6		15,5	4,9
2,5	57	10		13,3	3,3
(2,7)	49	6,2		10,6	4,4
3,2	61	8,3		11,9	3,6
(4)	51	8,2		11,2	3
(4,5)	57	10		13,3	3,3
9	26	5,3		7,8	2,5
26	3,3	1,5		3,6	2,1
34	1	0,8		2,8	2

Tabelle VI.

Temperatur des Quecksilberreservoirs: 21°; Dampfdruck: 0,00185 mm

Druck	Intensität			
	H_α	zusammenges. H-Spectrum	Hg beob.	Hg corrigirt
(0,6)	16	2,5	30,7	28,2
1,1	38	4,2	32	27,8
(1,5)	34	6,2	31	25
(2,6)	39	7	23,8	16,8
(2,7)	36	5,7	19	13,3
4	33	7	23,8	16,8
(5,8)	37	7,3	17	9,7
6,5	33	7,3	14,8	7,5
(14)	13	4,9	10,6	5,7
19	7	3,9	9,3	5,4
21	6	3,6	8,2	4,6
36	1	1,1	3,8	2,2

Bei einem anderen Versuch wurde eine Beobachtungsreihe auch an H_β ausgeführt. Die Resultate finden sich in nachstehender Tabelle.

Tabelle VII.

Temperatur des Quecksilberreservoirs: 21°; Dampfdruck: 0,00135 mm.

Druck	Intensität			
	H_β	zusammenges. H-Spectrum	Hg beob.	Hg corrigirt
1	24	8	20	11,3
2,5	31	5	17	8,7
3,5	42	10	20	10,1
4,5	39	11	16	4,6

Die graphische Darstellung findet sich in Fig. 2. Die 'urven sind den Tabellen nach numerirt.

Betrug die Temperatur des Quecksilbers -5^0 und $+3^0$, o war die Intensität von H_α fast genau dieselbe wie bei Ab- 'esenheit von Hg-Dampf. Hatte das Quecksilber die Tem- 'eratur 7°, so trat eine geringe Abnahme der Intensität von I_α ein. Dieselbe wurde ausgeprägter bei 11 und 21°. Auch lie Intensität von H_β wurde bei Anwesenheit von Hg-Dampf 'tark herabgesetzt (vgl. Tab. I). Ferner wurde die maximale ntensität von H_α, welche bei reinem Wasserstoff 3 mm Druck ntsprach, durch die Gegenwart des Quecksilbers etwas gegen öhere Drucke verschoben. Ungefähr an dem Punkt, wo die ntensität von H_α bei abnehmendem Druck anfängt zu sinken, beginnt die Lichtemission des Quecksilbers sehr rasch anzu- teigen. Das zusammengesetzte Spectrum unterliegt etwas nregelmässigen Veränderungen (wie aus Vergleichung von Tab. IV mit den anderen ersichtbar ist). Im grossen und anzen gehorcht es aber denselben Gesetzen wie H_α.

Der Einfluss des Hg-Dampfes auf die Emission des Wasserstoffs geht aus folgender Tabelle deutlich hervor. Nach dem Einbringen von frischem Wasserstoff nahm die Intensität von I_α und dem zusammengesetzten Spectrum in dem Maasse ab, wie aus dem auf 20° erwärmten Reservoir Hg-Dampf inüberdiffundirte und stieg, sobald das Reservoir abgekühlt wurde.

Tabelle VIII.

Druck	Intensität H_α	zusammenges. H-Spectrum	Hg beob.	Hg corr.	
0,9	86	4,5	0	0	Frischer Wasserstoff
	15	2,5	18	15,5	Hg bei Temp. 20°
	28	6	11	5	Hg bei Temp. 5°
1,1	59	13	0	0	Frischer Wasserstoff
	38	4,5	32	27,8	Hg bei Temp. 21°
	63	12,5	19,8	7,3	Hg bei Temp. 5°
4	100	12	0	0	Frischer Wasserstoff
	33	7	23	16,8	Hg bei Temp. 21°
6,5	59	11	0	0	Frischer Wasserstoff
	33	7,3	14,8	7,5	Hg bei Temp. 21°

Diese Beobachtungsreihen sind an verschiedenen Tagen und unter verschiedenen Umständen erhalten worden; es sind daher ihre absoluten Werthe nicht miteinander vergleichbar.

Zuweilen wurde die Hg-Dampf enthaltende Röhre mit einem Bunsen'schen Brenner stark erhitzt, was indessen keine Intensitätsänderungen des Wasserstoff- oder Quecksilberspectrums zur Folge hatte. Durch die Temperaturerhöhung konnten nur kleine Aenderungen der Dichten beider Gase bewirkt werden, da das Rohr an beiden Enden durch Hähne geschlossen war. Es ist daher wahrscheinlich, dass in diesem Temperaturintervall die Beziehung zwischen den beiden Spectren nicht als Function der Temperatur aufzufassen ist, sondern als Function der relativen Dichten beider Gase.

Obschon die Emission des Quecksilbers kein Maximum erreicht, sind dennoch die relativen Dichten und relativen Intensitäten von Hg und H_α annähernd proportional für alle Drucke des Wasserstoffs unterhalb 6 mm, wie folgende Tabelle zeigt. K ist ein Proportionalitätsfactor, δ_H und δ_{Hg} die Dichtigkeit von Wasserstoff und Quecksilber, und I_H und I_{Hg} die Intensitäten von H_α und der grünen Hg-Linie.

Tabelle IX.

Druck	$A = K \frac{\delta_H}{\delta_{Hg}}$	$B = \frac{I_H}{I_{Hg}}$	$\frac{B}{A}$
1	1	0,75	0,75
2	2	1,7	0,85
3	3	2,3	0,76
4	4	3,2	0,80
6	6	4,2	0,70
8	8	3,5	0,40

Die Abhängigkeit der Intensität der Hg-Linie vom Dampfdruck D des Quecksilbers, wie sie aus den Curven in Fig. 2 hervorgeht, ist in folgender Tabelle zusammengefasst.

Tabelle X.

Temperatur	$D.10^6$	Druck des Wasserstoffs 1 mm		2 mm		5 mm	
		I	D/I	I	D/I	I	D/I
-5°	116	3	39	1,2	90	—	—
3	220	5,5	40	3	73	1,6	140
11	530	11	48	6	88	3,5	150
21	1350	30	45	18	75	10	135

Diese Resultate zeigen unregelmässige Abweichungen, die indessen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen. Es geht aus ihnen die Proportionalität der Strahlungsintensität mit der Dichte deutlich hervor, allerdings unter der Annahme, dass in allen Fällen der Strom bei einem bestimmten Wasserstoffdruck derselbe ist. Es scheint in der That sehr unwahrscheinlich, dass so minimale Quantitäten Quecksilberdampf die Stromstärke erheblich alteriren. Warburg[1]) hat nachgewiesen, dass in einer Wasserstoffröhre der Quecksilberdampf das Kathodengefälle nicht wesentlich beeinflusst, auch wenn er in solchen Mengen vorhanden ist, dass er ein glänzendes Spectrum liefert.

1) E. Warburg, Wied. Ann. 31. p. 574. 1887.

Die Curven in Fig. 2 thun dar, dass bei einem Wasserstoffdruck von 3 mm und einer Temperatur des Quecksilberreservoirs unterhalb 7° die Helligkeit von H_α durch den Hg-Dampf fast nicht geändert wird; dass sie durch denselben dagegen um mehr als die Hälfte verringert wird, wenn die Temperatur des Reservoirs 21° beträgt. Dasselbe gilt für H_β und in etwas geringerem Grade auch für den grünen Theil des zusammengesetzten Spectrums. Andere Theile des zusammengesetzten Spectrums wurden zu Messungen nicht herangezogen, aber es wurde beobachtet, dass die Helligkeit dieser Bereiche annähernd in gleichem Verhältnisse abnahm, sodass also die Intensität des sichtbaren Spectrums in seiner ganzen Ausdehnung um mehr als die Hälfte reducirt wurde. Die relativen Dichten der Hg-Dämpfe bei 3 und bei 21° und die des Wasserstoffs bei 3 mm Druck betragen:

$$\frac{0{,}00022}{3} \cdot \frac{200}{2} = 0{,}0073 \quad \text{und} \quad \frac{0{,}00135}{3} \cdot \frac{200}{2} = 0{,}0450\,.$$

Also die Hinzufügung von 4 Gewichtsproc. Hg-Dampf zu Wasserstoff von 3 mm Druck, oder mit anderen Worten: die Hinzufügung eines Molecüles Hg zu 2500 Molecülen H bewirkt eine Herabminderung der sichtbaren Strahlungsenergie des Wasserstoffs um mehr als die Hälfte.

Eine Erklärung für diese Erscheinung ist nicht leicht zu finden. E. Wiedemann[1]) legt die auf Grund seiner vorhin erwähnten Versuche die Vermuthung nahe, dass im allgemeinen Metalldämpfe bessere Leiter der Elektricität seien, als nicht-metallische Dämpfe. Aehnliche Erscheinungen sind allerdings auch von Anderen beobachtet worden. Bekanntlich verschwindet bei Gegenwart geringer Mengen Na oder K im elektrischen Lichtbogen das Kohlenspectrum fast gänzlich. Trowbridge[2]) weist nach, dass durch 30 proc. Fe im Lichtbogen das Auftreten des Kohlenspectrums vollständig ausbleibt. Indessen haben J. J. Thomson[3]) u. A. gefunden, dass, während einige Metalldämpfe fast so gut leiten, wie dissociirbare nicht-metallische Gase, erhitzter Hg-Dampf ein

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 5. p. 517. 1878.
2) J. Trowbridge, Phil. Mag. 41. p. 450. 1896.
3) J. J. Thomson, Phil. Mag. 29. p. 364 u. 441. 1890.

nahezu vollständiger Nichtleiter ist. Die aus meinen Versuchen folgenden Thatsachen, dass die sehr kleinen Mengen Hg-Dampf, die einem Drucke von 0,0002 oder weniger entsprechen, das Wasserstoffspectrum nicht alteriren, dass die Emission des Hg-Dampfes proportional ist seiner Dichte, endlich dass die relativen Helligkeiten des Wasserstoffs und Quecksilbers proportional sind ihren relativen Dichten, scheinen nicht dafür zu sprechen, dass dem Hg-Dampfe ein unverhältnissmässiger Theil der Gesammtenergie durch den Strom mitgetheilt wird. Dagegen spricht auch die bekannte Thatsache, dass ein Rohr, welches ohne Abhaltung des Quecksilberdampfes durch die Quecksilberluftpumpe evacuirt ist, dem Strome einen ausserordentlich grossen Widerstand entgegensetzt. Es muss also nach einer anderen Erklärung für diese Verminderung der Intensität des Wasserstoffspectrums gesucht werden.

Aehnliche Wirkungen sind bei Flammenspectren beobachtet worden, wo eine Thätigkeit des elektrischen Stromes überhaupt nicht in Frage kommt. Bringt man Salze in eine Flamme, so nimmt man bloss die Spectra der Metallcomponenten wahr (Verbindungsspectren, wenn keine Dissociation stattfindet). Im Sonnenspectrum sind die einzigen identificirbaren Linien von Nichtmetallen die des Wasserstoffs, Heliums, Kohlenstoffs und Siliciums.

Hr. Prof. Warburg brachte mich auf den Gedanken, dass die Emission möglicherweise eine secundäre Folge des Stromes sei, indem der Strom in erster Linie eine Art unsichtbarer Strahlen hervorbringe (nach Art der Kathodenstrahlen). In der Absorption dieser Strahlen liegt die Bedingung des Leuchtens. Falls nun die Strahlen durch den Quecksilberdampf besonders stark absorbirt werden, lässt sich dadurch seine spectroskopische Empfindlichkeit, sowie auch seine Eigenschaft, das Wasserstoffspectrum abzuschwächen, sehr wohl erklären.

Einfluss des Sauerstoffs auf das Wasserstoffspectrum.

Sehr kleine Sauerstoffmengen dem Wasserstoff beigemengt, zeigten einen sehr bemerklichen Einfluss auf die Lichtemission des Wasserstoffs. Die grösste Helligkeit von H_α wurde erst

bei viel niedrigeren Drucken erreicht, als im Falle des reinen Gases; oder aber es war das Maximum weniger scharf definirt. Ein Gleiches wurde beobachtet, wenn in der Röhre Spuren von Luft zurückblieben. Unter diesen Umständen schien dem Quecksilberdampf ein weniger ausgeprägter Einfluss hinsichtlich der Abschwächung des Wasserstoffspectrums zuzukommen.

Tabelle XI.

Nr. der O-Verdünnung	Druck	H_α	Zusammenges. Spectrum (grün)
III	0,8	10,6	2,5
	1,8	8,2	2
	2,6	3,6	0,8
	3,2	2	0,8
	5	1,5	0,3
IV	0,6	18	3,1
	1,2	16,3	3,1
	2,2	8,2	3,1
	3,1	5,3	2,5
	5	3,6	0,8
V	0,7	18	3,6
	0,9	18	3,6
	1	18	3,1
	1,2	20	4,5
	1,3	20	3,9
	2,3	20	4,5
	2,9	20	4,5
	3,2	20	4,5
	4	18	4,5
	4,5 } 5,7 }	13	3,6
	7,5	6	3,1
VI	0,7	36	—
	1,0	42	—
	1,1	42	—
	1,7	42	—
	2,1	39	—
	3,6	22	—
	6	13,3	—
VII	0,6	47	—
	0,8	45	—
	1,1	49	—
	1,2	47	—
	1,7	49	—
	1,8	53	—
	1,9	49	—
	2,4	45	—
	4	28	—
	6	26	—
VIII	0,6	42	—
	0,9	70	—
	1,1	73	—
	1,9	81	—
	2	81	—
	2,2	76	—
	2,9	70	—
	3,6	65	—
	4	39	—
Reiner Wasserstoff	0,7	33	—
	1,2	57	—
	1,4	57	—
	2,6	76	—
	2,8	70	—
	3,6	70	—
	4,2	58	—
	5	36	—

Durch gelindes Erhitzen wurde aus dem in der Kugel *B* (Fig. 1) enthaltenen Kaliumpermanganat reiner Sauerstoff entwickelt und in das Vacuumrohr eingeleitet. Ein Zusatz von 3—4 Proc. Sauerstoff zu reinem Wasserstoff (wie sich aus der damit verbundenen Druckänderung constatiren liess) hatte eine derartige Abnahme der Helligkeit der Entladungen zur Folge, dass überhaupt kein Spectrum mehr zu sehen war. Beim Zufügen von mehr Wasserstoff erschien ein blasses, scheinbar continuirliches Spectrum; nach weiterem Wasserstoffzusatz traten H_α, H_β und die grüne Hg-Linie (herrührend von in der Röhre zurückgebliebenen Spuren von Quecksilberoxyd) auf. Erst nach mehrmaligem Verdünnen innerhalb der Trockenröhren, so dass nur ein minimaler Rest Sauerstoff übrig blieb, gewann das Wasserstoffspectrum einigermaassen an Helligkeit. Die Resultate sind in vorhergehender Tab. XI zusammengefasst und in Fig. 3 graphisch dargestellt. Die unteren, punktirten Curven beziehen sich auf die Intensität des zusammengesetzten Spectrums im Grün, oben in Reihe III und V enthalten.

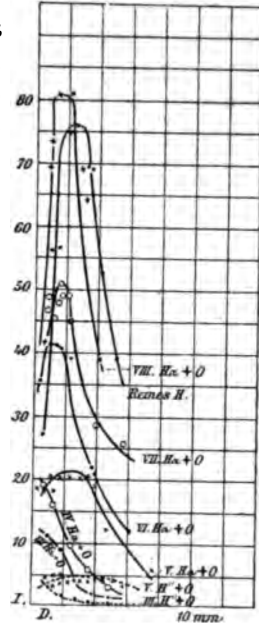


Fig. 3.

Es zeigen diese Curven:

1. Eine mit wachsendem Sauerstoffgehalt zunehmende Verschiebung des Helligkeitsmaximums nach niedrigeren Drucken.

2. Eine Verminderung der Intensität von H_α bei Drucken oberhalb 1 mm, ein Zunehmen derselben bei Drucken unterhalb 1 mm. Paalzow und Vogel[1]) beobachteten ein Stärkerwerden des O-Spectrums durch Hinzufügen von Spuren von Wasserstoff.

Eine gewisse Menge des Gasgemisches, durch welches schon Entladungen hindurchgegangen waren, wurde über Nacht in der Röhre gelassen. Am nächsten Morgen zeigte H_α wieder ein scharf definirtes Maximum bei 3 mm. Allem Anschein

1) A. Paalzow u. H. W. Vogel, Wied. Ann. 13. p. 337. 1881.

nach hatten sich die Gase unter dem Einfluss des Stromes verbunden, und es war der gebildete Wasserdampf in den Trockenröhren absorbirt worden.

Als aus dem Quecksilberreservoir von der Temperatur 20° Hg-Dampf eingeführt wurde, trat eine Schwächung des Wasserstofflichtes in geringerem Maasse ein, als dies bei nicht sauerstoffhaltigem Wasserstoff der Fall war. In der That war die Helligkeit von H_α grösser bei Drucken oberhalb 2 mm, geringer bei kleineren Drucken. Es ist dies in Fig. 4 zum

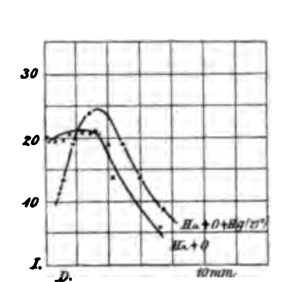


Fig. 4.

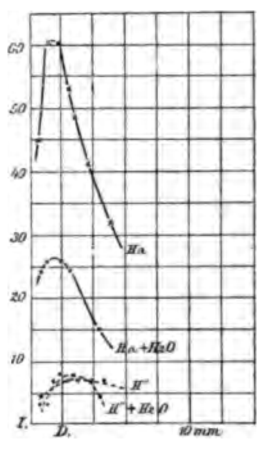


Fig. 5.

Ausdruck gebracht. Die Erscheinung lässt sich folgendermaassen erklären. Bei Drucken über 2 mm beseitigt das Quecksilber einen Theil des Sauerstoffs, indem es sich damit verbindet. Damit steigt die Reinheit des Wasserstoffs und somit auch die Helligkeit seines Spectrums. Unterhalb 2 mm ist die Menge des vorhandenen Sauerstoffs so gering, dass er vollständig vom Quecksilber fortgenommen wird. Letzteres wirkt dann auf den Wasserstoff in seiner charakteristischen Weise.

Es wurde bei Anwesenheit noch geringerer Quantitäten Sauerstoffs einige Male Hg-Dampf eingeführt. Der eintretende Effect war dann jedesmal schwächer, als in reinem Wasserstoff. Aber nach kurzer Zeit verminderte sich die Intensität von H_α, bis derselbe Werth erreicht wurde, wie bei Wasserstoff, der keinen Sauerstoff enthielt. Es ist dies mit obiger Erklärung in voller Uebereinstimmung.

Die Gegenwart von Sauerstoff veränderte die Farbe des ıtladungslichtes von blass rosa in ein schwaches dunkelroth.

Einfluss des Wasserdampfes auf das Wasserstoffspectrum.

Das Quecksilberreservoir *E* wurde durch ein Gefäss er- :zt, welches eine ziemlich concentrirte wässerige Lösung von hwefelsäure enthielt. Dasselbe war auf 3° abgekühlt. Das ıcuumrohr wurde wiederholt ausgepumpt, erhitzt, sodann .t reinem, trockenem Wasserstoff gefüllt und die Intensitäts- ıssungen an H_α vorgenommen. Die Lage des Maximums ;l. Fig. 5) deutete auf das Vorhandensein noch zurück- bliebener Spuren von Sauerstoff.

Nun wurde das Schwefelsäuregefäss geöffnet. Der Wasser- mpfdruck muss zwar ausserordentlich klein gewesen sein; lessen wurde doch fast momentan eine recht bedeutende 'irkung constatirt.

Die Resultate sind im Folgenden zusammengestellt. Die aphische Darstellung vgl. Fig. 5. Die unteren punktirten ırven beziehen sich auf das zusammengesetzte Spectrum.

Tabelle XII.

	Druck	H_α	Zusammengesetztes Spectrum (grün)
Trockener Wasserstoff	0,9	45	5
	1,4	61	6
	1,7	61	7
	2,3	53	7
	2,9	49	7
	3,8	42	7
	4,9	33	7
Vasserdampfhaltiger Wasserstoff	0,8	24	3,6
	1,1	26	3,6
	1,6	26	7
	2,7	20	7
	4,2	15	4,5

Der Einfluss des Wasserdampfes ist dem des Sauerstoffs ınz analog, wie sich das auch erwarten liess. In der Regel ar die Wirkung auf das zusammengesetzte Spectrum grösser s die oben beschriebene.

Wurde die Verbindung des Schwefelsäurebehälters mit der Röhre unterbrochen und dafür der Zugang zum Trockenapparat geöffnet, so nahm das Licht des Wasserstoffs allmählich an Intensität zu.

Die hier erörterten Erscheinungen dürften in naher Beziehung zu den Beobachtungen von Warburg[1]) stehen. Letzterer fand nämlich, dass sehr geringe Mengen Wasserdampf in bemerklicher Weise das Kathodengefälle in Wasserstoff beeinflussen. Für die durch den Wasserdampf verursachte starke Herabsetzung der Lichtstrahlung braucht nicht nothwendige Voraussetzung zu sein, dass auch die Stromstärke durch Anwesenheit von Wasserdampf stark vermindert wird.

Das zusammengesetzte Wasserstoffspectrum.

Bei keinem dieser Versuche war das zusammengesetzte Wasserstoffspectrum abwesend. Durch Spuren von Quecksilberdampf, Sauerstoff oder Wasserdampf wurde die Strahlung sowohl des elementaren als auch des zusammengesetzten Spectrums beträchtlich reducirt, und letzteres erschien bei engem Spalt oft sehr lichtschwach. Wahrscheinlich würde das zusammengesetzte Spectrum bei Benutzung eines sehr engen Spaltes und Geissler'scher Röhren ohne Längsdurchsicht, oder bei sehr grosser Dispersion überhaupt nicht sichtbar sein, wenn der Wasserstoff Quecksilber, Sauerstoff oder Wasserdampf enthält. Zweifelhaft ist, ob in reinem Wasserstoff bei niedrigen Drucken ein vollständig isolirtes elementares Spectrum überhaupt jemals beobachtet wurde. Lagarde[2]) erhielt ein scheinbar reines elementares Wasserstoffspectrum nur bei Gegenwart von Wasserdampf, und dann war die Intensität des Linienspectrums selbst bedeutend durch den Wasserdampf reducirt. Salet[3]) und Cornu[4]) erhielten ein reines elementares Spectrum nur nach mehrmaligem Ausspülen der Röhre mit Sauerstoff. Es ist nicht ausgeschlossen, dass Spuren von Sauerstoff in der Röhre zurückblieben, welche

1) E. Warburg, Wied. Ann. **31**. p. 575. 1887.
2) H. Lagarde, Ann. de Chim. et de Phys. **4**. p. 265. 1885.
3) G. Salet, Ann. de Chim. et de Phys. **28**. p. 22. 1871.
4) A. Cornu, J. de Phys. (2) **5**. p. 100. 1886.

das zusammengesetzte Spectrum stark schwächten. Ames[1]), Schumann[2]) und Huton[3]) gelang es niemals, das zusammengesetzte Spectrum zu beseitigen. Schumann erhielt es am intensivsten in Röhren, die er am sorgfältigsten gereinigt hatte, und am schwächsten in solchen, die überhaupt nicht gereinigt waren und daher wahrscheinlich Bestandtheile enthielten, die Sauerstoff oder Wasserdampf abgeben konnten. Hutton fand, dass es nach Ausspülen der Röhre mit Sauerstoff viel schwächer war. Trowbridge[4]) erhielt bei Anwendung eines sehr grossen Condensators ein einfaches Linienspectrum des Wasserstoffs, in welchem er kein zusammengesetztes Spectrum wahrnehmen konnte. Sowohl die drei letztgenannten Beobachter, als auch ich selbst haben bemerkt, dass diejenigen Entladungen, die das reinste elementare Spectrum lieferten, roth aussehen, dass hingegen, wenn das zusammengesetzte Spectrum besonders ausgeprägt ist, die Entladung bei kleinem Druck sehr blass rosa oder fast weiss, bei höherem Druck bläulich weiss erscheint.

Bei diesen Versuchen wurde beobachtet, dass bei reinem Wasserstoff die Intensitäten des elementaren und des zusammengesetzten Spectrums mit Aenderung des Stromes und der Dichte zu gleicher Zeit zu- oder abnehmen, wenn auch nicht in gleichem Maasse. Die durch Quecksilber, Sauerstoff und Wasserdampf verursachten Aenderungen der beiden Spectren sind qualitativ, wenn auch nicht quantitativ dieselben. Trotz vieler Zweifel, die sich dagegen erhoben, scheint es unmöglich, sich der Schlussfolgerung zu entziehen, dass jenes zusammengesetzte Spectrum wirklich dem Wasserstoff angehört und nicht etwa Verunreinigungen zuzuschreiben ist. Ferner, da beide Spectren fast immer unter sehr verschiedenen physikalischen Bedingungen nebeneinander zu bestehen scheinen, liegt die Vermuthung nahe, dass sie nicht nothwendig verschiedenem molecularen Bau entsprechen, sondern dass sie Theile eines und desselben Spectrums sind. Die Unterschiede, die ihr Aus-

---

1) J. S. Ames, Phil. Mag. **30**. p. 50. 1890.

2) V. Schumann, Jahrb. f. Phot. **8**. p. 59. 1894; Beibl. **18**. p. 752. 1894.

3) R. S. Hutton, Phil. Mag. **46**. p. 338. 1898.

4) J. Trowbridge, Phil. Mag. **43**. p. 137. 1897.

sehen unter verschiedenen physikalischen Bedingungen bietet, sind kaum auffallender als solche, wie man sie auch bei Linien wahrnimmt, die allgemein als zu einem und demselben Spectrum gehörig angesehen werden, wie es beispielsweise bei den grünen und gelben Linien des Quecksilbers der Fall ist, wenn die Dichte seines Dampfes variirt.

II. Sauerstoff.

Einige Versuche, bei denen Röhren mit inneren Elektroden angewandt wurden und der Schwefelsäureverschluss zwischen Röhre und Pumpe fehlte, zeigten, dass in einer reinen Sauerstoffatmosphäre das Spectrum des von der Pumpe herkommenden Quecksilbers vollständig fehlte. Eisig[1]) fand ebenfalls, dass in Sauerstoffröhren die Hg-Linien nicht auftreten.

Das Zufügen einer minimalen Spur Wasserstoff bewirkte das sofortige Erscheinen der grünen Linie. Zur Bestätigung dieser Beobachtung wurden weitere Versuche an Röhren mit äusseren Elektroden angestellt.

Die Röhre wurde mit reinem, aus Kaliumpermanganat hergestelltem Sauerstoff beschickt. Selbst bei kleinen Drucken war das Leuchten der Entladungen nur sehr schwach und es konnte nur ein äusserst blasses, wie es schien continuirliches Spectrum wahrgenommen werden. Nachdem der Strom einige Minuten lang hindurchgegangen war, änderte sich die Farbe der Entladungen von blassrosa in weiss und die rothe H-Linie und die CO-Banden traten auf. Bei mehrmaligem Ausspülen der Röhre mit reinem Sauerstoff nahmen letztere dauernd ab.

Die Röhre wurde mit frischem Sauerstoff gefüllt und mit dem auf 20° erwärmten Quecksilberreservoir verbunden. Obgleich auf die Diffusion des Hg-Dampfes geraume Zeit gewartet wurde, kam die grüne Linie nicht zum Vorschein, bis die Linie H_α sichtbar wurde.

Es wurde eine Spur frischen Wasserstoffs hinzugefügt. Der Erfolg bestand in einem langsamen Zunehmen der Intensität der Wasserstoff- und Quecksilberlinien. Zu keiner Zeit wurde irgend eine Sauerstofflinie bemerkt; ebensowenig

1) M. Eisig, Wied. Ann. 51. p. 750. 1894.

zeigte sich die grüne Hg-Linie, wenn nicht gleichzeitig Wasserstoff zugegen war.

War das Quecksilberreservoir geöffnet, so leuchtete bei Beginn der Entladungen die grüne Linie hell auf, um darauf wieder zu verblassen. Wurde der Strom unterbrochen und gleich wieder geschlossen, so kehrte das Aufleuchten nicht wieder. Dagegen trat es immer ein, wenn einige Secunden gewartet wurde, bis neuer Hg-Dampf in die Capillare der Röhre hineindiffundirt war. Dieses Aufleuchten rührt offenbar her entweder vom Durchgang der Entladung durch freien Hg-Dampf oder aber von dem Process der (chemischen) Verbindung des Quecksilbers mit dem Sauerstoff. Dass thatsächlich chemische Vereinigung stattfand, ging aus der Druckabnahme in der Röhre hervor. In einem Fall sank der Druck während weniger Minuten des Stromdurchganges von 1,9 auf 0,8 mm.

Das Hg-Reservoir wurde auf -13^{0} abgekühlt. Es bewirkte dies nicht die mindeste Aenderung der Intensität der grünen Linie, wie es bei den Versuchen mit Wasserstoff der Fall war, wo die Helligkeit des Hg-Spectrums rasch und mit Sicherheit den Temperaturschwankungen des Reservoirs folgte. Erhitzen der Röhre bewirkte ebenfalls ein rasches Anwachsen der Intensität dieser Linie (in einem Falle von 13 auf 87); ebenso verhielt sich die gelbe Linie. Ein gleichmässiger Strom von frischem Wasserstoff verringerte die Helligkeit des Hg-Spectrums nicht. Diese Thatsachen beweisen, dass sich der Quecksilberdampf nicht im freien Zustande befand, sondern in Quecksilberoxyd überging.

Schlussfolgerungen.

1. Minimale Quantitäten von Verunreinigungen in einem Gase können beträchtliche Veränderungen in seinem Spectrum verursachen, unabhängig davon, ob diese Verunreinigungen chemisch activ sind oder nicht.

2. Die Zuführung sehr kleiner Mengen Quecksilberdampfes zu reinem Wasserstoff bewirkt das Auftreten der grünen Quecksilberlinie im Spectrum. Unter den bei meinen Versuchen herrschenden Bedingungen verschwindet die grüne Linie erst bei Abkühlung des Quecksilberreservoirs unter -20^{0}. Bei

dieser Temperatur beträgt der Sättigungsdruck des Quecksilberdampfes nur 0,000 016 mm.

Bei gewöhnlicher Temperatur und Wasserstoffdrucken oberhalb 10 cm bleibt die grüne Linie schwach sichtbar, solange ein wenn auch schwaches, zusammengesetztes Wasserstoffspectrum sich zeigt. Die Emission des mit Wasserstoff gemischten Quecksilberdampfes unter einem gegebenen Wasserstoffdruck ergab sich annähernd proportional der Dichte des Quecksilberdampfes. Die gelbe und blaue Linie erschien nur bei Temperaturen über 10°.

3. Geringe Mengen Quecksilberdampfes dem Wasserstoff beigemischt, vermindern die Helligkeit des elementaren wie des zusammengesetzten Spectrums um ein Bedeutendes. Unterhalb 6 mm Wasserstoffdruck scheinen die relativen Helligkeiten des Wasserstoff- und Quecksilberspectrums ihren relativen Dichtigkeiten proportional zu sein. Bei höheren Wasserstoffdrucken ist die Helligkeit des Quecksilberspectrums relativ grösser. Werden zu reinem Wasserstoff 4 Proc. Quecksilberdampf beigemischt (mit anderen Worten: kommt auf 2500 Wasserstoffmolecüle 1 Molecül Quecksilber), so wird die Helligkeit des gesammten Wasserstoffspectrums auf weniger als die Hälfte herabgesetzt.

4. In Röhren mit äusseren Elektroden wurde bei Anlegung des benutzten Inductoriums die Emission des Wasserstoffs am stärksten bei 3 mm Druck gefunden. Bei Röhren mit inneren Elektroden tritt unter sonst gleichen Bedingungen das Maximum erst bei Drucken unterhalb 0,6 mm ein. Die Lage dieses Maximums hängt wahrscheinlich ausser von der Stromstärke auch noch von der Gestalt der Röhre ab.

5. Zuführung von geringen Mengen Sauerstoff zu Wasserstoff bewirkt beträchtliche Veränderungen in der Intensität des Wasserstoffspectrums. Bei Wasserstoffdrucken unter 1,5 mm nimmt die Emission zu; bei höheren Drucken nimmt sie ab. Bei wachsendem Sauerstoffgehalt tritt Verschiebung des Maximums der Wasserstoffemission nach niedrigeren Drucken ein.

6. Wasserdampf bewirkt dem Sauerstoff ganz analoge Veränderungen. Wahrscheinlich wird Wasserdampf gebildet, wenn Entladungen ein Gemisch von Wasserstoff und Sauerstoff durchsetzen.

7. Das sogenannte „zusammengesetzte" Spectrum gehört thatsächlich dem Wasserstoff an und nicht irgend welchen Verunreinigungen, wie öfters behauptet wurde.

8. Eine sehr kleine Menge von Wasserstoff zu Sauerstoff hinzugefügt, erregt sofort die Emission vorhandenen Quecksilberdampfes. Der Grund dieser Erscheinung ist noch nicht aufgeklärt.

Hrn. Professor Dr. Warburg bin ich für beständigen Rath und vielseitige Hülfe im Laufe dieser Untersuchung zu grossem Danke verpflichtet.

Berlin, Phys. Inst. d. Univ., Juli 1899.

(Eingegangen 4. August 1899.)

---

4. *Ueber die Ausströmungserscheinungen permanenter Gase; von Robert Emden.*

(Schluss von p. 289.)

(Tafeln hierzu sind dem vorigen Hefte beigelegt.)

II. Theorie der Ausströmungserscheinungen.

Wir betrachten die Strömung einer Flüssigkeit durch eine Röhre von veränderlichem Querschnitt. An den Orten A und B soll derselbe den Inhalt σ_1 bez. σ_2 besitzen. Die Strömung sei senkrecht zu diesen Querschnitten gerichtet und gleichmässig über diese vertheilt. Geschwindigkeit, Druck und Dichte der Flüssigkeit bei A und B seien $u_1\, p_1\, \varrho_1$, bez. $u_2\, p_2\, \varrho_2$. Ist die Strömung stationär, so können wir zwei Gleichungen aufstellen, die der Thatsache Rechnung tragen, dass in der Zeiteinheit sowohl gleiche Massen, als auch gleiche Energiemengen die beiden Querschnitte passiren müssen. Diese Massen sind in der Zeiteinheit

$$\varrho_1\, u_1\, \sigma_1 = \varrho_2\, u_2\, \sigma_2.$$

Die Energiegleichung können wir folgendermaassen aufstellen: Der eintretenden Flüssigkeitsmasse wird zur Ueberwindung des Druckes bei A eine Arbeit mitgetheilt $= p_1\, u_1\, \sigma_1$; die bei B entsprechend abgegebene Arbeit ist $= p_2\, u_2\, \sigma_2$. Die kinetische Energie der eintretenden Masse ist $\frac{1}{2}\, \varrho_1\, u_1\, \sigma_1 \,.\, u_1^2$, der austretenden $\frac{1}{2}\, \varrho_2\, u_2\, \sigma_2 \,.\, u_2^2$. Die innere Energie der Gewichtseinheit Flüssigkeit ist bekanntlich

$$= \int c_v\, d\, t = -\int p\, d\, v = -\int p\, d\, \frac{1}{\varrho},$$

also wird eingeführt

$$- \varrho_1\, u_1\, \sigma_1 \int^{1} p\, d\, \frac{1}{\varrho}$$

und ausgeführt

$$- \varrho_2\, u_2\, \sigma_2 \int^{2} p\, d\, \frac{1}{\varrho},$$

sodass wir haben

$$p_1 u_1 \sigma_1 + \frac{1}{2} \varrho_1 u_1 \sigma_1 u_1^2 - \varrho_1 u_1 \sigma \int^1 p\, d\, \frac{1}{\varrho} = p_2 u_2 \sigma_2 + \frac{1}{2} \varrho_2 u_2 \sigma_2 u_2^2 - \varrho_2 u_2 \sigma_2 \int^2 p\, d\, \frac{1}{\varrho}.$$

Dividiren wir durch die betreffenden Mengen, so erhalten wir für die Gewichtseinheit

$$\frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 - \int^1 p\, d\, \frac{1}{\varrho} = \frac{p_2}{\varrho_2} + \frac{1}{2} u_2^2 - \int^2 p\, d\, \frac{1}{\varrho} = \text{const.}$$

Da aber

$$\frac{p}{\varrho} - \int p\, d\, \frac{1}{\varrho} = \int \frac{d\,p}{\varrho},$$

so erhalten wir die Gleichung

$$\int \frac{d\,p}{\varrho} + \frac{1}{2} u^2 = \text{const.}\ ^{1)}$$

Das Integral $\int d\,p / \varrho$ hat verschiedene Werthe, je nach ler Natur der Flüssigkeit; für Gase, die während eines diabatisch verlaufenden Processes dem Poisson'schen Geetze $p = h \,.\, \varrho^{\varkappa}$ ($\varkappa$ = dem Verhältniss der spec. Wärme c_p / c_v) ehorchen, ist

$$\int \frac{d\,p}{\varrho} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{\varrho}$$

der

$$= \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

$$= h \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \varrho^{\varkappa - 1}$$

$$= \frac{1}{\varkappa - 1} c^2,$$

1) Die Gleichung entspricht vollständig derjenigen eines Körpers n einer Verticalebene

$$g\,h + \tfrac{1}{2} u^2 = \text{const}.$$

k nimmt zu oder ab, wenn u ab- oder zunimmt. Der Fall der Strahlenbildung entspricht, wie wir sehen werden, dem Hinüberleiten und Gleiten ohne Reibung des bewegten Körpers auf einer Horizontalebene mit der einmal erlangten Geschwindigkeit.

wenn c die den jeweiligen p und ϱ entsprechende Schallgeschwindigkeit bezeichnet

$$\left(c^2 = \frac{dp}{d\varrho} = \varkappa \frac{p}{\varrho}\right).$$

Wir wenden diese Gleichungen auf unser Problem an. Wir denken uns ein sehr grosses Gefäss mit einem Gase bis zum Drucke p_1 angefüllt; Dichtigkeit und Temperatur desselben seien dann ϱ_1 und T_1. Durch eine kleine Oeffnung vom Querschnitte F Quadratmeter ströme dasselbe in einen Raum, in dem stets der Druck p_0 herrschen möge, und wir nehmen an, die Strömung sei stationär geworden. Im Reservoir nehmen wir in einiger Entfernung von der Oeffnung Ruhe an und haben dann $u_1 = 0$, wodurch die Constante unserer Gleichung bestimmt ist. In der Oeffnung selbst seien während der Strömung Druck, Dichtigkeit und Temperatur $p\,\varrho\,T$, von denen wir vor der Hand nicht wissen, ob sie gleich den entsprechenden Grössen $p_0\,\varrho_0\,T_0$ des Aussenraumes sind. Für die Geschwindigkeit u, die Ausflussgeschwindigkeit, mit der das Gas die Oeffnung F passirt, haben wir

$$\frac{1}{2} u^2 = \int_p^{p_1} \frac{dp}{\varrho} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p}{\varrho}\right).$$

Durch Einführung der Schaltgeschwindigkeit $c_1^2 = \varkappa p_1/\varrho_1$ erhalten wir

$$u = \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}}\, c_1 \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}.$$

Hier hindert uns vor der Hand nichts, den Druck p in der Oeffnung gleich dem p_0 im Raume, in den hinein die Ausströmung erfolgt, anzunehmen. Wir erhalten dann, wie zu erwarten, für $p_0 = p_1$ $u = 0$ und für $p_0 = 0$, also Ausströmung in ein Vacuum, einen Maximalwerth für u:

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}}\, c_1$$

Mit Hülfe dieser Formeln hat L. Mach die Geschwindigkeiten des ausströmenden Luftstrahles berechnet. Es wird sich zeigen, dass diese Werthe illusorisch sind und in Wirklichkeit nur

geringen Druckdifferenzen vorkommen. Die thatsächlich .andenen Geschwindigkeiten erhalten wir nur dann, wenn gleichzeitig noch Rücksicht auf die ausströmende Gas- ge nehmen.

Die Gasmenge, welche in der Zeiteinheit die Mündung assirt, ist $M = F.u.\varrho$. Für u setzen wir den bereits ge- lenen Werth ein, berechnen ϱ aus der Beziehung

$$\frac{p}{\varrho^{\varkappa}} = \frac{p_1}{\varrho_1^{\varkappa}}$$

erhalten nach leichter Umformung

$$M = \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}}\, c_1 \cdot \varrho_1 \sqrt{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}}.$$

e Formeln für u und M sind zuerst von de St. Venant Wantzel[1]) gegeben worden. Später (1855) sind sie von sbach[2]) wahrscheinlich unabhängig davon abgeleitet len und daher unter dem Namen der Weisbach'schen lussformeln bekannt. In diesen Gleichungen darf der dungsdruck p nicht in allen Fällen gleich dem Aussen- k p_0 gesetzt werden. Ist $p_0 = p_1$, so liefert die Gleich- ng von p und p_0, allerdings den Verhältnissen entsprechend, 0; findet aber die Ausströmung in ein Vacuum statt, so ten wir für $p = p_0 = 0$ wiederum $M = 0$, was widersinnig la wir eher ein Maximum von M erwarten können. Wir hten nun Folgendes. Nimmt der Aussendruck p_0 von p_1 ihlich bis 0 ab, so wird auch der Mündungsdruck p von m Anfangswerthe p_1 aus abnehmen. Die Ausflussmenge st nach der abgeleiteten Formel, aber nur, um, nachdem inen gewissen Maximalwerth erreicht hat, wieder abzu- en. Wir finden leicht, dass dies Ausflussmaximum er- t ist, wenn

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}.$$

---

1) Barré de St. Venant und Laurent Wantzel, Mémoires et ences sur l'écoulement de l'air, déterminé par des différences de ons considérables. Journal de l'École polytechnique. T. XVI. 1839.

2) J. Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinentechnik. 1. Bd. I, p. 280. 1855.

Für atmosphärische Luft z. B., wo $\varkappa = 1,41$, ergiebt sich dies Verhältniss = 0,527. Der durch diese Gleichung bestimmte Druck p spielt in unserem Problem eine Hauptrolle. Ich nenne ihn den *kritischen Ausflussdruck* und bezeichne ihn im Folgenden mit p_k. Diese Verhältnisse haben St. Venant und Wantzel in ihrer bereits erwähnten Abhandlung experimentell untersucht und sind auf Grund ihrer Versuche zu folgendem, scheinbar unnatürlichem Ergebnisse geführt worden: Nimmt der Aussendruck von p_1 an ab, so ist, bis derselbe dem eben definirten kritischen Drucke gleich geworden, der Mündungsdruck p gleich dem Aussendrucke p_0; und Ausflussmenge und Ausflussgeschwindigkeit wachsen beständig nach den Formeln:

$$M = \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}} \cdot c_1 \, \varrho_1 \sqrt{\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}}$$

$$u = \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}} \, c_1 \sqrt{1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}}.$$

Nimmt p_0 aber noch weiter ab, so bleibt p constant $= p_k$ und auch M und u behalten constant Maximalwerthe:

$$M_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}} \, c_1 \, \varrho_1 \sqrt{\left(\frac{p_k}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_k}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa}}}$$

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}} \, c_1 \sqrt{1 - \left(\frac{p_k}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}}.$$

Da die Versuche von St. Venant und Wantzel nur mit sehr kleinen Recipienten angestellt waren, so wurden ihre merkwürdigen Ergebnisse angezweifelt und namentlich von Poncelet[1]) bestritten. In ausgedehntestem Maasse sind diese Untersuchungen namentlich von Zeuner[2]), Fliegener[3]) und Wilde[4]) durchgeführt worden. Uebereinstimmend bestätigen dieselben die erwähnten überraschenden Beziehungen, die nicht mehr angezweifelt werden können. Mit Wilde können wir

1) J. V. Poncelet, Compt. rend. **21.** p. 195—387. 1845.

2) G. Zeuner, Civilingenieur **20.** p. 1. 1874.

3) A. Fliegener, Civilingenieur **20.** 1874; **23.** p. 443. 1877; **24.** p. 2. 1878.

4) H. Wilde, Phil. Mag. (V). **20.** p. 531. 1885; **21.** p. 494. 1886.

aussprechen: „Ist der äussere Druck kleiner als der kritische Druck, so verhält sich der Aussenraum dem ausfliessenden Gase gegenüber wie ein Vacuum.“ Halten wir also fest: Nimmt bei gegebenem p_1 p_0 fortwährend ab, so wachsen Ausflussmenge, Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussvolumen, bis $p_0 = p_k$ geworden, um von da an constant zu bleiben. Ist der Aussendruck p_0 gegeben und steigern wir im Recipienten den Druck p_1, so wächst Ausflussmenge und -Geschwindigkeit. Ist das kritische Druckverhältniss erreicht, so wächst die Ausflussmenge zwar weiter, da die Dichtigkeit im Recipienten wächst, die Ausflussgeschwindigkeit und das Ausflussvolumen aber bleiben constant. Diese Gesetze sind für atmosphärische Luft experimentell bestätigt. Da die Ausflussformeln für alle permanenten Gase gelten, werden auch diese sich wie jene verhalten.

Wir betrachten die Verhältnisse, die in der Düsenmündung vorliegen, sobald dies kritische Druckverhältniss erreicht, resp. unterschritten wird. Das Verhältniss des kritischen Drucks zum Ausflusdruck ergab

$$\frac{p_k}{p_1} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$$

Daraus ergiebt sich für das Verhältniss der kritischen Dichten

$$\frac{\varrho_k}{\varrho_1} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}$$

der kritischen Temperaturen

$$\frac{T_k}{T_1} = \frac{2}{\varkappa + 1}$$

und der kritischen Schallgeschwindigkeiten

$$\frac{c_k}{c_1} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa + 1}}$$

Für die Geschwindigkeit u, mit der das Gas dann die Düsenmündung passirt, ergiebt sich

$$u = \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}}\, c_1 \sqrt{1 - \frac{2}{\varkappa + 1}} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa + 1}}\, c_1$$

also

$$u = c_k$$

d. h. das ausströmende Gas passirt die Mündungsebene mit Schallgeschwindigkeit, d. h. mit derjenigen Geschwindigkeit,

mit der sich in der austretenden Gasmasse Schallwellen fortpflanzen. Wie also das Verhältniss von Innendruck und Aussendruck sein möge, es ist die Ausflussgeschwindigkeit in der Düsenöffnung gleich der Schallgeschwindigkeit, sobald für jene das kritische Druckverhältniss erreicht oder unterschritten wird.

Die Ausflussgesetze von St. Venant und Wantzel können wir in einen Satz zusammenfassen: *Die Geschwindigkeit, mit der ein ausströmendes Gas die Mündungsebene passirt, kann nie grösser werden, als die daselbst herrschende Schallgeschwindigkeit. Diese Maximalgeschwindigkeit tritt ein, sowie zwischen Innen- und Aussendruck das kritische Druckverhältniss erreicht ist.*

Die Grösse des kritischen Druckes ergiebt sich aus der Gleichung

$$\left(\frac{p_k}{p_1}\right) = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}.$$

Neuerdings haben Lummer und Pringsheim[1]) in der Physikal. Reichsanstalt neue Bestimmungen von $\varkappa$ vorgenommen und erhalten:

für Luft	$\varkappa = 1,4025$,
„ Wasserstoff	$\varkappa = 1,4084$,
„ Kohlensäure	$\varkappa = 1,2995$.

Daraus berechnet sich:

für Luft	$p_k = 0,528\ p_1$,
„ Wasserstoff	$p_k = 0,527\ p_1$,
„ Kohlensäure	$p_k = 0,540\ p_1$.

Erfolgt der Ausfluss in die Atmosphäre, wo der Druck 1 herrscht, und steigern wir allmählich den Druck im Recipienten, so wird ein Druck $p_{k'}$ erreicht, dem gegenüber der Druck 1 gleich dem kritischen Druck wird. Für diesen ausgezeichneten Druck $p_{k'}$ finden wir

für Luft	$p_{k'} = \frac{1}{0,528} =$	1,89 Atm.,
„ Wasserstoff	$p_{k'} =$	1,90 „
„ Kohlensäure	$p_{k'} =$	1,83 „

Die Differenzen dieser Werthe für die verschiedenen Gase sind bei den Druckmessungen des experimentellen Theiles nicht mehr nachweisbar. Vergleichen wir hiermit das rein experi-

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Wied. Ann. **64.** p. 555. 1898.

ntell ermittelte Gesetz Nr. 2, wonach die Schlierengebilde
s Strahles für alle Gase bei einem Drucke von 1,9 Atm.
fzutreten beginnen, so erhalten wir einen Hauptsatz unserer
itersuchungen:

*Der ausgezeichnete Druck $p_{k'}$, bei dem ein Gasstrahl beim
sfluss in die Atmosphäre die Düsenmündung mit Schallgeschwin-
gkeit zu passiren beginnt, ist gleich dem Ausflussdrucke, bei dem
h im Strahle stationäre Schallwellen zu entwickeln beginnen.*

Bevor wir das Gas auf seiner Wanderung von der Düse
t verfolgen, haben wir eine Bemerkung einzuschalten.
e nach obigen Formeln berechnete Ausflussmenge ist in
irklichkeit nie beobachtet worden, sondern stets eine ge-
igere, die durch Multiplication der berechneten mit einem
uche α, der bei Flachdüsen bis auf etwa $\frac{1}{2}$ sinken kann,
ihrend er bei conischen Düsen nahezu $= 1$ ist, erhalten wird.
eser Bruch α ist aber nicht vom Drucke abhängig, sondern
eine jeder Düse eigenthümliche Constante. Dadurch wird
s über die kritischen Grössen Auseinandergesetzte nicht be-
hrt. Man hat versucht, dies Deficit an Ausflussmenge in
ıalogie mit Wasserstrahlen durch eine vena contracta zu er-
ären, und Reynolds[1]) glaubt durch Versuche mit aus-
römendem Tabaksrauch eine solche nachgewiesen zu haben.
ies steht aber in vollständigem Widerspruche mit den Strahl-
ldern, die L. und E. Mach und ich erhalten haben. Eine
erengerung des Strahles ist nie nachzuweisen, und Flach-
isen, wo jener Coefficient α bis zum Werthe $\frac{1}{2}$ heruntersinkt,
fern dieselben Strahlbilder, wie conische Düsen, wo α nahezu
1. Eine vena contracta ist nie vorhanden; die Ursache
nes Deficits muss also wo anders gesucht werden. Ein Ein-
hen auf diese Verhältnisse würde hier zu weit führen und
uss einer späteren Publication vorbehalten bleiben. Wir
achen uns im Folgenden von diesem störenden Umstande
ei, indem wir unsere Energiebetrachtungen nicht auf die in
er Zeiteinheit austretende Menge Gases, sondern auf dessen
ewichtseinheit beziehen.

Betrachten wir nun den Umsatz der Energie, die in der
ewichtseinheit des ausströmenden Gases bis zu der Stelle

---

1) O. Reynolds, Phil. Mag. (5) 21. p. 185. 1886.

stattfindet, wo dasselbe die Düse verlässt. Der Ausfluss finde in eine Atmosphäre vom Drucke $p_0 = 1$ statt. Solange im Recipienten ein Druck kleiner als $p_{k'}$ herrscht, liegen die Verhältnisse sehr einfach. In der Düsenmündung herrscht bereits der Druck 1 und der zur Verfügung stehende Theil der inneren Energie ist zur Kolbenarbeit und zur Erzeugung der lebendigen Kraft der Strömung verbraucht worden. Ist der Druck im Recipienten p_1 aber grösser als $p_{k'}$, so herrscht in der Düsenmündung der kritische Druck $p_{k'}$ und die nun eintretenden Verhältnisse erfordern das sorgfältigste Studium. Sind im Recipienten Druck und Dichte p_1 und ϱ_1 und wird das Gas bis zum Drucke p_0 entlastet, so wird eine Energiemenge umwandelbar pro Gewichtseinheit

$$= -\int_{p_1}^{p_0} p\, d\,\frac{1}{\varrho}.$$

Diese Energie zerlegen wir folgendermaassen in zwei Theile:

$$\int_{p_1}^{p_0} p\, d\,\frac{1}{\varrho} = \int_{p_1}^{p_k} p\, d\,\frac{1}{\varrho} + \int_{p_k}^{p_0} p\, d\,\frac{1}{\varrho}.$$

Ueber den ersten Theil haben wir bereits verfügt; er ist umgewandelt in Kolbenarbeit und lebendige Kraft der Strömung. Den zweiten Theil bezeichnen wir im Folgenden stets mit W, haben also

$$W = -\int_{p_k}^{p_0} p\, d\,\frac{1}{\varrho}.$$

Unterhalb des kritischen Druckverhältnisses ist $W = 0$, um von da ab dann stetig zu wachsen. In genügender Entfernung von der Düse ist $p_k = p_0$ geworden, muss also W verbraucht sein. Die allgemeine Ansicht, wie sich diese Umwandlung vollzieht, geht dahin, dass sowohl der Querschnitt des Strahles von der Düsenmündung an, als auch dessen kinetische Energie solange zunehmen, bis $p_k = p_0$ geworden. Namentlich in der technischen Thermodynamik von Zeuner sind die unter dieser Annahme vorhandenen Verhältnisse näher dargelegt. Es wird unterschieden zwischen dem bereits erwähnten „Mündungsquerschnitte“ F und dem „Ausflussquer-

schnitte" *Fa*, jenem Strahlquerschnitte, in dem $p_k = p_0$ geworden.[1]) Letzterer kann beträchtlich grösser sein als ersterer; strömt z. B. ein Gas unter einem Drucke von 4 Atm. in die freie Atmosphäre, so ist $Fa = 3{,}88 . F$. Ob eine solche Querschnittserweiterung in Wirklichkeit stattfindet, kann nicht a priori, sondern nur durch Sichtbarmachen oder Abtasten des Strahles (vgl. experimentellen Theil) entschieden werden. Das Abtasten, sowie unsere Strahlbilder (auch der Strahl unter 4 Atm. ausströmend findet sich darunter) zeigen zur Evidenz, dass eine solche Erweiterung nicht stattfindet. Erst in beträchtlicher Entfernung von der Düse wird der Strahl scheinbar stärker, aber nur durch Wirbelbildung, durch Reibung an der umgebenden Luft verursacht, wie die Aufnahmen bei Dauerbeleuchtung zeigen. Bei 100 Atm. ausströmend, sieht der Strahl nach Mach aus wie ein 40 cm langer, dünner Glasstab von etwa dreifachem Durchmesser der Düse, während der Ausflussquerschnitt ($p_k = 53$ Atm.) ausserordentlich viel grösser sein müsste. Ein Strahl erweitert sich zwar hinter der Düse, aber aus anderem, später auszuführendem Grunde. Und diese Erweiterungen sind, wie nachgewiesen, periodisch unterbrochen von Zusammenziehungen auf den Mündungsquerschnitt *F*. Es wird sich aber auch zeigen, dass jene Energiemenge *W* nicht verwandelt sein kann in grössere, lebendige Kraft der Strömung bei constantem Querschnitte. Es lässt sich zeigen, dass der Strahl von der Düsenmündung an mit constanter Geschwindigkeit fliesst. Dies zu beweisen, müssen wir in Kürze auf die Theorie der Ausflussstrahlen, im Sinne von Helmholtz,[2]) eingehen. Helmholtz hat gezeigt, dass jede scharfe, geometrisch vollkommen ausgebildete Kante, an welcher die Flüssigkeit vorbeifliesst, selbst bei der mässigsten Geschwindigkeit der übrigen Flüssigkeit dieselbe zerreissen und eine Trennungsfläche herstellen muss.

Strömt das Gas durch eine scharfkantige Mündung aus, so giebt letztere Anlass zur Bildung einer röhrenförmigen Discontinuitätsfläche, welche den Strahl von vollständig ruhen-

1) W. Rankine, Civilingenieur **16**. p. 35. 1878.

2) H. v. Helmholtz, Ges. Abhandl. **1**. p. 146; **3**. p. 316; G. Kirchhoff, Mechanik, p. 291.

dem Medium scheidet. Anfang und Ende derselben können nur in der Gefässwandung, welche erstere tangiren muss, und in der Unendlichkeit liegen. Ohne Reibung oder auf Hindernisse stossend, müsste der Strahl das Medium ohne Ende durchfliessen. Die Grenzbedingungen für Discontinuitätsflächen, also auch für die Strahlbegrenzung, sind die, dass 1. der Druck auf beiden Seiten der Fläche gleich sein muss und 2. ebenso die normal gegen die Trennungsfläche gerichteten Componenten der Geschwindigkeit; ist erstere stationär, so müssen diese Componenten gleich Null sein. Strömt ein Strahl durch die freie Atmosphäre vom Drucke p_0, so muss überall in seiner Oberfläche der Druck p_0 herrschen, in seiner Oberfläche kann also keine Ursache zu einer Geschwindigkeitsänderung liegen. Untersuchen wir das Druckgefälle in der Strömungsaxe. Wäre ein solches vorhanden, so müsste sich die Geschwindigkeit der Strömung, die bis dahin gleich der Schallgeschwindigkeit war, vergrössern. Dagegen spricht der Umstand, dass wir im Strahle *stationäre* Dichtigkeitsänderungen wahrnehmen; denn wir werden im Folgenden drei Beweise angeben, abgesehen von der in die Augen springenden Evidenz dieser Nothwendigkeit, dass solche nur dann möglich sind, wenn ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich und entgegengesetzt der Strömungsgeschwindigkeit des sie tragenden Mittels ist.

In Richtung des Strahles findet demnach keine Aenderung der Geschwindigkeit, also auch keine Aenderung des Druckes statt. Eine solche kann unter diesen Umständen auch in radialer Richtung nicht stattfinden, denn nach der zweiten Oberflächenbedingung muss an der Oberfläche die radiale Geschwindigkeit $= 0$ sein. Im ganzen Strahle herrscht also der Oberflächendruck p_0 und wir haben das wichtige Resultat:

Der ausfliessende Strahl fliesst nach Ueberschreitung des kritischen Druckverhältnisses an allen Stellen mit der kritischen Ausflussgeschwindigkeit $u = c$, der Schallgeschwindigkeit; und an allen seinen Stellen herrscht der Druck p_0 der freien Atmosphäre.

Legen wir in die Düsenöffnung eine Ebene, so herrscht an derselben Unstetigkeit, sobald das kritische Druckverhältniss überschritten wird. Zwar ist auf beiden Seiten derselben dieselbe Dichtigkeit ϱ_k möglich und dieselbe Geschwindigkeit

$u = c$ vorhanden und ist die Gewichtseinheit Gas mit derselben kinetischen Energie $\frac{1}{2} u^2$ beladen. Aber auf der einen Seite herrscht der Druck p_k und führt die Gewichtseinheit Gas noch die Energiemenge

$$W = -\int_{p_k}^{p_0} p \, d \frac{1}{\varrho}$$

mit sich; auf der anderen Seite derselben ist $p_k = p_0$ geworden und W scheinbar verschwunden.

In welche Energieform hat W sich umgewandelt?

Nun ist bekannt, dass schwingende Luftsäulen Träger einer bestimmten Energieform sind.[1] Die stationären Schwingungen unseres Luftstrahles können nur auf Kosten einer bestimmten Menge Energie erzeugt sein. Wir bezeichnen diese „Schallenergie" pro Gewichtseinheit austretenden Gases mit w. Wir könnten nun, da uns kein anderer Ausweg bleibt, als Hypothese aufstellen, dass diese Energiemenge w gleich ist jener Energiemenge W, die pro Gewichtseinheit Gas verschwunden ist. *Einen Schimmer von Wahrscheinlichkeit* können wir dieser Annahme geben durch den Hinweis, dass, wie wir bereits gezeigt haben, jene stationären Schlierengebilde gerade bei Erreichung des kritischen Druckverhältnisses entstehen, dass also gerade im gleichen Augenblicke ein w aufzutreten und ein W zu verschwinden beginnt. Gelingt es uns aber, diese Energiemenge w zu berechnen und dafür einen Werth zu finden gleich dem bekannten Werthe von W, so wird jener Satz, den wir als Hypothese aufstellten, zur Gewissheit. Dieser Nachweis wird uns gelingen, und ihm sollen die folgenden Betrachtungen gewidmet sein.

Wir beginnen mit dem Nachweise, dass in einem mit constantem Querschnitte fliessenden Strahle stationäre, ebene Wellen selbst von geringster Dichtigkeitsänderung nicht möglich sind, ausser wenn derselbe mit Schallgeschwindigkeit fliesst. In meiner Originalarbeit habe ich drei Beweise dieses Satzes gegeben. Ich führe hier den zweiten Beweis an, der gleich-

1) Vgl. hierzu: M. Wien, Wied Ann. **36**. p. 834. 1889; A. Raps, Wied. Ann. **36**. p. 273. 1889; A. Toepler u. L. Boltzmann, Pogg. Ann. **141**. p. 321. 1870; A. Toepfer, Die Orgel. Erfurt 1842. Wiedergedruckt 1862; Bosanquet, Phil. Mag. (4). **44**. p. 381. 1872; Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **13** p. 456. 1877.

zeitig eine Erklärung des experimentell gefundenen Gesetzes Nr. 7 ergiebt.

Rayleigh bestreitet[1]) die Möglichkeit stationärer ebener Schallwellen von beträchtlichen Dichtigkeitsunterschieden in irgend einer geradlinigen Strömung. Sein Beweis ist folgender. Es mögen ϱ_0 p_0 u_0 Dichte, bez. Druck und Geschwindigkeit des Fluidums in seinem ungestörten Zustande darstellen; ϱ p u seien die entsprechenden Grössen in einem Punkte der Welle.

Die Continuitätsgleichung ergiebt

$$\varrho u = \varrho_0 u_0 \tag{a}$$

und die Gleichung der Energie

$$\int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho} = \frac{1}{2} u_0^2 - \frac{1}{2} u^2. \tag{b}$$

Durch Elimination von u erhalten wir

$$\int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho} = \frac{1}{2} u_0^2 \left(1 - \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2}\right). \tag{c}$$

Diese Gleichung giebt also für den Druck das Gesetz an, unter welchem allein es für eine stationäre Welle möglich ist, sich in einem mit der Geschwindigkeit u_0 bewegenden Medium zu erhalten. Aus (*c*) folgt

$$\frac{dp}{d\varrho} = u_0^2 \, \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2} \text{ oder} \tag{d}$$

$$p = \text{const} - \frac{u_0^2 \varrho_0^2}{\varrho}. \tag{e}$$

Da die Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit in Gasen nicht durch (e) ausgedrückt wird, schliessen wir, dass eine sich selbst aufrecht erhaltende Welle eine Unmöglichkeit ist, welches auch die Geschwindigkeit u_0 des Luftstromes sei. Nur bei kleinen Dichtigkeitsunterschieden ergiebt (d)

$$\frac{dp}{d\varrho} = c^2 = u_0^2,$$

also die Möglichkeit solcher, wenn die Strömungsgeschwindigkeit = Schallgeschwindigkeit ist. Und doch ergab die optische

1) Lord Rayleigh, Theorie des Schalles 2. § 250. p. 41. Deutsch von Neesen.

ntersuchung des Strahles stationäre Wellen von bedeutenden ichtigkeitsunterschieden. Es muss deshalb eine Möglichkeit eben, die Formeln (a) bis (d) so zu modificiren, dass sie den wirk-ch auftretenden Erscheinungen Rechnung tragen. Wir ver-ssen dazu die Annahme, dass das bewegte Fluidum, der trahl, überall mit gleichem Querschnitte fliesst. Damit ver-tossen wir zwar gegen unsere bisherige Annahme, dass im trahle nur Bewegungen längs dessen Axe vorkommen; denn ne Variation des Querschnittes muss von Bewegungscompo-nten in radialer Richtung begleitet sein. Sind aber, wie es e optische Untersuchung der Strahlen lehrt, die Aenderungen r Durchmesser der Querschnitte klein im Verhältnisse zu rem gegenseitigen Abstande, so können wir die Strömung erster Annäherung immer noch als geradlinig betrachten. gen wir die Querschnitte, an denen wir u und u_0 betrachten, er an die Stellen des grössten und kleinsten Durchmessers, sind die nachfolgenden Entwickelungen immer noch streng htig, denn an diesen Stellen herrscht nur Strömung in ichtung der Axe. Bezeichnen wir zwei Querschnitte mit f und so erhalten wir statt der Gleichung (a)

) $$\varrho f u = \varrho_0 f_0 u_0 = \text{const}.$$

leichung (b') bleibt $= (b)$.

) $$\int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho} = \frac{1}{2}\, u^2 - u_0^2$$

nd wir erhalten daraus

) $$\int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho} = \frac{1}{2}\, u_0^2 \left(1 - \frac{(\varrho_0 f_0)^2}{(\varrho f)^2}\right) \quad \text{und}$$

') $$\frac{dp}{d\varrho} = u_0^2\, \frac{(\varrho_0 f_0)^2}{(\varrho f)^2}.$$

achen wir nun die Annahme

) $$\varrho f = \varrho_0 f_0 = \text{const},$$

erhalten wir aus (d')

$$\frac{dp}{d\varrho} = c^2 = u_0^2,$$

ıs (a')

$$u = u_0 = c,$$

ıs (b')

$$dp = 0, \quad p = \text{const} = p_0,$$

d. h., der Strahl fliesst überall mit Schallgeschwindigkeit und an jeder Stelle desselben herrscht der Druck p_0 der Oberfläche. Diese beiden Bedingungen, die wir bereits aus anderen Gründen für das Strahlinnere annehmen mussten, finden wir so wieder als Bedingungen für das Auftreten stationärer, ebener Schallwellen. Für constante Strömungsgeschwindigkeit folgt unsere Annahme $\varrho f =$ const schon aus der Continuitätsgleichung, unsere Betrachtungen haben uns aber ausserdem gezeigt, dass zum Zustandekommen stationärer Wellen $u = c$ Bedingung ist. Wir haben also wiederum einen wichtigen Satz gefunden:

An jeder Stelle des Strahles ist die Dichtigkeit umgekehrt proportional dem Querschnitte.

Damit ist aber das experimentell gefundene Gesetz Nr. 7 theoretisch begründet. Von dem Augenblicke an, wo das kritische Druckverhältniss erreicht wird, der Strahl mit Schallgeschwindigkeit fliesst, eine Energiemenge W scheinbar verschwindet und eine Schallenergie w im Strahle in Form stationärer Schallwellen auftritt, muss derselbe mit periodisch wechselndem Querschnitte fliessen. Sein kleinster Durchmesser muss sich an den Orten grösster Dichtigkeit, den Scheibchen, vorfinden. In den Scheibchen befindet sich das Gas im gleichen Zustande, wie an der Düsenmündung, ihr Querschnitt ist gleich der Düsenöffnung. Der grösste Querschnitt fällt zusammen mit der Stelle kleinster Dichte ϱ_0. Da die Querschnitte grösster Dichte durch die Düsenöffnung bestimmt sind, müssen die Stellen ungestörter Dichte sich erweitern. Das Plus an Gas, das mit steigendem Reservoirdrucke stets mit gleicher Geschwindigkeit ausströmt, durchsetzt die Stellen constanten Querschnittes, die Scheibchen, in immer grösserer Dichte, die Stellen constanter Dichte ϱ_0 in immer grösser werdendem Querschnitte.

Der dritte Beweis folgt unmittelbar aus der von Riemann[1]) entwickelten Theorie ebener Wellen und zeigt zugleich, dass bei diesen stationären Schallwellen von endlichen Dichtigkeitsunterschieden die Wellenfront steiler abfallen muss, als der Wellenrücken.

1) B. Riemann, Ges. Abhandlg. 8. p. 144. 1860.

Bei grossen Ausflussdrucken können wir den Verlauf der Dichtigkeit wahrscheinlich zum Ausdrucke bringen durch eine Curve (Fig. 5) von der Form:

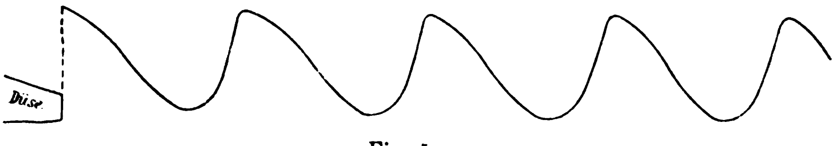


Fig. 5.

Mit dieser Auffassung stimmt das Aussehen der gewonnenen Strahlbilder vollkommen überein. Während bei geringeren Ausflussdrucken jene zwischen zwei Scheibchen auftretenden Linien sich symmetrisch kreuzen, rückt bei zunehmendem Druck ihr Schnittpunkt mehr und mehr zum nächsten Scheibchen, an dessen der Düse zugekehrten Seite wir das verwickeltste, contrastreichste Schlierenbild wahrnehmen, während auf dessen Rückseite alles auf langsame Uebergänge deutet.

Die Unkenntniss dieser Wellenprofile lässt uns bei unseren weiteren Untersuchungen auf eine Schwierigkeit stossen, die wir nur durch eine Hülfshypothese überwinden können. Es ist möglich, den Energieinhalt einer einfachen harmonischen Schwingung zu berechnen, nicht aber den einer Welle von unbekanntem Profil. Wissen wir von einer Welle, dass sie aus einer Sinuswelle hervorgegangen ist, so enthält sie natürlich dieselben Energiemengen wie jene, denn sie ist ja ohne Einwirkung äusserer Kräfte aus derselben zu Stande gekommen. Gewisse Sätze, die wir brauchen, gelten zwar für Wellen von beliebigem Profil, andere aber, ohne die wir bei Berechnung der Wellenlänge nicht auskommen, aber nur für harmonische Schwingungen. Wir müssen deshalb annehmen, dass die stationären Wellen des Luftstrahles ohne Energieverlust in Sinuswellen umgewandelt werden können, was auch ihrer Bezeichnung als Schallwellen entspricht. Diese Annahme wird die Wellenlänge in Uebereinstimmung mit der Beobachtung berechnen lassen.

Die Methoden, welche wir zur Energieberechnung ebener, fortschreitender Wellen anwenden, sind von Rayleigh[1]) an-

1) Lord Rayleigh, Theorie des Schalles. 2. § 245.

gegeben, die Ergebnisse derselben im Principe aber bereits von W. Thomson[1]) ausgesprochen worden und liefern den Satz:

„*Die totale Energie der Wellen ist gleich der kinetischen Energie der ganzen, von der Welle ergriffenen Luft, wenn dieselbe sich mit dem Maximum der in den Wellen auftretenden Geschwindigkeiten fortbewegt, oder gleich der potentiellen Energie derselben Luftmasse, wenn dieselbe auf die grösste Dichtigkeit der Welle verdichtet wird*“ (Rayleigh).

Diese Sätze sind von Rayleigh für gewöhnliche Schallwellen mit geringen Dichtigkeitsunterschieden abgeleitet. In meiner Originalarbeit findet sich der Nachweis, dass sie auch auf Wellen von endlichen Dichtigkeitsunterschieden anwendbar sind. Bezeichnen wir ferner mit α die Maximalgeschwindigkeit, mit β den Maximalausschlag eines Theilchens einer ebenen Schallwelle von der Schwingungsperiode T, die sich durch ein Gas von der Dichte ϱ_0 fortpflanzt, so ist bekanntlich in der Volumeneinheit dieser Gasmasse in Form von Schwingungen eine Energiemenge vorhanden gleich

$$\frac{1}{2}\,\varrho_0\,\alpha^2 = 2\,\pi^2\,\varrho_0\,\frac{\beta^2}{T^2}\,.$$

Auch diese beiden Formeln gelten, wie ich (l. c.) gezeigt habe, für ebene Wellen mit endlichen Dichtigkeitsunterschieden.

Nun ändern aber ebene fortschreitende Wellen ihren Energieinhalt beim Uebergang in den stationären Zustand nicht. Es folgt dies daraus, dass die mit constanter Geschwindigkeit c strömende Luft, die wir zu diesem Zwecke denselben entgegensenden, an kinetischer Energie weder gewinnt, noch verliert. Dem scheint nun der Umstand zu widersprechen, dass eine stationäre Welle keine kinetische Energie mehr besitzt. Wir dürfen aber nicht vergessen, dass eine solche Welle nur durch Aufwand einer gewissen Menge Energie stationär erhalten werden kann, und zwar einer Energiemenge, die gleich ist ihrer kinetischen Energie. Denn in der Zeit δT haben wir jedes Lufttheilchen um dieselbe Strecke zurückzuschieben, um die es sich durch die Welle vorwärts bewegt hätte. In diesem Sinne können wir also auch von einer kinetischen Energie der stationären Welle reden. Auf die Volumeneinheit der Welle haben wir, um sie stationär zu

1) W. Thomson, Phil. Mag. 9. p. 36. 1855.

erhalten, eine Druckdifferenz $p_1 - p_2$ wirken zu lassen, welche der in jener enthaltenen kinetischen Energie gleich ist. Da diese aber gleich ist der potentiellen Energie, so haben wir den Satz: *Um eine Welle stationär zu erhalten, muss auf die Volumeneinheit derselben eine Druckkraft wirken gleich der in derselben enthaltenen potentiellen oder kinetischen Energie.* Um eine stationäre Welle zu erzeugen und zu unterhalten, müssen wir auf die Volumeneinheit derselben demnach einen Druck wirken lassen gleich der in derselben enthaltenen Gesammtenergie. Für letztere fanden wir aber den Werth $2\pi^2 \varrho_0 \beta^2 / T^2$, worin β den Maximalausschlag eines Theilchens bedeutet. In unserem Problem ist der wirkende Druck $p_k - p_0$. Können wir beweisen, dass

$$p_k - p_0 = 2\pi^2 \varrho_0 \frac{\beta^2}{T^2},$$

worin das Glied rechts die Schallenergie in der Volumeneinheit unseres Luftstrahles ist, so haben wir auch bewiesen, dass $w = W$; denn jene Druckkraft $p_k - p_0$ wird dadurch aufrecht erhalten, dass jene Energiemenge W nicht in kinetische Energie der Strömung umgewandelt wird. Gestützt auf diese Beziehung können wir die Wellenlänge der auftretenden Schallschwingung berechnen, diese mit den direct gemessenen vergleichen und diese Beziehung quantitativ controliren.

Die Bestimmung der Wellenlänge λ gelingt, wenn wir ein allgemeines Gesetz gefunden haben werden, welchem die Schwingungsdauer T folgen muss. Wir denken uns eine gerade, cylindrische Säule vom Durchmesser d, angefüllt mit einem Gase von der Dichtigkeit ϱ unter dem Drucke p. Sowohl Temperatur als Schallgeschwindigkeit in demselben sind durch ϱ und p bestimmt. Die einzigen Grössen, von denen T abhängen kann, sind demnach d, ϱ, p; andere unabhängige Variabeln sind nicht vorhanden. Wir haben also $T = f(d, \varrho, p)$. Die Form dieser Function können wir leicht durch eine Dimensionsbetrachtung finden. Es zeigt sich, dass keine andere Beziehung zwischen den Dimensionen dieser 4 Grössen möglich ist, als

$$[T] = [d][\varrho]^{\frac{1}{2}}[p]^{-\frac{1}{2}},$$

denn setzen wir

$$T = d^x \,.\, \varrho^y \,.\, p^z = L^x (M L^{-3})^y (M L^{-1} T^{-2})^z,$$

so bestimmen sich $x\ y\ z$ *eindeutig* aus den 3 Bedingungsgleichungen:

$$x - 3y - z = 0$$
$$y + z = 0$$
$$-2z = 1$$

zu $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$. Es ist leicht einzusehen, dass d, ϱ, p auf keine Weise zu einer dimensionslosen Grösse combinirt werden können.

Nennen wir einen dimensionslosen Factor ω, so erhalten wir:

$$T^2 = \omega\, d^2 \frac{\varrho}{p}.$$

Den Werth von ω können wir ermitteln, wenn wir diese Formel auf einen speciellen Fall anwenden. Wir haben für eine ebene, fortschreitende Welle die beiden Werthe der Energie der Volumeneinheit gefunden:

$$2\pi^2 \varrho_0 \frac{\beta^2}{T^2} = \frac{1}{2} \varrho_0 \alpha^2,$$

worin β und α Maximalausschlag und Maximalgeschwindigkeit eines Theilchens bedeuten. Wir nehmen nun solche Energie der Schwingung von der Periode T an, dass $\alpha =$ der Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{\varkappa p / \varrho}$ wird; dadurch ist β bestimmt. Diese Schallbewegung soll in einer geraden Röhre vor sich gehen, deren Durchmesser d gleich dem Maximalauschlage β ist. Setzen wir dann unseren Ausdruck für T ein, so erhalten wir $\omega = 4\pi^2 / \varkappa$ und daraus

$$T = 2\pi . d . \sqrt{\frac{\varrho}{\varkappa p}} = 2\pi . d . \sqrt{\frac{\varrho}{E}}.$$

Die Berechnung der Wellenlänge bietet nun keine weiteren Schwierigkeiten. Wir gehen nun von der aufgestellten Beziehung aus

$$p_k - p_0 = 2\pi^2 \varrho_0 \frac{\beta^2}{T^2}.$$

Den Werth für T für eine Luftsäule an der Dichte ϱ_0 und dem Drucke p_0 haben wir entwickelt. Der Maximalausschlag β, den ein Lufttheilchen auf die Düse zu macht, hat einen einfachen Werth. Er ist gleich der Strecke, um die der mit Schallgeschwindigkeit c strömende Strahl das Theilchen während der Schwingungsdauer T zurückschiebt, um die Welle

stationär zu machen. Wir haben also $\beta = c\,T = \lambda$ der Wellenlänge. Setzen wir für β und T ihre Werthe ein, so erhalten wir

$$p_k - p_0 = \frac{2\,\pi^2 \varrho_0\,\lambda^2}{4\,\pi^2 d^2 \frac{\varrho_0}{\varkappa\,p_0}},$$

also

$$\lambda^2 = \frac{2}{k}\,d^2\,\frac{p_k - p_0}{p_0}$$

und zwar λ mit demselben Maasse gemessen wie d. Hierin können wir p_k noch ausdrücken durch den Druck p_1 im Recipienten, denn der kritische Druck p_k ist bestimmt durch die Relation

$$\frac{p_k}{p_1} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}.$$

sodass wir für λ die Schlussformel erhalten

$$\lambda^{\mathrm{mm}} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa} \cdot \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}} \,.\, d^{\mathrm{mm}} . \sqrt{\frac{p_1 - \left(\frac{\varkappa + 1}{2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} p_0}{p_0}}.$$

λ ist also proportional dem Düsendurchmesser und unabhängig vom Moleculargewicht des ausströmenden Gases. Findet das Ausströmen in die freie Atmosphäre vom Drucke $p_0 = 1$ statt, so beginnt λ reelle Werthe anzunehmen, sobald

$$p_1 = \left(\frac{\varkappa + 1}{2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} p_0$$

geworden; das ist jener ausgezeichnete Druck, den wir oben mit $p_{k'}$ bezeichneten, jener Druck, bei dem zwischen p_1 und p_0 bei allmählicher Drucksteigerung zuerst das kritische Druckverhältniss erreicht ist. Von da an geht eine Energiemenge W verloren kommt ein λ zum Vorschein.

Berechnen wir die nur von $\varkappa$ abhängigen Coëfficienten der Formel für die experimentell geprüften Gase, so erhalten wir für Luft, wo $\varkappa = 1{,}4025$

$$\lambda^{\mathrm{mm}} = 0{,}87\,d^{\mathrm{mm}}\sqrt{\frac{p_1 - 1{,}89\,p_0}{p_0}},$$

wenn p_1 den wirklich vorhandenen Druck

$$\lambda^{\mathrm{mm}} = 0{,}87\,d^{\mathrm{mm}}\sqrt{\frac{p_1 - 0{,}89\,p_0}{p_0}},$$

wenn p_1 den Ueberdruck bedeutet; für Wasserstoff, wo $\varkappa$ = 1,4084:

$$\lambda^{\mathrm{mm}} = 0{,}86\, d^{\mathrm{mm}} \sqrt{\frac{p_1 - 1{,}90\, p_0}{p_0}},$$

bez.

$$= 0{,}86\, d^{\mathrm{mm}} \sqrt{\frac{p_1 - 0{,}90\, p_0}{p_0}}$$

und für Kohlensäure, wo $\varkappa = 1{,}2995$:

$$\lambda^{\mathrm{mm}} = 0{,}92\, d^{\mathrm{mm}} \sqrt{\frac{p_1 - 1{,}83\, p_0}{p_0}},$$

bez.

$$= 0{,}92\, d^{\mathrm{mm}} \sqrt{\frac{p_1 - 0{,}83\, p_0}{p_0}}.$$

Experimentell aber fanden wir als Mittel von 8 Düsen für alle Gase

$$\lambda^{\mathrm{mm}} = 0{,}89\, d^{\mathrm{mm}} \sqrt{\frac{p_1 - 1{,}90\, p_0}{p_0}},$$

bez.

$$\lambda^{\mathrm{mm}} = 0{,}89\, d^{\mathrm{mm}} \sqrt{\frac{p_1 - 0{,}90}{p_0}}.$$

Dies ist eine Uebereinstimmung, wie sie vollständiger nicht verlangt werden kann. Die Differenzen der berechneten Proportionalitätsfactoren für Luft, Wasserstoff und Kohlensäure von dem experimentell gefundenen Mittelwerthe betragen 1—4 Proc. und sind bei weitem geringer, als diese Differenzen, die wir für die verschiedenen Düsen fanden, unter sich, und sind experimentell nicht mit Sicherheit nachweisbar. Die Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe für $p_{k'}$, den Druck, bei dem sich diese Wellen zu entwickeln beginnen, ist für Luft und Wasserstoff eine vollständige; für Kohlensäure ist diese Differenz kleiner als 0,1 = 0,07 Atmosphären. Da diese Differenz aber nur in der Potenz $^1/_2$ auftritt, kann sie in den Beobachtungen, deren Genauigkeitsgrenze höchstens 0,1 Atm. beträgt, nicht mehr zur Geltung kommen.

Daraus ergiebt sich das Hauptresultat dieser Betrachtungen, die Gleichheit der Energie w der im Strahle vorhandenen stationären Wellenbewegung und jener scheinbar verschwundenen Energiemenge W. Denn nur unter dieser Vorraussetzung haben wir diese Werthe für λ berechnet.

Die Mechanik des Ausströmungsvorganges permanenter Gase liegt also klar vor uns.

Strömt ein Gas unter steigendem Drucke in die freie Atmosphäre aus, so steigt die Geschwindigkeit im Strahle, bis sie bei einem gewissen, berechenbaren Drucke $p_{k'}$ gleich der durch den Zustand des Gases im Strahl bestimmten Schallgeschwindigkeit geworden ist. Dieser Druck $p_{k'}$, ist nicht abhängig von der Dichte, dem Moleculargewichte des Gases und wird nur in sehr geringem Grade beeinflusst durch das Verhältniss seiner specifischen Wärmen, sodass derselbe für die verschiedenen Gase zwischen dem Werthe 1,90 u. 1,83 Atm. liegt.

Von da an passirt das Gas die Düsenmündung, indem es in der Gewichtseinheit die Energiemenge

$$W = -\int_{pk}^{p_0} p\, d\frac{1}{\varrho}$$

mit sich führt. Aber diese Energiemenge wird nicht, wie bisher allgemein angenommen, bei weiterer Entlastung des Gases umgesetzt in grössere kinetische Energie der Strömung, denn die Geschwindigkeit derselben bleibt von da an gleich jener Schallgeschwindigkeit, sondern wird vollständig umgewandelt in eine im Strahle auftretende stationäre Wellenbewegung. Von diesem Drucke $p_{k'}$ an beginnt der Strahl seinen Querschnitt periodisch zu ändern, wodurch stationäre Dichtigkeitsunterschiede möglich gemacht werden. Unter dieser Annahme haben wir die Wellenlänge der auftretenden Schwingungen in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen berechnet.

Diese Ausflussstrahlen geben uns ein Mittel, Schallschwingungen von beliebig kurzer Wellenlänge, bez. hoher Schwingungszahl hervorzubringen. Hat die Luft im Reservoir eine Temperatur von ca. 20° C., so beträgt die Schallgeschwindigkeit im Strahl etwa 300 m sec. Wir haben Wellen gemessen, deren Länge bis auf 0,1 mm heruntergeht; dies enspricht drei Millionen Schwingungen pro Secunde. Die längsten Wellen betrugen ca. 1 cm, entsprechend 30000 Schwingungen. Das mächtige Getöse des Strahles ist also nicht durch diese Wellen verursacht. Wie die Formel für λ zeigt, können wir die Schwingungszahl beliebig erhöhen, wobei allerdings die Schallschwingung immer weniger Energie enthält, da der Düsendurchmesser nicht zu

klein genommen werden kann. Durch Vergrösserung des Druckes, oder noch vortheilhafter des Düsendurchmessers können wir andererseits bis ins Bereich der hörbaren Töne kommen. Bei einem Ueberdruck von ca. 26 Atm. und einer Düse von 6 mm würden wir mit 10000 Schwingungen diese Grenze erreichen; durch Vergrösserung von p und d können wir beliebig weit mit der Schwingungszahl heruntergehen, wobei die entstehenden Schwingungen an Energie zunehmen, sodass sie in dem starken Ausflussgeräusche möglicherweise noch deutlich vernommen werden können. Wo eine Druckluftanlage im grossen Maassstabe vorhanden, würden sich Versuche in dieser Richtung sicherlich lohnen; denn auf diese Weise ist die Möglichkeit vorhanden, gerade die höchsten musikalischen Töne, die sonst in einiger Intensität kaum herzustellen sind, in kräftigster Weise zu erhalten.

III. Vacuumstrahlen.

Die Aufgabe, einen unter starkem Ueberdrucke ausfliessenden Strahl durch einen luftverdünnten Raum zu senden, lässt sich verhältnissmässig einfach lösen, indem man nach dem Principe der Wasserstrahlpumpe den Strahl selbst benutzt, aus dem durchströmten Raume die Luft fortzuschaffen und den Druck in demselben herabzusetzen. Eine gewöhnliche Wasserstrahlpumpe, kräftig mit Luft gespeist, übt schon mehr oder minder beträchtliche Saugwirkungen aus. Es handelt sich nur noch darum, durch optische Untersuchung den wirkenden Strahl auch verfolgen zu können. Dazu wurde folgendes, provisorisches Versuchsmodell (vgl. Fig. 6) gebaut.

Ein 9 cm langes und 9 cm weites, starkwandiges Messingrohr A wurde an seinen Enden mit Fassungen versehen, auf welche durch eine Anzahl Schrauben zwei starke, ebene Messingplatten B, durch Fett gedichtet, luftdicht aufgepresst werden konnten. Diese Platten waren im Centrum durchbohrt. In die eine Durchbohrung konnten die conischen Messingdüsen C eingeschraubt werden, die in Verbindung mit dem Reducirventil standen und denen der Strahl entströmte. Durch die Durchbohrung der anderen Platten war ein weites Messingrohr D geführt, das an dem der Düse zugekehrten Ende durch eine dünne Messingscheibe verschlossen war. In derselben war eine

kreisförmige Oeffnung *E*, etwas weiter als die Düsenöffnung, angebracht, durch welche der Strahl aus dem Inneren des Apparates ungestört ausfliessen konnte. Ich nenne diese Oeffnung die Saugöffnung. Dies Messingrohr war durch eine Stopfbüchse geführt, um den Abstand der Saugöffnung von der Düse, die Strahllänge, ändern zu können. Die eine der beiden Deckplatten konnte verschoben werden, um Düsenmündung und Saugöffnung genau aufeinander zu centriren. An zwei

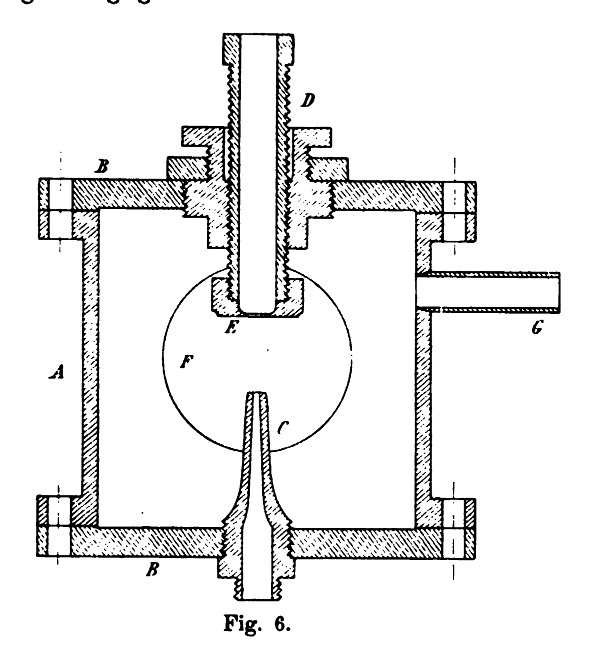


Fig. 6.

diametral gegenüberliegenden Stellen waren an dem weiten Messingrohre möglichst weite Durchbohrungen *F* angebracht, auf diese kurze Kamine aufgesetzt, die durch aufgefettete Spiegelglasplatten luftdicht abgeschlossen waren. Durch diese hindurch konnte der Strahl direct beobachtet oder photographisch fixirt werden. Durch ein weiteres Ansatzrohr *G* war das Rohrinnere mit einem offenen Quecksilberbarometer in Verbindung. Alle Fugen wurden mit Wachs und Colophonium abgedichtet. Leider aber konnte die erwähnte Stopfbüchse nicht genügend luftdicht hergestellt werden, sodass es trotz kräftigen, sehr raschen Saugens des Strahles nicht gelang, den

Druck unter 70 mm herabzusetzen. Es hat dies aber um so weniger zu bedeuten, als ja nicht die Grenze dieser Saugwirkung geprüft werden sollte und es sich andererseits herausstellte, dass, um stärkste Vacua zu erhalten, die Saugöffnung der Düse auf eine Distanz genähert werden musste, die kleiner war als die Länge der auftretenden Schallwellen, sodass eine Messung derselben doch nicht mehr möglich war.

Die Düsen *G* und *H* sind schwach conische Messingdüsen, die Durchmesser ihrer Mündungen betragen 2,9 bez. 3,50 mm. p_1 bedeutet den im Reductionsventil herrschenden Druck (*nicht* Ueberdruck), p_0 den Druck im durchströmten Raum in Atm.; die gemessenen Werthe von p_1/p_0 und die zugehörigen λ sind in die Diagramme *G* und *H* eingetragen.

Die Wellenlänge λ in ihrer Abhängigkeit von den drei Variabeln d, p_1 und p_0 (bisher war p_0 constant $= 1$) können wir wiederum darstellen durch die beiden Formeln:

$$(G) \qquad \lambda^{\text{mm}} = 0{,}79 \,.\, d^{\text{mm}} \sqrt{\frac{p_1}{p_0} - 1{,}90}.$$

$$(H) \qquad \lambda^{\text{mm}} = 0{,}77 \,.\, d^{\text{mm}} \sqrt{\frac{p_1}{p_0} - 1{,}90}.$$

Die Abhängigkeit des p_0 von p_1 brauchen wir nicht zu kennen, da wir stets p_1/p_0 gemessen haben. Unter Zugrundelegung dieser Formeln sind die in Taf. IV ausgezogenen Curven *G* und *H* construirt.

Die so gewonnenen Strahlbilder stimmen im wesentlichen mit den bereits im ersten Abschnitte beschriebenen überein. Die Strahlen sind diesmal aber viel früher schon gestört und sind merkwürdigerweise die Scheibchen, namentlich das erste, gegenüber der Düsenmündung bedeutend erweitert. Eine Ursache hierfür kann ich nicht angeben. Möglicherweise haben wir hierin wie in der rascheren Störung des Strahles eine Wirkung der Reibung zu sehen, die wir bis jetzt vernachlässigten. Denn da die Geschwindigkeiten dieselben sind, wird dieselbe in gleicher Stärke auftreten; da aber mit fallendem p_0 auch die mittlere Dichte des Strahles, wie wir sehen werden, abnimmt, wird ihre Wirkung auf ein Volumelement immer mehr zur Geltung kommen. Selbstverständlich wird

die im vorigen Abschnitte entwickelte Theorie durch die Ungleichheit der Scheibchen und des Düsendurchmessers nicht berührt, da sie nur die Constanz von ϱf verlangt. Auch jene noch nicht völlig erklärten, sich kreuzenden Linien im Strahlbilde stimmen bei Werthen von p_1/p_0, die den früheren p_1 gleich sind, vollständig mit den bereits geschilderten überein. Namentlich bei Abnahme des p_0 aber nehmen sie Formen an, die wohl niemand in Versuchung führen werden, dieselben für das Abbild conischer Schallwellen zu halten. Auch schmiegen sich dann an diese dunklen Linien solche von grösster Helligkeit an, in denen dies Deficit an Lichtenergie wiederum zum Vorscheine kommt, sodass mich dies in meiner Auffassung dieser Linien als einer eigenthümlichen Brennlinienerscheinung bestärkt.

Wir betrachten wiederum in erster Linie die in Umsatz tretenden Energiemengen. Beim Ausflusse in die freie Atmosphäre hatten wir, sobald das kritische Druckverhältniss überschritten war, die in der Gewichtseinheit des aufgespeicherten Gases enthaltene innere Energie

$$-\int_{p_1}^{p_0} p\, d\,\frac{1}{\varrho}$$

in zwei Theile zerlegt nach dem Schema

$$\int_{p_1}^{p_0} p\, d\,\frac{1}{\varrho} = \int_{p_1}^{p_k} p\, d\,\frac{1}{\varrho} + \int_{p_k}^{p_0} p\, d\,\frac{1}{\varrho}$$

und hatten die durch das zweite Integral rechts repräsentirte Energiemenge im Strahle, der mit Schallgeschwindigkeit mit einer Dichte ϱ_0 unter dem Drucke p_0 strömte, als Schallenergie wiedergefunden. Bei steigendem Drucke p_1 nimmt letztere zu, da das betreffende Integral durch Wachsen von p_k sein Intervall erweitert. Ebenso verfahren wir hier. Nimmt bei gegebenem p_1 der Aussendruck p_0 ab, so tritt wiederum, sobald das kritische Druckverhältniss erreicht wird, jene Integralzerlegung ein, und wiederum finden wir im Strahle stationäre Schallwellen, deren Energie bei abnehmendem p_0 zunimmt, da das Integral $\int_{p_k}^{p_0}$ hier durch Verminderung von p_0 sein Intervall

erweitert. Während aber im ersten Falle diese Wellen stets in demselben Strahle sich bilden, hat im zweiten Falle der die Wellen tragende Strahl stets kleiner werdende Werthe von p_0 und ϱ_0. Aber immer können wir uns vorstellen, dass im Recipienten anfangs auch p_0 herrschte und wir durch Steigerung desselben den in Frage kommenden Zustand herstellten. Auch hier wird die Uebereinstimmung der unter der Annahme $w = W$ berechneten λ mit den direct beobachteten diese Auffassung der Ausströmungserscheinungen rechtfertigen.

Auf Grund der Annahme $w = W$ werden wir auch hier auf die Gleichungen

$$p_k - p_0 = 2\pi^2 \varrho_0 \frac{\beta^2}{T^2}$$

geführt und erhalten daraus die Gleichung für λ:

$$\lambda^{\text{mm}} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}\, d^{\text{mm}} \sqrt{\frac{p_1 - \left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} p_0}{p_0}},$$

also für Luft, wo $\varkappa = 1,4025$:

$$\lambda^{\text{mm}} = 0,87\, d^{\text{mm}} \sqrt{\frac{p_1}{p_0} - 1,89},$$

während wir auf Grund der Versuche fanden:

$$\lambda^{\text{mm}} = 0,79\, d^{\text{mm}} \sqrt{\frac{p_1}{p_0} - 1,90} \text{ für Düse } G$$

und

$$\lambda^{\text{mm}} = 0,77\, d^{\text{mm}} \sqrt{\frac{p_1}{p_0} - 1,90} \text{ für Düse } H,$$

eine in Anbetracht des Umstandes, dass wir Reibungskräfte vernachlässigen, die stets im Sinne einer Verkleinerung von λ wirken, völlig befriedigende Uebereinstimmung. Dadurch ist auch bei diesen Strahlen die Gleichheit von w und W bewiesen.

Da in dieser Gleichung $p_0 \neq 1$ ist, so können wir offenbar nicht ohne weiteres mit Ueberdrucken arbeiten, welche die Formel compliciren würden, sondern haben stets die herrschenden Drucke einzuführen. In unsern Versuchen war p_0 von p_1 abhängig. Könnten wir aber p_0 beliebig constant halten und

e λ-Curven construiren, so würden alle diese Curven die bscissenaxe in dem Punkte

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\varkappa + 1}{2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} = 1,90 \text{ Atm.},$$

ım kritischen Druckverhältnisse, schneiden; von diesem ınkte an beginnen die Wellen und Strahlen aufzutreten, beınt der Strahl periodisch seinen Querschnitt zu ändern; der ıergieinhalt dieser Wellen w ist gleich der von diesem unkte an zur Umwandlung verfügbaren Energiemenge

$$W = -\int_{p_k}^{p_0} p\, d\frac{1}{\varrho}.$$

Die hier entwickelte Theorie der Ausströmungserscheinungen r Gase, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die Wellenıge und selbst den Energieinhalt der in den Strahlen auftenden stationären Wellen auf Grund einfacher Energiebechtungen zu berechnen gestattet, wird vielleicht in einigen nkten auf Grund weiterer Erfahrungen noch modificirt werden ıssen. Die Uebereinstimmung der berechneten und beobıteten Wellenlängen aber beweist, dass sie wenigstens in den sentlichen Grundzügen die beobachtbaren Erscheinungen htig interpretirt.

München, Physik. Institut der Kgl. techn. Hochschule, October 1898.

(Eingegangen 19. März 1899.)

5. *Ueber den Luftwiderstand fliegender Geschosse;* *von Robert Emden.*

Bewegen wir eine senkrecht gestellte Fläche vom Querschnitte F mit der horizontalen Geschwindigkeit v durch Luft von der Dichte ϱ, so ist der Widerstand, den sie erfährt:

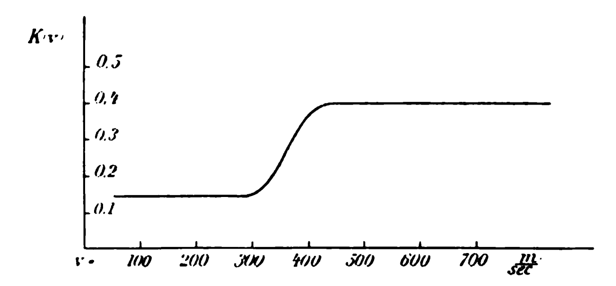
$$W = \varrho \,.\, F \,.\, v^2 \,.$$

Für den Widerstand, den ein fliegendes Geschoss vom Querschnitte F erfährt, hat sich durch Versuche ergeben[1]), dass wir dies W noch multipliciren müssen mit einem Factor λ, der von der Form desselben und der Beschaffenheit seiner Oberfläche abhängt, und mit einer Function der Geschwindigkeit, $K(v)$, weil der Widerstand nicht genau proportional mit v^2 wächst, sodass wir haben:

$$W = \lambda \,.\, \varrho \,.\, F \,.\, v^2 \,.\, K(v) \,.$$

Für Fluggeschwindigkeiten des Geschosses, die kleiner als Schallgeschwindigkeit sind, hat $K(v)$ den konstanten Werth 0,14; nähert sich jene der Schallgeschwindigkeit, so steigt $K(v)$ plötzlich sehr rasch an, um nach Ueberschreitung derselben wieder constant zu werden, = 0,39.

Die Function nimmt $K(v)$ also ungefähr folgenden Verlauf:



Die Ursache dieses plötzlichen Wachsens von K ist noch unerklärt. Mir scheint folgende Erklärung einfach und über-

---

1) Vergleiche C. Cranz. Lehrbuch der theoretischen äusseren Ballistik. pag. 39.

zeugend. Zur Ueberwindung des Widerstandes hat das Geschoss Arbeit zu leisten. Diese Arbeit steigt an, sobald die Geschwindigkeit der Art angewachsen ist, dass sich nach den Versuchen von E. Mach eine conische Kopfwelle ausbildet; denn dies findet statt, sobald das Geschoss mit Schallgeschwindigkeit fliegt. Eine jede Schallwelle enthält aber Energie; dieselbe ist, wie ich in einer früheren Arbeit[1]) gezeigt, $= c^2 \varrho_0 \int s^2 \, d\,V$, wobei die Integration über den von der Welle eingenommenen Raum auszudehnen ist und s die Condensation bedeutet. Diese Energiemenge muss der lebendigen Kraft des Geschosses entnommen werden. Sowie das Geschoss beginnt mit Schallgeschwindigkeit zu fliegen, hat es ausser Ueberwindung des Widerstandes noch Arbeit zu leisten zur Bildung der Kopfwelle, welche Arbeit steigt, bis die Kopfwelle in ihrer Maximalintensität sich entwickelt hat. Diese Maximalwelle muss stets neu erzeugt werden, und der vergrösserte Widerstand des Geschosses bleibt von da an wieder constant. Ich konnte keine Versuchsdaten auffinden, die entscheiden lassen, ob die Maximalintensität in Wirklichkeit existirt, oder die Intensität der Kopfwelle dauernd mit der Geschwindigkeit wächst.

1) R. Emden, Wied. Ann. **69.** p. 264. 1899.

(Eingegangen 19. März 1899.)

6. *Dichtebestimmungen von gesättigten Dämpfen und Flüssigkeiten;*

von Rudolf Freiherr von Hirsch.

(Hierzu Taf. VII.)

Einleitung.

Die specifischen Volumina der gesättigten Dämpfe und der Flüssigkeiten unter Sättigungsdruck spielen einestheils in den Gleichungen der Thermodynamik eine Rolle, andererseits scheinen sie geeignet, über den Zusammenhang des flüssigen und dampfförmigen Aggregatzustandes wichtige Aufschlüsse zu geben.

Dennoch umfasst die experimentelle Untersuchung verhältnissmässig wenige Stoffe und ist auch für diese nur innerhalb enger Temperaturgrenzen ausgeführt; besonders für hohe Temperaturen sind die vorliegenden Resultate so wenig zahlreich, dass weitere Bestimmungen als wünschenswerth erschienen.

Bei der Ausführung der Versuche bediente ich mich folgender von S. Young angegebenen Methode[1]: Eine beiderseitig geschlossene Glasröhre wird nacheinander mit zwei verschiedenen Gewichtsmengen p und p' der zu untersuchenden Substanz gefüllt[2]) und auf eine constante Temperatur T gebracht. Aus dem abgelesenen Stand des Meniscus ergeben sich in dem calibrirten Rohr die von Flüssigkeit und Dampf eingenommenen Volumina, V_a bez. V_b für die erste, V'_a bez. V'_b für die zweite Füllung. Bildet man die Grössen

$$S\,a = \frac{V\,a}{p}, \qquad S\,b = \frac{V\,b}{p}.$$

$$S\,a' = \frac{V'\,a}{p'}, \qquad S\,b = \frac{V'\,b}{p'},$$

---

1) Eine Uebersicht und Discussion der sonst bekannten Methoden findet sich in der Dissertation.

2) S. Young, Journ. of the Chemical Society of London **59.** p. 911 ff. 1891.

S_b bei der ersten Füllung das aus der Gewichtseinheit
kelte Dampfvolumen, S_a die von der Gewichtseinheit
bleibende Flüssigkeit; also das specifische Volumen der
gkeit, d. h. das Volumen der Gewichtseinheit Flüssigkeit

$$S = S_a + S_{b/r},$$

das Verhältniss der specifischen Volumina von Dampf
lüssigkeit bedeutet. Dieselbe Betrachtung, auf die zweite
g angewendet, ergiebt

$$S = S'_a + S'_{b/r}.$$

us beiden Gleichungen berechnet sich

$$S = \frac{S_a S'_b - S_a' S_b}{S'_b - S_b},$$

$$r = \frac{S_b}{S - S_a} = \frac{S'_b}{S - S_a'}$$

$$s = r \cdot S.$$

er bei den Versuchen
te Apparat war bis auf
geringfügige Aende-
n nach den Angaben
. Young[1]) angefertigt
Fig. 1):
in vertical stehendes,
20 mm weites, 60 cm
Rohr aus dickwan-
schwer schmelzbarem
(Verbrennungsrohr *ab*)
einen kurzen Messing-
(*bc*) eingekittet; der-
rug zwei seitliche An-
re, von denen das eine
er Kühlschlange *k*, das
zu einem Kolben
, der die zur Her-
g der hohen Tempera-
dienenden Siedeflüssig-
enthielt. Mit einem

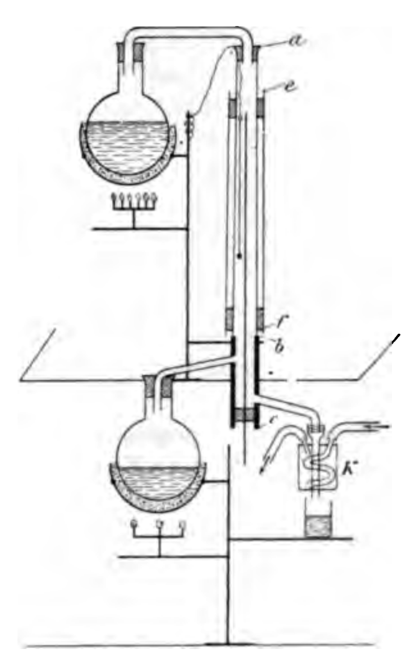


Fig. 1.

[1]) S. Young, Journ. Chem. Soc. 59. p. 37. 1891.

ebensolchen Kolben war das obere Ende der Röhre *a b* durch ein doppelt gebogenes Messingrohr verbunden. Die Röhren sind in die Siedekolben mittels durchbohrter Korke eingesetzt; diese stehen in Sandbädern und werden durch starke Bunsenbrenner erhitzt. Das Dampfrohr *a b* ist von einem weiteren Schutzrohr *e f* umgeben, welches durch Korke auf diesem gehalten wird. Ausserdem sind, ebenfalls zum Schutz gegen Abkühlung nach aussen, alle erwärmten Theile des Apparates mit dickem Asbestpapier umwickelt. Das Versuchsrohr wurde anfangs nach den Angaben von S. Young an einem Stiel von unten in das Dampfrohr eingeführt und mittels eines durchbohrten Korkes festgeklemmt, während ein Thermometer von oben an einem Draht in den Dampfraum hing. Da jedoch der Kork beständig undicht wurde und die Röhre nicht ordentlich festhielt, so wurde später die untere Oeffnung des Dampfrohres ganz verschlossen, die Versuchsröhre aber ohne Stiel an das Thermometer gebunden von oben eingeführt. Gegenüber der Flüssigkeitsoberfläche *o* ist aus der Asbestumwickelung vorne und hinten ein längliches Fenster ausgeschnitten; das eine dient zur Beleuchtung des Meniscus mit einer kleinen Glühlampe, das andere zur Ablesung durch ein etwa 5 m entferntes Fernrohr. Da während der Versuche die Drucke im Rohr sehr gross werden, so ist zum Schutz gegen etwaige Explosionen der ganze Apparat von einem Drahtgitter umgeben. Der Gang der Versuche bedarf keiner Erläuterung. Bringt man die Flüssigkeit in den Kolben zum Sieden, so erfüllt sich der Innenraum des Apparates mit einem Dampfstrom von constanter Temperatur; diese sowie der Stand des Flüssigkeitsmeniscus in der Röhre werden abgelesen. Der verbrauchte Dampf strömt durch die von kaltem Wasser umflossene Kühlschlange ab und wird in einem unterstellten Gefäss als lauwarme Flüssigkeit wiedergewonnen, welche sofort zur Wiederholung des Versuches benutzt werden kann.

Die Füllung der Versuchsröhren mit den zu untersuchenden Flüssigkeiten geschah nach der von Young angegebenen Methode.[1]) Ein Glasrohr von $2^1/_2$ bis 5 mm innerem Durch-

1) S. Young, Journ. Chem. Soc. 59. p. 37 ff. 1891.

messer und etwa 5 mm Wandstärke (vgl. Fig. 2) wurde mit einer Millimetertheilung versehen und mittels Quecksilberfadens calibrirt. Hierauf wurde die Röhre etwa 30 cm von einem Ende zugeschmolzen (bei *a*), sodass das Stück *a b* den Stiel bildete; bei den späteren Versuchen, wo derselbe weggelassen wurde, zog man die Röhre bei *a* ab. Das Ende bei *a* wurde mit Quecksilber ausgewogen und auf das sorgfältig gereinigte Rohr bei *c* der nebenbei abgebildete Ansatz aufgeschmolzen. Nachdem der ausgebauchte Theil desselben etwa zur Hälfte mit der zu prüfenden Flüssigkeit gefüllt war, wurde die Oeffnung *o* mit einer Quecksilberpumpe verbunden und das Rohr ausgepumpt. Befindet sich die Oeffnung des kleinen Rohrstückes *r* unter der Oberfläche der Flüssigkeit, so saugt es dieselbe jetzt ein, ist eine genügende Quantität eingedrungen, so dreht man das Rohr, sodass die Oeffnung von *r* jetzt über dem Niveau der Flüssigkeit steht und die Saugewirkung aufhört. Nach einigen Stössen der Luftpumpe wird sodann das Ansatzstück an der zu diesem Zweck verengten Stelle *e* abgeschmolzen. Nachdem man der Flüssigkeit einige Stunden Zeit gelassen hat, an den Wänden herabzufliessen, wird der Stand bei Zimmertemperatur abgelesen und hieraus mittels des bekannten specifischen Gewichtes das Gewicht der Füllung berechnet. Hierauf wird die Röhre umgekehrt und jetzt mittels des bekannten Gewichtes der Füllung das Volumen des anderen Endes bestimmt. Diese Methode der Füllung ist nicht gerade sehr einfach, dafür leistet sie aber Gewähr, dass die Luft aus der Röhre vollkommen entfernt ist, und die Substanz, welche ja nur mit den Rohrwänden in Berührung kommt, nicht verunreinigt wird (vgl. Fig. 3).

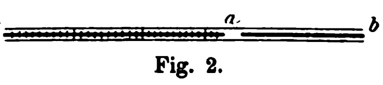


Fig. 2.

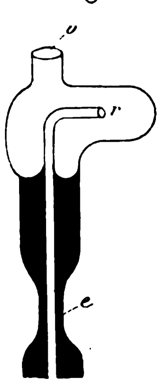


Fig. 3.

Als Siedeflüssigkeiten wurden folgende Substanzen verwendet:

Dimethylanilin	(Siedepunkt 190°)
Diäthylanilin	(Siedepunkt 212°)
Benzoesäureisobutylester	(Siedepunkt 237°)
Bromnaphtalin	(Siedepunkt 276°)

Die drei ersten Substanzen sieden sehr constant, Bromnaphtalin dagegen zersetzt sich sehr stark, sodass die Temperatur während eines Versuches nie ganz constant wird, besonders wenn man den in den Kolben bleibenden Rest der Flüssigkeit nicht jedesmal entfernt und nur das Destillat verwendet; thut man dies, so braucht man sehr grosse Mengen Substanz; auch der sehr unangenehme Geruch des Bromnaphtalins, der ein längeres Arbeiten in diesen Dämpfen erschwert, lässt es als Siedeflüssigkeit wenig geeignet erscheinen.

Betreffs der Berechnung der Versuche ist folgendes zu erwähnen:

Alle Volumina sind auf $^1/_{10}$ cmm genau bestimmt und hieraus die Grössen S_a und S_b auf 4 Decimalstellen ausgerechnet; die vierte Stelle, welche keinen Anspruch auf Richtigkeit machen kann, ist in dem nach der Formel

$$S = \frac{S_a\ S_b' - S_a'\ S_b}{S_b' - S_b}$$

berechneten Werth des specifischen Volumens weggelassen. Ein immerhin möglicher Ablesefehler von $^1/_{10}$ mm macht sich bereits in der dritten Decimale bemerkbar, deren Einheiten daher nicht als sicher betrachtet werden können.

Die Berechnung von

$$r = \frac{S_b}{S - S_a}$$

wird um so ungenauer, je kleiner $S - S_a$ ist, d. h. je weniger Substanz verdampft ist. Die Methode ist daher nur für Temperaturen erheblich über dem normalen Siedepunkte der zu untersuchenden Substanz anwendbar.

Wird S zu gross gefunden, so muss r zu klein ausfallen und umgekehrt. Das specifische Volumen des Dampfes, auf das es eigentlich ankommt, $s = r \,.\, S$, ist daher immer weniger ungenau als r.

Es wurden folgende Correctionen angebracht.

1. Correction wegen des Caliberfehlers des Rohres.

2. Correction wegen des Meniscus (stets als $^1/_3$ Grundfläche-Höhe berechnet). Dieselbe Correction wurde auch bei der Calibrirung mit Quecksilber angewendet.

3. Eine Correction wegen Ausdehnung des Glases war nicht nöthig, da dieselbe auch bei den grössten Werthen der Volumina (2000 cmm) mit dem gewöhnlichen Ausdehnungscoefficienten des Glases 0,000025, erst 0,05 cmm ausmacht, während alle Volumina nur auf 0,1 cmm berechnet sind.

4. Die wichtigste Correction ist die wegen des bei Zimmertemperatur im Rohr vorhandenen Dampfes, welche bei der Gewichtsbestimmung einige Milligramm ausmachen kann. Sie beeinflusst den Werth von S fast gar nicht, den von r sehr stark, um so stärker je grösser r, also je niedriger die Temperatur ist.

Bei dieser Correction wurde für den Dampf stets die normale Dichte angenommen, d. h. das halbe Moleculargewicht multiplicirt mit der Dichte des Wasserstoffs, 0,0008988.

Alle Versuche wurden mindestens dreimal, und wenn die Resultate schlecht übereinstimmten, noch öfter wiederholt.

Um S aus den Versuchen mehrere Male zu berechnen, müssen mindestens drei verschiedene Füllungen untersucht werden, wie dies bei der einen Hälfte der geprüften Substanzen auch geschah; da aber in der Gleichung

$$S = \frac{S_a S'_b - S'_a S_b}{S'_b - S_b}$$

$S'_b - S_b$ nicht zu klein werden darf, so können nur solche Werthe zur Berechnung combinirt werden, bei welchen die Füllungen erheblich voneinander abweichen. Da die mehrmals berechneten Werthe von S stets gut miteinander übereinstimmten, so erscheint auch da, wo diese Grösse aus den Versuchen nur einmal berechnet werden konnte, die Genauigkeit hinreichend.

Versuchsresultate.

Es wurden folgende Substanzen untersucht: Toluol; Ortho-, Para- und Metaxylol; Propionsäure; normale und Isobuttersäure[1]).

1) Ueber Reinigung der Substanzen vgl. die Dissertation.

I. Toluol.

Siedepunkt 110°; specifisches Gewicht bei 18°: 0,8665.

Die Resultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt[1]):

Tabelle 1.

T	1		2		3		4	
	S_a	S_b	S_a	S_b	S_a	S_b	S_a	S_b
190°	1,2318	7,0657			1,2255	7,1188	1,3476	3,3628
212	1,1949	7,1026			1,1751	7,1692	1,3648	3,3456
237			1,4318	2,5276	1,0798	7,2645	1,3634	3,3470
276	0,6685	7,6290	1,4558	2,5036			1,3207	3,3897

Tabelle 2.

T	I				II			
	S	r	s		S	r	s	
190°	1,452	30,7	44,7	1 . 4	1,456	31,4	45,7	3 . 4
212	1,516	22,1	33,5	1 . 4	1,534	19,8	30,4	3 . 4
237	1,620	13,4	21,8	2 . 3	1,606	13 8	22.1	3 . 4
276	1,839	6,43	11,8	1 . 4	1,842	6,59	12,4	1 . 2

Tabelle 3.

T	S	r	s	D	d
190°	1,455	31,1	45,2	0,687	0,022
212	1,525	21,0	32,0	0,656	0,031
237	1,613	13,6	22,0	0,620	0,045
276	1,841	6,51	12,1	0,543	0,082

Die erste Tabelle enthält die aus der Beobachtung an vier Versuchsreihen entnommenen Werthe von S_a und S_b, die zweite die hieraus berechneten Grössen S, r und s, wobei die letzte Columne die Nummern der Beobachtungsreihen angiebt, welche der Berechnung zu Grunde liegen. In der dritten Tabelle

1) Bei Toluol ist das ganze Material angegeben, bei den folgenden Substanzen nur die für Temperaturintervalle von 10° abgeleiteten Werthe von S, s, D und d.

sind die aus beiden Berechnungen gezogenen Mittelwerthe von S, r und s, sowie deren reciproke Werthe, die Dichten $D = 1/S$ und $d = 1/s$ zusammengestellt. Trägt man diese Werthe D und d in einem Coordinatensystem, dessen Ordinaten die Temperaturen sind, als Abscissen auf, so sollen nach einem von Matthias aufgestellten Gesetz[1]) die Mittelwerthe $(D+d)/2$ auf einer Geraden, dem sogenannten Durchmesser der Dichtecurven, liegen. Dieses Gesetz zeigte sich hier wie bei allen anderen untersuchten Substanzen vollständig bestätigt, wie nachstehende Tabelle zeigt, in welcher die erste Columne die beobachteten, die zweite die nach der Formel

$$\Delta = 0{,}4464 - 0{,}000483\ t$$

berechneten Werthe von $(d+D)/2$ zeigt:

Tabelle 4.

190°	0,3547	0,3546
212	0,3435	0,3440
237	0,3328	0,3319
276	0,3128	0,3131

Da also die Curve, welche die Dichten als Function der Temperatur darstellt, einen geradlinigen Durchmesser hat, so ist die Annahme naheliegend, dass die Curve eine Parabel sei; thatsächlich haben Cailletet und Matthias[2]) für eine Reihe von Substanzen die Formel $d = \alpha - \beta t - \gamma \sqrt{\vartheta - t}$ bestätigt gefunden, wobei sie allerdings für den der Flüssigkeit entsprechenden Curvenast andere Constanten α, β, γ annahmen als für den Theil, welcher dem Dampf entspricht; (ϑ bedeutet die kritische Temperatur). Um diese Gesetzmässigkeit zu prüfen, wurden die Constanten der Parabel $y^2 = m x + n y$ bestimmt, welche auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem bezogen ist, dessen eine Axe dem Durchmesser $\Delta = a - t \operatorname{tg} a$ parallel ist, sodass

$$y = d + t \operatorname{tg} \alpha, \quad x = \frac{t}{\cos a}$$

1) E. Mathias, Compt. rend. **115.** p. 35. 1890.

2) L. Cailletet u. E. Matthias, Compt. rend. **104.** p. 1563. 1887.

ist. Die Scheitelcoordinaten dieser Parabel sind

$$\frac{n}{2} = a \quad \text{und} \quad -\frac{n^2}{4\,m} = \frac{\vartheta}{\cos\alpha}$$

(ϑ kritische Temperatur); also $n = 2\,a = 0{,}8928$

$$m' = \frac{m}{\cos\alpha} = \frac{y^2 - n\,y}{t}.$$

Setzt man in dieser Gleichung nacheinander die vier beobachteten Werthe von d bez. D ein, so erhält man

$$m' = 0{,}0004680 = 0{,}0004659$$
$$m' = 0{,}0004804 = 0{,}0004820$$
$$m' = 0{,}0004959 = 0{,}0004904$$
$$m' = 0{,}0005293 = 0{,}0005302.$$

Die Werthe der Constante werden also immer grösser, wenn man von niedrigen zu höheren Temperaturen fortschreitet, was auf eine regelmässige Abweichung von der Parabelgestalt deutet. Diese Abweichung ist sehr bedeutend; denn berechnet man mit dem Mittelwerth von $m' = 0{,}000\,493\,2$ die kritische Temperatur $\vartheta = -(n^2/4\,m')$, so findet man 452° anstatt des beobachteten[1]) Werthes 320°. Die Curve, welche die Dichten als Function der Temperatur darstellt, ist also im Vergleich mit dieser Parabel erheblich abgeplattet; sie wurde aus den beobachteten Werthen D und d auf graphischem Wege für das Intervall 190° bis 280° construirt. Die aus der Curve abgelesenen Werthe von D und d und ihre reciproken Werthe S und s sind in beistehender Tabelle für Intervalle von 10° angegeben; die Curve selbst ist beigefügt (vgl. Taf. VII). In einer zweiten Tabelle sind die aus der Curve entnommenen Werthe von S und s mit den aus der Beobachtung direct abgeleiteten verglichen.

Tabelle 5.

T	D	d	S	s	T	D	d	S	s
190	0,687	0,022	1,455	45,5	240	0,614	0,048	1,629	20,8
200	0,672	0,026	1,488	38,5	250	0,594	0,057	1,684	17,5
210	0,658	0,030	1,520	33,3	260	0,574	0,066	1,742	15,1
220	0,644	0,035	1,553	28,6	270	0,554	0,076	1,805	13,2
230	0,630	0,040	1,587	25,0	280	0,534	0,085	1,873	11,8

1) Pawlewski, Chem. Ber. 21. p. 2141. 1888.

Tabelle 6.

T	Beobachtet		Aus der Curve	
	S	s	S	s
190	1,455	45,2	1,455	45,5
212	1,525	32,0	1,527	32,4
237	1,613	22,0	1,616	22,1
276	1,841	12,1	1,846	12,3

II. Orthoxylol.

Siedepunkt 141°; specifisches Gewicht bei 18°: 0,8790. Es wurde wieder die Curve der Dichten construirt, deren Durchmesser der Gleichung

$$\varDelta = 0{,}4578 - 0{,}000481\,t$$

entspricht. Die nach dieser Formel berechneten Werthe sind in Tab. 8 mit den aus der Beobachtung sich ergebenden Grössen $(d + D)/2$ verglichen und zeigen die Richtigkeit des **Matthias**'schen Gesetzes für Orthoxylol. Aus der Curve sind die Werthe d und D für Intervalle von 10° abgelesen und die zugehörigen Grössen s und S berechnet (Tab. 7).

Tabelle 7.

T	S	s	D	d	T	S	s	D	d
190	1,396	71,4	0,716	0,014	240	1,524	35,7	0,656	0,028
200	1,418	62,5	0,705	0,016	250	1,560	29,4	0,641	0,034
210	1,441	52,6	0,694	0,019	260	1,600	25,0	0,625	0,040
220	1,466	47,6	0,682	0,021	270	1,642	21,7	0,609	0,046
230	1,493	41,7	0,670	0,024	280	1,686	19,2	0,593	0,052

Tabelle 8.

T	$\frac{d + D}{2}$	$\varDelta$
190	0,3663	0,3664
212	0,3546	0,3558
237	0,3459	0,3438
276	0,3249	0,3250

III. Paraxylol.

Siedepunkt 137°; Schmelzpunkt 13,0°; specifisches Gewicht bei 18°: 0,8620.

Der Durchmesser entspricht der Gleichung

$$\Delta = 0{,}3902 - 0{,}00344\, t.$$

Tabelle 9.

T	$\frac{d+D}{2}$	Δ
190°	0,3237	0,3248
212	0,3163	0,3172
237	0,3127	0,3086
276	0,2938	0,2952

Tabelle 10.

T	D	d	S	s	T	D	d	S	s
190°	0,620	0,028	1,613	35,7	240°	0,575	0,041	1,739	24,4
200	0,612	0,030	1,634	33,3	250	0,562	0,045	1,779	22,2
210	0,603	0,032	1,658	31,3	260	0,548	0,051	1,825	19,6
220	0,594	0,035	1,684	28,6	270	0,534	0,057	1,873	17,5
230	0,585	0,038	1,710	26,3	280	0,520	0,062	1,923	16,1

IV. Metaxylol.

Siedepunkt 138°; specifisches Gewicht bei 18°: 0,8667. Die Durchmessergleichung wird

$$\Delta = 0{,}4385 - 0{,}000438\, t.$$

Tabelle 11.

T	$\frac{D+d}{2}$	Δ
190	0,3552	0,3553
212	0,3457	0,3457
237	0,3351	0,3348
276	0,3175	0,3177

Tabelle 12.

T	D	d	S	s	T	D	d	S	s
190	0,690	0,020	1,449	50,0	240	0,629	0,038	1,590	26,3
200	0,678	0,023	1,475	44,5	250	0,615	0,043	1,626	23,3
210	0,666	0,026	1,501	38,5	260	0,600	0,048	1,667	20,8
220	0,654	0,030	1,529	33,3	270	0,585	0,054	1,709	18,5
230	0,642	0,034	1,557	29,4	280	0,570	0,060	1,754	16,7

V. Propionsäure.

Siedepunkt 140°; specifisches Gewicht bei 18°: 1,005. Die Gleichung des Durchmessers ist:

$$\Delta = 0{,}5212 - 0{,}000605\, t.$$

Tabelle 13.

T	$\frac{d+D}{2}$	Δ
190	0,4052	0,4053
212	0,3928	0,3932
237	0,3779	0,3781
275	0,3538	0,3538

Tabelle 14.

T	D	d	S	s	T	D	d	S	s
190	0,800	0,0103	1,250	97,2	240	0,722	0,029	1,383	34,4
200	0,786	0,013	1,272	77,0	250	0,703	0,036	1,422	27,8
210	0,772	0,016	1,295	62,5	260	0,682	0,044	1,466	22,7
220	0,756	0,019	1,323	52,7	270	0,662	0,052	1,511	19,2
230	0,740	0,023	1,351	43,5	280	0,642	0,060	1,558	16,7

VI. Normale Buttersäure.

Siedepunkt 162°; specifisches Gewicht bei 18°: 0,969. Die Gleichung des Durchmessers ist:

$$\Delta = 0{,}4953 - 0{,}000528\, t.$$

Tabelle 15.

T	$\frac{d+D}{2}$	Δ
190°	0,3950	0,3950
212	0,3830	0,3834
237	0,3690	0,3702
275	0,3496	0,3501

Tabelle 16.

T	D	d	S	s	T	D	d	S	s
190°	0,790	0,0033	1,266	300	240°	0,713	0,020	1,403	50.0
200	0,774	0,006	1,292	166	250	0,699	0,024	1,430	41,7
210	0,758	0,009	1,319	111	260	0,685	0,028	1,460	34,3
220	0,743	0,012	1,346	83,3	270	0,671	0,032	1,490	31,2
230	0,728	0,016	1,373	62,5	280	0,657	0,036	1,520	27,8

Die Versuche bei 190° liefern so grosse Werthe von r, dass dieselben nur geringe Ansprüche auf Genauigkeit machen können. Der Werth $d_{190} = 0{,}0033$ ist kleiner als die normale Dampfdichte 0,00395; wenn dieser Werth aber auch etwas fehlerhaft sein kann, so lässt sich doch durch diesen Umstand allein das auffällig rasche Abnehmen der Dampfdichte mit der Temperatur nicht erklären.

VII. Isobuttersäure.

Siedepunkt 153°; specifisches Gewicht bei 18°: 0,959. Die Gleichung des Durchmessers wird

$$\Delta = 0{,}4965 - 0{,}000573\ t.$$

Tabelle 17.

T	$\frac{D+d}{2}$	Δ
190°	0,3877	0,3876
212	0,3760	0,3750
237	0,3612	0,3607
275	0,3396	0,3389

Tabelle 18.

T	D	d	S	s	T	D	d	S	s
190°	0,762	0,013	1,311	77,7	240°	0,692	0,027	1,445	37,0
200	0,750	0,014	1,333	71,4	250	0,673	0,033	1,486	30,3
210	0,738	0,015	1,355	66,7	260	0,654	0,040	1,529	25,0
220	0,724	0,018	1,381	55,5	270	0,636	0,048	1,572	20,8
230	0,708	0,022	1,412	45,4	280	0,618	0,057	1,618	17,5

Zur Theorie.

1. Die Beobachtungen gestatten eine directe Bestimmung der Constanten a und b der van der Waals'schen Zustandsgleichung:

$$p = \frac{R\,T}{v - b} - \frac{a}{v^2}.$$

Die Versuche liefern nämlich für das specifische Volumen v zwei Werthe, S für die Flüssigkeit, und s für den Dampf, welche beide derselben Temperatur und demselben Druck entsprechen; also

$$\text{(I)} \qquad p = \frac{R\,T}{S - b} - \frac{a}{S^2} = \frac{R\,T}{s - b} - \frac{a}{s^2}.$$

Ferner gilt für die Sättigungscurve die aus der Thermodynamik bekannte Gleichung:

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,d\,v = p_1\,(v_2 - v_1).$$

Setzt man den aus Gleichung (I) genommenen Werth von p hier ein und führt die Integration aus (wobei mit den bisher angewandten Bezeichnungen $v_2 = S$, $v_1 = s$ zu setzen ist), so erhält man

$$\text{(II)} \qquad R\,T\log.\left(\frac{S-b}{s-b}\right) + a\,\frac{s-S}{s\,.\,S} = (S - s)\left(\frac{R\,T}{s-b} - \frac{a}{s^2}\right).$$

Aus den beiden Gleichungen (I) und (II) ergiebt sich durch Elimination von a:

$$(s-b)\,(S-b)\log\cdot\left(\frac{S-b}{s-b}\right) = \frac{2\,S\,.\,s\,(S-s)}{s+s} - (S-s)\,b\,.$$

Da diese Gleichung nicht direct auflösbar ist, so wurden ihre beiden Theile

$$(s-b)(S-b)\log\frac{S-b}{s-b}=y$$

und

$$\frac{2Ss(S-s)}{S+s}-(S-s)b=y$$

als Curven construirt und aus ihrem Schnitt der Werth von b entnommen. Es ist dann ferner

$$a=\frac{RTS^2s^2}{(S-b)(s-b)(S+s)},$$

wo

$$R=\frac{\text{absolute Gasconstante}}{\text{Moleculargewicht}}=\frac{81{,}49}{m}.$$

Die bei jeder untersuchten Substanz für drei Temperaturen berechneten Werthe der Constanten b und a zeigen untenstehende Tabellen. Hieraus ergiebt sich, dass b mit der Temperatur langsam wächst, während a im allgemeinen abnimmt; nur bei Paraxylol wird auch a mit der Temperatur grösser.

Tabelle 19.

T	Toluol	
	b	a
200°	1,105	2456
230	1,120	2365
270	1,145	2270

Tabelle 20.

T	Orthoxylol		Paraxylol		Metaxylol	
	b	a	b	a	b	a
190°	1,097	2311	1,185	2143	1,110	2191
230	1,120	2291	1,210	2226	1,125	2192
270	1,135	2183	1,295	2469	1,150	2130

Tabelle 21.

T	Propionsäure		*n*-Buttersäure		Isobuttersäure	
	b	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*
190°	0,990	3058	1,067	3451	1,040	2709
230	1,025	3081	1,080	3002	1,072	2715
270	1,040	2836	1,087	2752	1,100	2581

Die „Constanten" sind also nicht vollständig constant, d. h. die Zustandsgleichung entspricht den wirklichen Verhältnissen nur angenähert; dieses Resultat war vorauszusehen, da alle bisherigen Vergleiche der Theorie mit dem Versuch dasselbe ergeben haben. Die zahlreichen anderen, von verschiedenen Autoren nach dem Muster von van der Waals aufgestellten Zustandsgleichungen enthalten stets mehr als zwei Constanten, welche daher aus den hier besprochenen Versuchen mit Hülfe obiger Gleichungen nicht direct berechnet werden können.

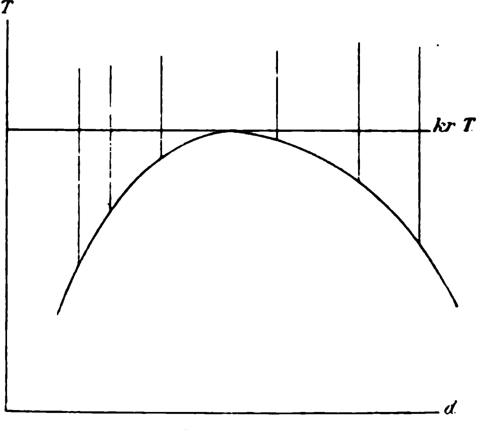


Fig. 4.

2. *Theorie des kritischen Punktes.* Die Dichten von Flüssigkeit und Dampf im Sättigungszustand stellen sich als Functionen der Temperatur in Form zweier Curven dar, welche nach der herrschenden Theorie an der kritischen Temperatur ineinander übergehen sollen, indem sie dort ein Maximum der jetzt geschlossenen Curve bilden; dieser Maximalpunkt, an dem die Curve die Abscisse der kritischen Temperatur berührt, heisst der kritische Punkt, das ihm entsprechende Volumen das kritische Volumen.

Lässt man nun in einer geschlossenen Röhre, welche eine bestimmte Quantität Substanz theils als Flüssigkeit, theils als Dampf enthält, die Temperatur wachsen, so wird die gleich-

zeitige Aenderung der Dichten in der Fig. 4 durch zwei Punkte dargestellt, die entlang den beiden Aesten der Sättigungscurve fortschreiten und solange auf ihr bleiben, als im Rohr Flüssigkeit und Dampf vorhanden sind. Dehnt sich die Flüssigkeit so stark aus, dass sie das ganze Rohr erfüllt, oder verdampft so viel Substanz, dass das Rohr nur mehr Dampf enthält, so hört die eine abbildende Linie auf, während die andere die Sättigungscurve verlässt und entlang der Ordinate weitergeht. Denn jetzt befindet sich eine homogene Substanz von unveränderlichem Gewicht im Rohr von unveränderlichem Volumen, die Dichte ist also constant.

Ist dagegen die Füllung so gewählt, dass beim Erreichen der kritischen Temperatur noch Flüssigkeit und Dampf im Rohr vorhanden sind, so müssen beide Aeste der Sättigungscurve vollständig bis zur kritischen Temperatur durchlaufen werden. Oberhalb dieser Grenze wird die Substanz plötzlich homogen, die abbildende Curve setzt sich also entlang einer Ordinate fort, die nur vom Verhältniss der verwandten Substanzmenge zum Rohrvolumen abhängig ist, also sehr verschiedene Lagen haben kann, da es in der Willkür des Beobachters liegt, wieviel Substanz das Rohr enthält.

Bezeichnen nun d_1 und d_2 die Dichten von Dampf und Flüssigkeit bei einer Temperatur unterhalb der kritischen, v_1 und v_2 die von beiden eingenommenen Volumentheile, V das Gesammtvolumen des Rohres, d die Dichte der homogen gewordenen Substanz bei einer Temperatur oberhalb der kritischen, endlich p das Gewicht der Füllung, so ist

$$V d = v_1 d_1 + v_2 d_2 = p,$$

(I)
$$d = d_1 + \frac{(d_2 - d_1) v_2}{V},$$

also

$$d_2 \geqq d \geqq d_1,$$

und da d mit der Füllung willkürlich veränderlich ist:

$$d_2 > d_1.$$

Hierbei kann d_2 und d_1 bei jeder Temperatur genommen werden, bei welcher noch Flüssigkeit und Dampf im Rohr vorhanden sind, d. h. bis zum Verschwinden des Meniscus. Bezeichnen also δ_1 und δ_2 die Dichten des gesättigten Dampfes

und der Flüssigkeit an der kritischen Temperatur vor diesem Verschwinden der Trennungsfläche, so gilt auch hier:

$$\delta_2 > \delta_1 ,$$

d. h. die Dichten des gesättigten Dampfes und der Flüssigkeit bei der kritischen Temperatur sind nicht gleich; die beiden Sättigungscurven gehen nicht ineinander über, sondern treffen die kritische Temperatur in zwei verschiedenen Punkten, *A* und *B*. (Vgl. Fig. 5.)

Aus Gleichung (I) ergeben sich für die kritische Temperatur die Grenzwerthe von *d*:

$$d = \delta_1 \text{ für } v_2 = 0 ,$$

$$d = \delta_2 \text{ für } v_2 = V, \text{ d. h. } v_1 = 0 ,$$

d. h. die Dichte des gesättigten Dampfes an der kritischen Temperatur ist gleich der Dichte der homogen gewordenen Substanz bei derjenigen Füllung, bei welcher bei der kritischen Temperatur gerade alle Flüssigkeit verdampft ist; die Dichte der Flüssigkeit unter Sättigungsdruck an der kritischen Temperatur ist gleich der Dichte der homogen gewordenen Substanz bei derjenigen Füllung, bei welcher bei der kritischen Temperatur die Flüssigkeit das Rohr gerade ganz ausfüllt.

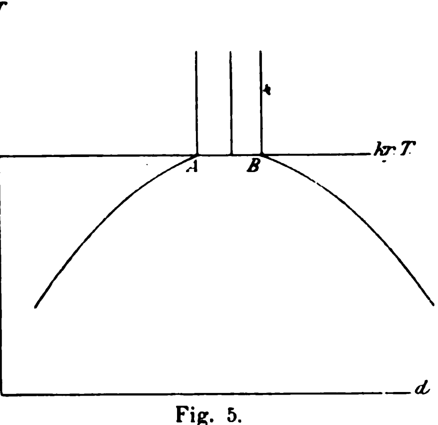


Fig. 5.

Der Deutlichkeit halber sei das Resultat obiger Entwickelung nochmals kurz zusammengefasst:

a) Oberhalb der kritischen Temperatur ist die Dichte der Substanz jedenfalls durch eine Ordinate dargestellt, deren Lage mit der Füllung willkürlich geändert werden kann, etwa durch *Cc* oder *Dd* oder etc.; die äussersten möglichen Lagen derselben seien *Aa* und *Bb*. (Fig. 6.)

b) Unterhalb der kritischen Temperatur sind die Dichten von Flüssigkeit und Dampf nach der herrschenden Theorie durch die Curven $l m K$ bez. $l' m' K$ dargestellt.

c) Demgegenüber wird behauptet, der Verlauf dieser Curven sei $l' m' A$ bez. $l m B$.

Beim Ueberschreiten der kritischen Temperatur findet also in beiden Fällen ein plötzlicher Uebergang der Dichten statt, entweder von K nach einem Punkt zwischen A und B, etwa C, oder von A und B zugleich nach C. Während aber

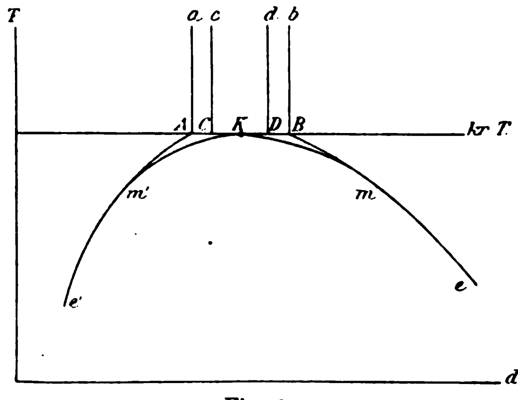


Fig. 6.

gegen diesen letzteren Weg von A und B zu C nichts einzuwenden ist, erweist sich ein Uebergang KC als unmöglich; denn in K hätte die Substanz bereits eine einheitliche Dichte; eine Aenderung derselben im geschlossenen Rohr, d. h. bei constantem Volumen, würde eine Aenderung des Gewichtes in sich schliessen, ist daher unmöglich. Hierdurch ist bewiesen, dass die Sättigungscurve die kritische Temperatur nicht berührt, sondern ihre beiden Aeste sie in zwei verschiedenen Punkten treffen. Den diesen Punkten entsprechenden gesättigten Dichten δ_1 und δ_2 gebührt der Name „kritische Dichten", denn sie gehören als dritte Variable zur „kritischen Temperatur" und zum „kritischen Druck", der ja als Sättigungsdruck bei der kritischen Temperatur definirt ist.

Nach dem Gesetz von Matthias[1]) wird die „kritische

1) E. Matthias, Compt. rend. **115**. p. 35. 1890.

" als Schnittpunkt des Durchmessers mit der kritischen ratur bestimmt; diese Dichte

$$\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$$

icht offenbar dem Mittelpunkt von *A B*. Aus Gleichung (I)

$$d = \frac{d_1 + (d_2 - d_1) v_2}{V}$$

man, dass dieser Mittelwerth dann wirklich erreicht wenn $v_1 = v_2$ ist, d. h. der Meniscus gerade in der Mitte öhre verschwindet; dieses δ entspricht dann aber der en gewordenen Substanz, keinem gesättigten Zustand ldet daher mit der kritischen Temperatur und dem kri- Druck keinen möglichen Zustand der Substanz; daher it δ auch nicht den Namen einer „kritischen" Dichte.

ede experimentelle Bestimmung, welche den verschwin- Meniscus beobachtet, muss die Grössen δ_1 und δ_2 . Denn da sie auf der Beobachtung einer Trennungs- beruht, so setzt sie noch zwei getrennte Theile, Flüssig- nd Dampf, voraus. Dennoch behaupten verschiedene n auf Grund ihrer Versuche, die Dichten von Flüssig- nd Dampf seien an der kritischen Temperatur gleich, agat[1]) und Young[2]) bei Gelegenheit der Untersuchung entan. Sie finden nämlich, dass bei den höchsten be- eten Temperaturen beide Grössen so rasch aufeinander en, dass die bei der kritischen Temperatur, welche einige l, ja einige Hundertstel Grade höher liegen soll, einander würden. Offenbar braucht man die kritische Temperatur ige Hundertstel Grade niederer anzunehmen, um zu dem engesetzten Resultat zu gelangen, und da die Erscheinungen ischen Zustand eine so genaue Bestimmung dieser Tempe- unmöglich mit Sicherheit ausführen lassen, so muss an- s der logischen Unmöglichkeit, zu der er führt, dieser der genannten Beobachter als unstatthaft angesehen

E. H. Amagat, Compt. rend. 114. p. 1093 u. 1322. 1892; Physik. . p. 37. 1892.

S. Young, Journ. Chem. Soc. 71. p. 446. 1897.

werden. Hier ist hervorzuheben, dass wenn auch wenige Bruchtheile eines Grades über der letzten beobachtbaren Temperatur die Dichtecurven ineinander übergehen würden, doch ihre thatsächlich gefundenen Endwerthe nicht in gleichem Maasse nahe aneinander liegen, da die Curven hier eben sehr flach verlaufen.

Battelli[1]) führt für die Gleichheit der kritischen Dichten einen theoretischen Grund an. Er sagt: In Gleichung

$$A\,u\left(T\frac{dp}{dT}-p\right)=0\,,$$

wo u die Differenz der specifischen Volumina bedeutet, muss entweder u oder der Klammerausdruck $=0$ sein; letzterer lässt sich berechnen und ist nicht $=0$; also ist $u=0$. Die angeführte Gleichung ist offenbar aus der bekannten Beziehung abgeleitet:

$$r=T\,u\frac{dp}{dt}\,,$$

wo r die Verdampfungswärme bedeutet. Zerlegt man dieselbe in die innere Verdampfungswärme ϱ, welche die Energie der Molecüle vermehrt, und die äussere, welche die Ausdehnungsarbeit $p\,u$ leistet, und setzt an der kritischen Temperatur $\varrho=0$, so erhält man die von Battelli angeführte Gleichung. Offenbar liegt aber in der Voraussetzung $\varrho=0$ bereits die Annahme, dass Dampf und Flüssigkeit identisch sind, der Schluss von Battelli ist also nicht stichhaltig.

Auch die Darstellung von Stoletow[2]) in seiner Arbeit über den kritischen Zustand ist nicht einwurfsfrei. Er nimmt nämlich an, die abbildende Curve gehe nur dann durch den „kritischen Punkt“, wenn der Meniscus in der Mitte des Rohres verschwindet, während sie in jedem anderen Fall die kritische Temperatur an einem etwas seitwärts gelegenen Punkt überschreite. Da aber unterhalb der kritischen Temperatur stets Flüssigkeit und Dampf im gesättigten Zustand vorhanden sind, so ist hier ein Abweichen von der

1) A. Battelli, Physik. Revue 1. p. 264. 1892.
2) A. G. Stoletow, Physik. Revue 2. p. 44. 1892.

Sättigungscurve unmöglich, die Dichten sind durch die Temperatur allein vollständig bestimmt; erst oberhalb derselben werden sie von der Füllung abhängig, erst hier also kann die abbildende Curve sich verzweigen.

Eine vollständig hiervon verschiedene Auffassung vertritt Boltzmann in den „Vorlesungen über Gastheorie", II, p. 21: Er nimmt an, der Meniscus verschwinde überhaupt nicht wirklich in der Röhre, sondern wandere auch bei der kritischen Temperatur stets nach einem Ende, wobei er jedoch so undeutlich würde, dass man ihn in den letzten Momenten nicht mehr sehen soll. Diese Darstellung ist der einzige Ausweg, bei welchem die Annahme *einer* kritischen Dichte bestehen kann, scheint aber den Versuchsresultaten direct zu widersprechen; denn aus den Angaben der verschiedenen Experimentatoren ergiebt sich, dass der Meniscus an einer *ganz bestimmten* Stelle im Rohr verschwindet.

Ueberträgt man die ausgeführten Betrachtungen in ein Coordinatensystem mit Druck und specifischem Volumen als Variablen, so ergiebt sich eine der früheren ganz ähnliche Figur: die beiden Grenzcurven vereinigen sich nicht, da für den kritischen Druck die Dichten nicht gleich sind, sie sind vielmehr durch das horizontale Stück der kritischen Isotherme verbunden. Die Curve hat also kein bestimmtes Maximum, die Annahme von van der Waals, dass am „kritischen" Punkt

$$(1) \quad \frac{dp}{dv} = 0, \qquad (2) \quad \frac{d^2 p}{d v^2} = 0$$

sei, wird hinfällig; denn die erste Gleichung gilt für alle Punkte auf AB, die zweite für keinen, ein „kritischer Punkt" existirt nicht. Van der Waals hat aus obigen Gleichungen den Zusammenhang der kritischen Grössen mit den Constanten seiner Zustandsgleichung abgeleitet, hieraus die reducirte Zustandsgleichung und schliesslich die Theorie der correspondirenden Zustände.

Die Grundlage dieser ganzen Entwickelung wird daher hinfällig; dagegen lässt sich aus dem vorhergehenden kein Schluss gegen die van der Waals'sche Anschauung ziehen, dass es möglich sei, die individuellen Constanten der Substanz

aus der Zustandsgleichung durch Einführung der kritischen Grössen zu entfernen; als solche müssen dann aber neben Temperatur und Druck die beiden kritischen Dichten von Flüssigkeit und Dampf angesehen werden. Erst wenn der Zusammenhang dieser Grössen mit den Constanten der (richtigen) Zustandsgleichung ermittelt ist, lässt sich die Frage entscheiden, ob eine „reducirte“ Zustandsgleichung und „correspondirende“ Zustände existiren.

Es erübrigt mir, dem Leiter des Institutes, Hrn. Professor Dr. E. von Lommel, sowie Hrn. Professor Dr. L. Graetz, von dem die Anregung zu dieser Arbeit ausging, meinen Dank für ihre liebenswürdige Unterstützung auszusprechen.

(Eingegangen 7. Juni 1899.)

---

7. *Elektrische Abbildungen;* *von L. Fomm.*

(Hierzu Taf. VIII, Fig. 1—5.)

Berührt man mit einem elektrisch geladenen, metallischen iter einen Punkt einer nicht leitenden Platte, z. B. von rtgummi, und giebt dann durch ein leinenes Säckchen ein menge von Mennige und Schwefelblumen auf die Platte, so steht bei positiver Elektricität um den Berührungspunkt ein ber Stern, bei negativer ein rundlicher rother Fleck. Diese guren wurden 1777 von Lichtenberg entdeckt und tragen nen Namen. Sie dienen, in obiger Weise erzeugt, als Unterıeidungsmittel zwischen positiver und negativer Elektricität. besonders schöner und einfacher Weise lässt sich namentı die positive Figur folgendermaassen erzeugen.

Man legt auf zur Erde abgeleitetes Stanniol eine Glastte und übergiesst letztere mit einer dünnen Schicht Schmieröl, solches zu Gasmotoren verwendet wird. Auf die Mitte der tte wird ein zugespitzter Metallstab gesetzt, den man mit n positiven Pol einer Influenzmaschine verbindet, während negative Pol zur Erde abgeleitet ist.

Setzt man die Maschine in Thätigkeit, so schiesst das Oel h allen Richtungen auseinander, eine strahlenförmige Figur lend, die sich noch einige Zeit nach Einwirkung der Elektriit erhält. Später breitet sich das Oel wieder gleichmässig r die Glasplatte aus, und der Versuch kann wiederholt den. Die entstehende Figur ist dabei um so grösser, je ıere Spannung die Elektricität besitzt und je dünner die splatte ist.

Stellt man den Versuch im verdunkelten Zimmer an, so gt sich, dass die Entstehung der Figur mit einer Lichtheinung verknüpft ist. Von der Spitze des metallischen eiters schiessen längs der Platte blaue Büschel nach allen htungen. Diese Büschel sind photographisch wirksam und ist desshalb leicht, sich ein dauerndes Bild von dieser trischen Erscheinung zu verschaffen, indem man einfach

die photographische Platte mit der Glasseite auf ein zur Erde abgeleitetes Stanniolblatt legt und die metallische Spitze auf die Schichtseite setzt. In wenigen Secunden ist die Platte entwickelungsfähig. Schon Friedländer hat diese Erscheinung auf solche Weise abgebildet.

Es ist nicht gleichgültig, aus welchem Stoff die Flächen sind, die man der elektrischen Entladung aussetzt. Hat man isotrope Stoffe, wie Glas, Ebonit, Harz etc., so breiten sich die Strahlen nach allen Seiten gleichmässig aus.

Dieses ist bei anisotropen, d. h. bei solchen Körpern, deren inneres Gefüge nach verschiedenen Seiten verschiedene Beschaffenheit besitzt, z. B. bei Holz, bei ein- und zweiaxigen Krystallen etc., nicht mehr der Fall, wie schon G. Wiedemann und von Bezold gezeigt haben. Auf solchen Platten sind die Lichtbüschel elliptisch ausgebildet. Auf Holz, welches senkrecht zur Wachsthumsrichtung geschnitten ist, verbreiten sich die Büschel, vorausgesetzt, dass die metallische Spitze im Kerne aufgesetzt ist, allerseits gleichmässig. In diesem Falle ist nämlich die Structur des Holzes nach allen Richtungen der Oberfläche gleichartig. Bei jedem anderen Schnitte dagegen tritt elliptische Form auf, und zwar steht die grosse Axe der Ellipse senkrecht zur Längsfaser des Holzes. Es zeigt sich also hier, dass die Art des Stoffes einen wesentlichen Einfluss auf die Bildung der elektrischen Büschel ausübt.

Beschäftigt mit Versuchen über die Art dieses Einflusses habe ich eine Reihe von Erscheinungen erhalten, von denen ich hier einige mittheilen möchte.

Legt man auf ein Stanniolblatt eine wenige Millimeter dicke sehr trockene Holzplatte und bedeckt letztere so mit photographisch sehr empfindlichem Papier — Eastman paper —, dass die Papierseite dem Holze, die Schichtseite der elektrischen Spitze, diese berührend, zugewandt ist, so zeigt sich auf dem entwickelten Papier deutlich ein von Strahlen gebildeter Kreis, wenn das Holz senkrecht, dagegen eine Ellipse (vgl. Taf. VIII, Fig. 1), wenn das Holz in anderer Weise zur Wachsthumsrichtung geschnitten ist. Bei genauer Betrachtung von Fig. 1 bemerkt man, dass in dem erhaltenen Bilde neben der strahligen Figur auch noch die Structur des Holzes ausgeprägt ist. Dies veranlasste mich, Versuche anzustellen, inwieweit sich Structur-

eigenthümlichkeiten des Holzes elektrophotographisch abbilden lassen. Die Versuche wurden in folgender Weise angestellt:

Die mit Glaspapier fein geschliffene, sehr trockene Holzplatte bedeckt empfindliches Papier mit der Schichtseite dem Holze zugekehrt. Ueber dem Ganzen, das wie oben auf einem zur Erde abgeleiteten Stanniolblatt liegt, befindet sich in einer Entfernung von ungefähr 5 cm die metallische Spitze. Diese wird in diesem Falle mit Vortheil mit dem negativen Pole der Influenzmaschine verbunden, während der positive zur Erde abgeleitet ist, da das kleine negative Büschel weniger das lichtempfindliche Papier als Nebenlicht beeinflusst, als es die grossen positiven Büschel thun. Nach einer Minute ist bei einer kleiner, nach 10 Secunden bei einer grösseren einfachen Influenzmaschine das Papier genügend exponirt, um ein kräftiges Bild beim Entwickeln zu liefern. Figg. 3, 4 und 5, Taf. VIII sind solche elektrophotographisch hergestellte Bilder. Bei sämmtlichen Hölzern sind die Jahresringe deutlich abgebildet. Der physikalische Vorgang ist dabei folgender: das photographische Papier wird durch die aus der Spitze strömende Elektricität negativ geladen. Zwischen dem Papier und der Holzplatte befindet sich eine dünne Luftschicht, die luminescirend wird und zwar mit blauem, photographisch wirksamem Lichte. Diese elektrische Entladungserscheinung ist nicht an allen Stellen des Holzes gleich kräftig; an den Jahresringen ist sie am bedeutendsten und deshalb leuchtet die Luft hier stärker, als an anderen Stellen, was auf der empfindlichen Schicht zum Ausdruck gelangt. Die hier auftretende Glimmlichterscheinung lässt sich im dunkeln sehr schön mit dem Auge beobachten, wenn man statt des photographischen Papieres ein seidenes Tuch oder ein sehr feinmaschiges Drahtnetz über das Holz breitet. Man sieht dann das Holz mit blauem Glimmlichte bedeckt, in welchem sich die Structur durch grössere oder geringere Kraft des Leuchtens deutlich ausprägt.

Fig. 2, Taf. VIII stellt das photographisch, Fig. 3, Taf. VIII das elektrophotographisch erhaltene Bild eines und desselben Holzschnittes dar und zwar ist Fig. 2 ein Positiv, Fig. 3 das direct erhaltene Negativ; letzteres giebt desshalb auch eine linke Ansicht. Die Aehnlichkeit der beiden Bilder ist nur eine zu fällige. Thatsächlich hat das elektrophotographische Bild mit

dem optischen Charakter der Oberfläche des Holzes gar nichts zu thun, sondern es gelangt in diesem Bilde im wesentlichen der stoffliche Inhalt des Holzes zum Ausdruck. Dieses zeigt sich sehr schön an den Figg. 4 und 5, Taf. VIII.

Bekanntlich laufen vom Kerne des Baumes aus radiale Strahlen, die sogenannten Markstrahlen, welche sich durch einen gewissen Glanz, den sogenannten Spiegel, auszeichnen. Diese Markstrahlen sieht man schön bei Eichen und Buchenholz. Stellen wir aus diesen beiden Holzarten Platten her, und zwar sogenannte Hirnschnitte, so erscheinen die Jahresringe bei beiden Holzarten dunkel, die Markstrahlen hell für das Auge. Anders gestaltet sich das elektrophotographische Bild. In Fig. 4 (Eichenholz) und Fig. 5 (Buchenholz) sind die Jahresringe dunkel; dagegen sind die Markstrahlen im Eichenholz hell, im Buchenholz dunkel abgebildet. Machen wir bei beiden Holzarten mikroskopische Schnitte von den Markstrahlen, so zeigt die Untersuchung, dass dieselben beim Eichenholz reich, beim Buchenholz arm an Stärkekörnern sind, ein Beweis, dass im elektrophotographischen Bilde nicht der optische Charakter, sondern die Eigenart des Holzes zum Ausdruck gelangt, was für den Botaniker von Interesse sein dürfte.

Auch ohne Zuhülfenahme der Photographie lassen sich in einfachster Weise dauernde Abbildungen der Eigenthümlichkeiten des Holzes auf elektrischem Wege erhalten. Man legt auf die Holzplatte, welche sehr trocken sein muss, ein Blatt Papier und siebt, während die Influenzmaschine im Gange ist, irgend ein feines Pulver, z. B. Mennige oder Graphit, darauf. Das Pulver kann aus leitendem oder nichtleitendem Material sein. Sofort erscheint das Bild des Holzes, in dem sich das Pulver hauptsächlich auf den Jahresringen lagert.

München, am 2. Juli 1899.

(Eingegangen 3. Juli 1899.)

8. *Ueber eine zweckmässige Anordnung des Mac Farlan Moore'schen Vacuumvibrators; von J. Elster und H. Geitel.*

Im April des Jahres 1896 zeigte Hr. Mac Farlan Moore in dem „American Institute of Electrical Engineers“ eine neue elektrische Beleuchtungsart, bei welcher evacuirte zum Theil elektrodenlose Röhren von etwa 2 m Länge und 5 cm Dicke zu hellem, gleichmässigem Leuchten angeregt wurden. Jede Röhre entwickelte dabei eine Lichtstärke, welche der einer gewöhnlichen Glühlampe von 16 NK. etwa gleichkam.[1])

Den Kern der Erfindung bildete dabei die Verwendung eines im Vacuum schwingenden Wagner'schen Hammers. Bei genügender Luftleere verläuft selbst bei Benutzung hochgespannter Ströme die Stromunterbrechung in diesem Apparate so rasch und erfolgt so vollkommen, dass die Selbstinduction in einer vorgeschalteten, kurzen Drahtspirale bis zum Funkenübergange gesteigert werden kann. Von der Anbringung einer Secundärspule kann daher ganz abgesehen werden. Mac Farlan Moore knüpfte an die Erfindung dieses Beleuchtungssystems grosse Erwartungen, die sich jedoch nicht zu verwirklichen scheinen. Immerhin muss aber anerkannt werden, dass der „Vacuumvibrator“ an sich ein interessanter Apparat ist und dass er, in Verbindung mit einer geeigneten Drahtspule, ein kleines Inductorium zu ersetzen vermag.[2])

Bei gelegentlichem Arbeiten mit einem derartigen Vibrator zeigte sich ein Uebelstand, der eine *andauernde* Verwenduug des Apparates unmöglich machte. Solange nämlich die elastische Feder des Vibrators lebhaft schwingt, geht selbst bei Anschluss einer Leitung von 50 bis 100 Volt Klemmenspannung ein Strom von nur wenigen Ampère durch den Apparat hindurch. Sobald jedoch die schwingende Feder an

1) Mac Farlan Moore, Elektrotechn. Zeitschr. 17. p. 637. 1896.
2) Vgl. J. Tuma, Beibl. 21. p. 767. 1897.

der Spitze, an welcher die Unterbrechung erfolgt, klebt — und dies tritt sehr leicht ein —, so steigert sich die Stromintensität plötzlich so, dass die Spitze abschmilzt, wobei meist auch die Feder erglüht und das Glas an den Einschmelzstellen springt.

Die Haltbarkeit des Vibrators lässt sich nun bei einigermaassen vorsichtiger Behandlung dadurch ganz wesentlich erhöhen, dass man *zwei* Stromkreise, einen niedrig- und einen hochgespannten, in Anwendung bringt, von denen der erstere lediglich dazu benutzt wird, den Vibrator durch äussere magnetische Kräfte in Schwingung zu erhalten und dadurch die Unterbrechung des letzteren zu bewirken.

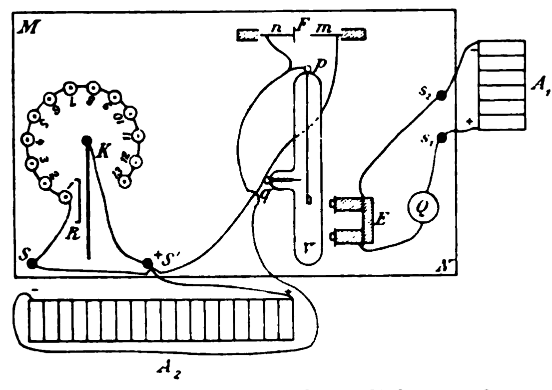
Je nach der Höhe der verfügbaren Spannung hat man Widerstände vorzuschalten, um eine gefährliche Erhitzung des Vibrators zu verhüten. Zweckmässig wählt man dazu eine Reihe von Inductionsrollen, die ihrerseits zur Erhöhung der Spannung des Extrastromes beitragen.

Diese Gesichtspunkte sind bei dem Bau des unten beschriebenen Apparates maassgebend gewesen, der für eine Maximalspannung des Primärstromes von 60—70 Volt von Müller-Unkel in Braunschweig nach unseren Angaben ausgeführt wurde.

Auf einem starken Grundbrette *MN* von 48 cm Länge und 33 cm Breite sind folgende Vorrichtungen angebracht: ein Quecksilberunterbrecher *Q*, der Vacuumvibrator *V*, unter diesem ein kleiner Elektromagnet *E* (in der Figur seitlich gezeichnet), 13 Drahtspulen (Drahtstärke ca. 1 mm) von 8 cm Höhe und 4 cm Durchmesser (Gesammtwiderstand 8 Ω), aufgesteckt auf ebensoviele vernickelte, weiche Eisenkerne von 1 cm Dicke; ferner eine Kurbel *K*, die gestattet, eine beliebige Anzahl dieser Rollen einzuschalten, und ein mit Spitze *m* und Platte *n* versehener Funkenzieher *F*. In der nachstehenden Figur sind diese einzelnen Theile schematisch angedeutet, die Träger für die einzelnen Apparate sind der Uebersichtlichkeit wegen fortgelassen.

Wie bemerkt, hat man es bei dieser Anordnung mit zwei ganz getrennten Stromkreisen zu thun. Der erste, welcher dazu dient, die Feder des Vibrators in unausgesetzten Schwingungen zu erhalten, wird unter Einschaltung eines Regulir-

widerstandes einer Accumulatorenbatterie A_1 von sechs Zellen entnommen. Dieser Strom geht von der Klemme s_1 zum Quecksilberunterbrecher Q, alsdann durch den kleinen Elektromagneten E und von dort über Klemme s_2, zum — Pol der Batterie A_1 zurück. Der Quecksilberunterbrecher ist nach dem Princip der Roget'schen Spirale construirt: eine elastische Spirale aus Kupferdraht umgiebt, frei schwebend, einen von einer Glasröhre umhüllten weichen Eisenstab, während ihr unteres Ende in ein theilweise mit Quecksilber gefülltes Gläschen eintaucht. Auf das Quecksilber wird eine mehrere Centimeter hohe Schicht destillirten Wassers gegossen. Jeder



Stromschluss bewirkt alsdann bekanntlich eine Contraction der Spirale und hebt ihr unteres Ende aus dem Quecksilber heraus, wodurch der Strom selbstthätig unterbrochen wird.

Zunächst sorge man nun dafür, dass die Spirale des Quecksilberunterbrechers und die Feder des Vacuumvibrators einigermaassen synchron schwingen, was man an der Gleichmässigkeit des auftretenden Geräusches erkennen kann. Es empfiehlt sich, mehrere Spiralen von verschiedener Windungszahl und Drahtstärke zur Hand zu haben und von diesen diejenige auszuwählen, welche den Vibrator am gleichmässigsten anregt. Die Kraft, mit der die schwingende Feder des Vibrators angetrieben wird, lässt sich durch Verschiebung des kleinen Elektromagneten E reguliren, der zu diesem Zwecke in ein Grundbrettchen eingelassen wurde, das mit sanfter Reibung in einer Nuthe gleitet.

Ist nun ein möglichst schneller und dabei möglichst

gleichmässiger Gang des Vibrators erreicht, so schreitet man zur Herstellung des zweiten Stromkreises.

Den hochgespannten Strom entnehmen wir einer kleinen Accumulatorenbatterie A_2 von 32 Elementen, deren *positiver* Pol mit der durch ein Pluszeichen gekennzeichneten Klemme S_1 verbunden wird. Diese steht ihrerseits mit der beweglichen Kurbel K in metallischem Contact. Solange man mit der Herstellung des zweiten Stromkreises beschäftigt ist, muss K an der Arretirung R anliegen; es ist alsdann ganz ausgeschlossen, dass man den Apparat etwa durch einen unrichtigen Handgriff verdirbt. Nunmehr verbindet man S mit dem Stifte q des Vibrators und die Feder p desselben mit dem negativen Pol der Batterie A_2 und führt von der Spitze m des Funkenziehers einen dünnen Draht nach q und von der Platte n einen ebensolchen nach p.

Die Verbindung der dreizehn Drahtspulen untereinander ist in folgender Weise erreicht: Der eine Pol der mit Nr. 13 bezeichneten Spule steht mit dem in ihr befindlichen, vernickelten Eisenkerne in Contact, während der andere mit dem freien Ende der Spule Nr. 12 verlöthet wurde u. s. f. Die oberen Kuppen der Eisenkerne dienen also als Contacte, über die der bewegliche Metallarm bei seiner Drehung hinweggleitet.

Sobald K den Contact Nr. 13 berührt, so fliesst demnach der positive Strom der Accumulatoren von S_1 durch die dreizehn Rollen, von dort in den Vibrator und aus diesem zur Batterie zurück. (Es ist zu beachten, dass *entgegengesetzte* Stromesrichtung leicht zu starker Wärmeentwickelung im Innern des Vibrators Veranlassung giebt und so den Apparat gefährdet.)

Bei einer Klemmenspannung des Primärstromes von 60 bis 70 Volt geht, sobald K den Contact Nr. 13 berührt, ein prasselnder Funkenstrom von etwa 12 mm Länge zwischen Spitze und Platte des Funkenziehers über. Arbeitet man mit geringerer Spannung, etwa mit 30—35 Volt, so bewege man *vorsichtig* den Arm K von Contact zu Contact weiter, bis das Maximum der Wirkung eintritt.

Die Extrastromfunken sind sehr massig und heiss; sie scheinen uns daher zu spectralanalytischen Untersuchungen geeignet zu sein.

Der (in der Figur nicht gezeichnete) Halter, welcher den Vibrator trägt, ist mit einer Vorrichtung versehen, an welcher Vacuumröhren nach Moore befestigt werden können. Soll der Apparat ausser Thätigkeit gesetzt werden, so ist zunächst die *Kurbel K bis an die Arretirung R zurück zu drehen* und alsdann erst der Quecksilberunterbrecher auszuschalten.

Der Vortheil der hier beschriebenen Schaltung gegenüber der Moore'schen liegt darin, dass man den sorgfältig eingestellten Apparat dauernd im Betriebe halten kann, ohne ein Verderben des immerhin ziemlich kostspieligen Vibrators befürchten zu müssen; dagegen ist nicht zu läugnen, dass das in Vacuumröhren erzeugte Licht flackernder ist, als bei der Moore'schen Anordnung. Der Grund hierfür liegt offenbar in dem unvollkommenen Synchronismus der beiden Unterbrecher.

Wolfenbüttel, im August 1899.

(Eingegangen 23. August 1899.)

9. *Ursache und Beseitigung eines Fehlers bei der Lippmann'schen Farbenphotographie, zugleich ein Beitrag zu ihrer Theorie;*
von Otto Wiener.

Bei meiner Untersuchung über Körperfarbenphotographie[1]) stiess ich auf einen Fehler des Lippmann'schen Verfahrens[2]), der bisher noch nicht aufgeklärt war und der auch in rein physikalischer Hinsicht interessante Seiten darbietet.

Wenn man eine Photographie des Spectrums nach Lippmann, mit Bromsilbergelatine und unter Anwendung von Farbstoffsensibilisatoren hergestellt, einmal von der Schichtseite, einmal von der Glasseite aus im senkrecht zurückgeworfenen Licht betrachtet, so beobachtet man von den beiden Seiten aus an derselben Stelle der Platte verschiedene Farben. Diese Erscheinung war zwar bekannt[3]), aber die Erklärungen dafür, die ich in der Literatur gefunden habe, sind nicht richtig.

Man hat bisher den Einfluss, den die an der Oberfläche der Schicht zurückgeworfene Lichtwelle auf die wiedergegebene Farbe hat, entweder übersehen oder falsch beurtheilt oder endlich sogar geleugnet.

Diesen letzten Standpunkt nimmt Meslin[4]) ein, indem er die nach der Formel $J = (n-1)^2/(n+1)^2$ zu 0,08 berechnete Intensität des an der Schicht in Luft bei senkrechtem Einfall zurückgeworfenen Lichtes glaubt nicht beachten zu brauchen. Obgleich aus $n = 1{,}5$, wie Meslin annimmt[5]), für J nur 0,04 folgen würde, darf trotzdem diese Lichtwelle

---

1) O. Wiener, Wied. Ann. **55**. p. 250. 1895.

2) G. Lippmann, Compt. rend. **112**. p. 274. 1891; **114**. p. 961. 1892.

3) Vgl. z. B. G. Meslin, Ann. de chim. et de phys. (6) **27**. p. 389. 1892.

4) l. c. p. 374.

5) l. c. p. 370.

nicht ausser Acht gelassen werden; denn sie kommt mit Nothwendigkeit zur Interferenz mit den an den Elementarspiegeln zurückgeworfenen Wellen; und für die Interferenz ist nicht die Intensität, sondern die Amplitude mit dem Betrage

$$\sqrt{0,04} = 0,2$$

maassgebend. Selbst in dem günstigsten Falle, dass die Amplitude der Gesammtwelle des aus der Tiefe der Schicht reflectirten Lichtes nahe den Werth 1 erreichte, würden das Maximum und Minimum ihrer Interferenz mit der Oberflächenwelle annähernd im Amplitudenverhältniss

$$(1 + 0,2):(1 - 0,2) = 3:2,$$

also annähernd im Intensitätsverhältniss 9 : 4 stehen. In Wirklichkeit wird dies Verhältniss noch grösser sein und darf nicht ausser Acht bleiben. Dafür enthält die vorliegende Mittheilung auch eine Reihe experimenteller Beweise.

Die Oberflächenwelle würde nur dann nicht stören, wenn sie für die wirksam gewesene Farbe die gleiche Phase hätte, wie die Elementarwellen. Dies wäre z. B. der Fall, wenn man annehmen dürfte, dass ein Knoten der stehenden Lichtwellen — ich spreche hier und im Folgenden nur von der elektrischen Kraft der Wellen — während der Belichtung in der Oberfläche der Schicht läge und dass die Phasenänderung bei Zurückwerfung an einem durch die Entwickelung entstandenen Elementarspiegel gleich Null wäre. Beide Annahmen hat man in der That gemacht[1]) und beide sind unrichtig.

Es herrscht also im allgemeinen keine Uebereinstimmung in der Phase der Oberflächen- und Tiefenwelle für die wirksam gewesene Farbe und dadurch wird die Richtigkeit der Farbenwiedergabe gestört.

Man überzeugt sich leicht von diesem störenden Einfluss der Oberflächenreflexion, indem man sie einfach ausschaltet.

Taucht man z. B. die Platte unter Benzol, dessen Brechungsexponent dem der Schicht nahe liegt, so treten die richtigen Farben auf, insofern keine weiteren Fehler vorliegen.

Ich werde im Folgenden zeigen, von welchen Umständen der Phasenunterschied zwischen der Oberflächenwelle und den

1) Vgl. z. B. Labatut, Compt. rend. 113. p. 126. 1891.

Elementarwellen abhängt und wie im einzelnen der dadurch bedingte Fehler beseitigt werden kann.

1. Abstand der ersten Bauchebene von der Grenzfläche Gelatine-Quecksilber.

Es ist öfters behauptet worden, ich hätte gezeigt, dass in der Reflexionsebene ein Schwingungsknoten der stehenden Lichtwellen liege, und zwar auch unter den Bedingungen des Lippmann'schen Verfahrens. Mein Versuch [1]) bezog sich indess nur auf die Reflexion an Glas, nicht an einem Metall. Die Phasenänderung an einem solchen hat aber nicht wie an einem durchsichtigen, optisch dichteren Mittel den Betrag von 0,5 Wellenlängen, sondern wie aus Theorie und Experiment [2]) hervorgeht, einen anderen Betrag. Welchen, das liesse sich zwar theoretisch berechnen; indess würde man keine Sicherheit haben, ob der berechnete Werth unter den Bedingungen des Versuchs wirklich zuträfe. Die Untersuchungen über die absolute Phasenänderung bei Reflexion an Metallen haben gezeigt, dass diese Grösse unter Umständen ausserordentlich empfindlich ist gegen Spuren von Verunreinigung der Grenzfläche. [3])

Bei dieser Sachlage war es erforderlich, durch den Versuch unmittelbar die Phasenänderung des Lichtes bei Reflexion in Gelatine an Quecksilber zu bestimmen. Hr. H. Wallbott hat dies auf meine Veranlassung hin gethan [4]) und die Phasenänderung bei Reflexion in reiner, unter dem Exsiccator getrockneten Gelatine an reinem Quecksilber für Farben von der Wellenlänge $\lambda = 625\,\mu\mu$ bis $475\,\mu\mu$ gleich einer Beschleunigung φ von bez. 0,405 bis 0,411 Wellenlängen gefunden, unter gleichmässigem Ansteigen der Werthe bis zu diesem Betrage. Die zum Theil extrapolirten theoretischen Werthe fallen in den gleichen Grenzen von etwa 0,414 bis zu 0,404 Wellenlängen ab.

---

1) O. Wiener, Wied. Ann. **40.** p. 229. 1890.

2) W. Wernicke, Pogg. Ann. **159.** p. 198. 1876.

3) W. Wernicke, Wied. Ann. **51.** p. 448. 1894.

4) H. Wallbott, Die Phasenänderung des Lichtes bei der Reflexion an Quecksilber. Giessener Dissertation. Leipzig. J. A. Barth. 1899. Im Auszug in Wied. Ann. **68.** p. 471. 1899.

War die Gelatine nicht unter dem Exsiccator, sondern nur in Luft getrocknet bei einer relativen Feuchtigkeit der Luft von etwa 75 Proc., so nahm die Phasenbeschleunigung φ von 0,476 für $\lambda = 625\,\mu\mu$ stetig bis 0,393 für $\lambda = 475\,\mu\mu$ ab. Der kleinste Werth wurde bei einer Platte für $\lambda = 469$ mit $\varphi = 0,388$, der grösste für $\lambda = 635$ mit $\varphi = 0,491$ gefunden.

Eine Verunreinigung des Quecksilbers mit $^1/_{1000}$ Proc. Blei ergab keinen Einfluss auf die Phasenänderung, wenigstens bei Reflexion in Glimmer an Quecksilber.

Für die besonderen Zwecke der Farbenphotographie nach Lippmann wäre noch die Bestimmung der Phasenänderung für die mit Bromsilber und Farbstoffen präparirte Gelatine- und Eiweissschicht erwünscht. Es ist indess nicht wahrscheinlich, dass die Phasenänderung sich hierbei noch wesentlich anders verhielte, als die bei an Luft getrockneter Gelatine, denn die letztere verhält sich bereits so, als ob die Gelatine eine verunreinigende Oberflächenschicht enthielte, und höchstens so könnte sie sich wohl bei der sensibilisirten Schicht auch verhalten.

Die Grösse der Phasenbeschleunigung φ bei Reflexion des Lichtes am Quecksilber bestimmt den Abstand a der ersten Bauchebene von der Grenze Gelatine-Quecksilber. Für diese Ebene muss der Gangunterschied zwischen der einfallenden und zurückgeworfenen Ebene Null sein, d. h. es ist:

$$0 = \frac{2\,a}{\lambda} - \varphi\,,$$

also:

$$a = \frac{\varphi}{2}\,\lambda\,,$$

d. h. der gesuchte Abstand beträgt das $^1/_2\,\varphi$fache derjenigen Wellenlänge, welche dem wirksam gewesenen Licht in Gelatine zukommt.

Würde die Phasenänderung bei der sensibilisirten Gelatine die gleiche wie bei reiner Gelatine sein, so wäre jener Abstand bei gut unter dem Exsiccator getrockneten Platten durchschnittlich 0,205 Wellenlängen; bei an Luft getrockneten Platten wäre der Abstand im blauen Theile des Spectrums merklich ein anderer wie im rothen, nämlich im blauen ein kleinster von etwa 0,20, im rothen ein grösster von etwa 0,24.

Am rothen Ende des Spectrums könnte er unter Umständen nahe den Werth 0,25 erreichen.

2. Phasenänderung bei Reflexion an einem Elementarspiegel der entwickelten Lippmann'schen Platte.

Unter dem „Elementarspiegel" verstehe ich nicht eine geometrische Ebene, sondern eine Schicht endlicher Dicke, welche den photographischen Niederschlag enthält, der sich symmetrisch um die geometrische Bauchebene der stehenden Lichtwellen anordnet. Diese Ebene ist daher zugleich die Symmetrieebene des Elementarspiegels.

Unter der „Phasenänderung bei Reflexion an einem Elementarspiegel" verstehe ich den Unterschied der Phase der von dem Elementarspiegel zurückgeworfenen Welle gegenüber der Phase der in seiner Symmetrieebene einfallenden Lichtwelle.

Lippmann[1]) hat diese Phasenänderung in der Theorie seines Verfahrens gleich Null gesetzt, wohl aber nicht deshalb, weil er diesen Werth für den richtigen hielt, sondern weil bei jeder Theorie, welche die Reflexion an der Oberfläche nicht berücksichtigt, jene Phasenänderung in den Differenzen der Gangunterschiede herausfällt. In gleicher Weise dürfte die Angabe von Niewenglowski[2]) aufzufassen sein, der ohne nähere Begründung sie gleich einer halben Wellenlänge setzt.

Es ist eben nicht ganz leicht, von vornherein etwas Bestimmtes über diese Phasenänderung auszusagen, bevor man genauer über die optischen Constanten des Niederschlages und die Art seiner Vertheilung unterrichtet ist.

Es giebt im wesentlichen zwei Annahmen, die man darüber machen kann. Beide sollen genauer erörtert werden. Sie führen zu verschiedenen Werthen der Phasenänderung und man kann daher experimentell darüber entscheiden. Die Entscheidung konnte für die Photographien, mit denen ich experimentirte, thatsächlich durch einen später mitzutheilenden Versuch getroffen werden. Gleichwohl kann man mit Sicherheit sagen, dass auch die andere Annahme für bestimmte Arten von Farbenphotographien zutreffen muss.

Die letztere Annahme — sie werde als Annahme I bezeichnet — setzt voraus, dass im wesentlichen nur die Ver-

1) G. Lippmann, Journ. de phys. (3) 3. p. 97. 1894.
2) G. H. Niewenglowski, Eder's Jahrb. f. Photogr. 8. p. 81. 1894.

schiedenheiten des Brechungsexponenten in der Schicht es sind, welche die Reflexionen veranlassen.

Diese Annahme wurde schon von Lippmann[1]) als möglich bezeichnet „au moins dans certains cas“. Er verstand darunter jedenfalls seine Farbenphotographieen mit Chromgelatine, deren Zustandekommen er vorher auf diese Weise erklärt hatte[2]), und bei denen in der That eine andere Möglichkeit ausgeschlossen ist.

Diese Erklärung wurde von Schütt[3]) als die auch für Bromsilberplatten einzig mögliche hingestellt.

Auch ich hatte schon früher bei meiner Untersuchung der Körperfarbenphotographien mich auf den Boden dieser Annahme gestellt und unter ihrer Voraussetzung bewiesen[4]), dass dann die Phasenänderung an einem Elementarspiegel eine viertel Wellenlänge betragen muss, und einen zweiten Beweis in Aussicht gestellt, der alsbald hier folgen soll.

Der ausführlichen Theorie seiner Farbenphotographie hat Lippmann[5]) eine andere Annahme zu Grunde gelegt. Danach sollen die Reflexionen erfolgen durch „molécules réfléchissantes disséminées“. Dabei braucht man wohl das Wort „molécules“ nicht streng zu nehmen; es spielt auch in der Theorie keine wesentliche Rolle, dass es gerade Molecüle sind, es genügt, dass der photographische Niederschlag in Dimensionen abgeschieden wird, die klein gegen eine Wellenlänge sind, zum mindesten in der Dickenerstreckung der Schicht, während die Dimensionen parallel der Schichtoberfläche beliebig gross sein dürfen.

Es ist ferner nicht erforderlich, dass die abgeschiedenen Theilchen aus reinem Silber bestehen, wenigstens nicht aus metallischem Silber, es könnte auch moleculares Silber oder eine Silberverbindung sein. Wesentlich ist aber, dass der Niederschlag insofern metallähnlich ist, als sein Reflexionsvermögen nicht allein von dem Brechungsexponenten abhängen

---

1) G. Lippmann, Journ. de phys. (3) **3**. p. 107. 1894.
2) G. Lippmann, Compt. rend. **115**. p. 575. 1892.
3) F. Schütt, Wied. Ann. **57**. p. 533. 1896.
4) O. Wiener, Wied. Ann. **55**. p. 255. 1895.
5) G. Lippmann, Journ. de phys. (3) **3**. p. 97. 1894.

darf, sondern durch sein Absorptionsvermögen mitbedingt sein muss.

Die so abgegrenzte Annahme werde als Annahme II bezeichnet.

Ich wende mich zunächst zu der Annahme der Reflexion allein durch Unterschiede im Brechungsexponenten.

Dieselbe ist bereits von Schütt[1]) zum Ausgangspunkt einer Theorie gemacht worden. Seine Theorie beschränkt sich aber auf die etwas sehr schematische Voraussetzung, dass in der fertigen Platte Schichten von abwechselnd constanten niederen und constanten höheren Brechungsexponenten und je ein viertel Wellenlänge Dicke miteinander abwechseln. Er macht also die beiden vereinfachenden Voraussetzungen, dass erstens die Elementarschicht gerade ein viertel Wellenlänge Dicke besitzt, und dass zweitens der Brechungsexponent innerhalb und ausserhalb derselben jeweils constant ist. [2])

Von beiden Voraussetzungen kann man mit Leichtigkeit absehen. Es möge zunächst die erste Voraussetzung fallen, es habe also die Elementarschicht eine beliebige Dicke zwischen

---

1) F. Schütt, l. c. p. 547.

2) Leider geht Hr. Schütt ausserdem von einem falschen Ansatz aus. In seinem Streben, Combinationen zweier Ebenen zu finden, die eine gesuchte Lichtart mit *übereinstimmenden* Phasen zurückwerfen, übersieht er, dass die gleiche Lichtart an anderen Ebenen mit *entgegengesetzten* Phasen zurückgeworfen werden kann. Für die beiden Fälle, dass die betrachteten Ebenen um ein gerades und um ein ungerades Vielfaches einer viertel Wellenlänge λ der wirksam gewesenen Farbe voneinander abstehen, findet er, dass Lichtarten von der Wellenlänge λ', bez. λ'' mit gleicher Phase zurückgeworfen werden, wenn sie den Bedingungen genügen:

$$\lambda' = \frac{n\lambda}{2m} \quad \text{bez.} \quad \lambda'' = \frac{n\lambda}{2m-1},$$

worin n und m ganze Zahlen bedeuten. Um ein Beispiel zu nehmen, so werde in der ersten Formel $n = 4$, $m = 3$, in der zweiten $n = 2$, $m = 2$ eingesetzt, die Formeln führen dann zum gleichen Werthe für λ' und λ'', nämlich $^2/_3\,\lambda$. Die Lichtart dieser Wellenlänge ($^2/_3\,\lambda$) müsste also durch Interferenz begünstigt werden. In Wirklichkeit wird sie durch die Interferenz der von je zwei um $\lambda/2$ abstehenden Ebenen völlig beseitigt. Damit verlieren auch alle Folgerungen aus dieser Theorie ihre Beweiskraft, wenngleich ihr, wie sich zeigen wird, ein brauchbarer Kern zu Grunde liegt.

ınd einer halben Wellenlänge. Ihre Grenzen lasse man menfallen mit den Stellen der stärksten Aenderung des ıngsexponenten und nehme vorläufig der Leichtigkeit 'erständnisses halber, unter Beibehaltung der zweiten ssetzung, den Brechungsexponent innerhalb und ausserler Elementarspiegelschicht jeweils als constant an.

ie an einem Elementarspiegel zurückgeworfene Welle sich dann in Wirklichkeit aus zwei Wellen zusammen, erste am optisch dichteren, deren zweite am optisch :en Mittel zurückgeworfen wird, wenn man zunächst der t des Elementarspiegels einen grösseren Brechungsınten als ausserhalb desselben zuschreibt. Phase und ;ude der zusammengesetzten Welle findet man dann ler Fresnel'schen Regel [1]:

tellt man eine Welle, bez. die durch sie in einem Punkte te Sinusschwingung durch einen Fahrstrahl dar, dessen die Amplitude, dessen Winkel mit einer Anfangsrichtung ase angiebt, so stellt die geometrische Summe (Zunsetzung nach dem Kräfteparallelogramm) der zu zwei gungen von gleicher Schwingungsdauer gehörigen Fahrn die zusammengesetzte Schwingung nach Amplitude hase dar.

ı vorliegenden Falle wähle man die Anfangsrichtung so, e die Phase einer in der Symmetrieebene des Elementars ankommenden Welle W_0 darstelle. Die an der zweiten ı des Elementarspiegels, also am optisch dünneren Mittel geworfene Welle erfährt gegenüber W_0 eine Phasenərung, die nur durch den von der Mitte der Elementarschicht bis zu ihrer im Abstand d befindlichen unteren ı doppelt zurückgelegten Weg bedingt ist und also in längen ausgedrückt den Werth $2\,d/\lambda$, in Bogenmaass rückt den Werth

$$\varphi = 2\,\pi\,\frac{2\,d}{\lambda}$$

; W_2 bildet also mit W_0 den Winkel φ; es ist dabei asen*verzögerung* durch Drehung des Ausgangsfahrstrahles

[1] Vgl. einfachen geometrischen Beweis im Leitfaden der Physik Mach, 2. Aufl. § 137. p. 87. 1891; vgl. auch A. Wüllner, Lehrr Experimentalphysik. 5. Aufl. 1. p. 703. 1895.

im *entgegengesetzten* Sinn des Uhrzeigers dargestellt (vgl. Fig. 1). Die an der ersten Grenze des Elementarspiegels, also am optisch dichteren Mittel zurückgeworfene Welle erfährt gegenüber W_0 zunächst eine Phasenverzögerung von einer halben Wellenlänge durch den Act der Reflexion; da sie aber gegenüber W_0 einen um $2d$ kleineren Weg zurückgelegt hat, so hat die gesammte Phasenverzögerung, in Bogenmaass ausgedrückt, nur den Werth $\pi - \varphi$. Man findet also die Richtung W_1, indem man an der W_0 entgegengesetzten Richtung den Winkel φ im Sinne kleiner werdender Winkel abträgt. Zieht man die Diagonale des aus W_1 und W_2 construirten Parallelogramms, so findet man den die zusammengesetzte Welle darstellenden Fahrstrahl W_r. Er steht zufolge der Construction senkrecht auf W_0; die am Elementarspiegel reflectirte Gesammtwelle erfährt also an ihm eine Phasenverzögerung von einer viertel Wellenlänge.

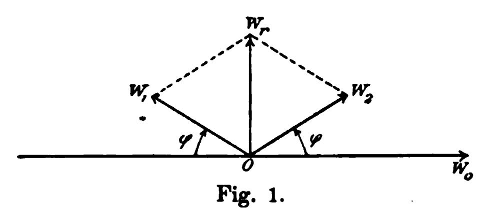


Fig. 1.

Die Phasenänderung ist die gleiche, wie gross man auch die Dicke $2d$ des Elementarspiegels wählen mag. Die Grösse von $2d$ hat nur Einfluss auf die Grösse der Amplitude, die mit $2d$ verschwindet und für $2d = \lambda/4$ ein Maximum erreicht, d. i. für den Specialfall des Schütt'schen Schemas.

Der obige Beweis lässt sich ohne weiteres auf den Fall der stetigen Aenderung des Brechungsexponenten übertragen. Es treten nur an die Stelle der geradlinigen Fahrstrahlen W_1 und W_2 zwei stetig gekrümmte Curvenstücke, welche aber gleichfalls spiegelbildlich zu der auf W_0 errichteten Normale verlaufen und sich daher auch zu einem in dieser Normale liegenden Fahrstrahle W_r zusammensetzen müssen.

Damit ist die oben aufgestellte Behauptung allgemein bewiesen: *Unter den angegebenen Bedingungen ist die Phasenänderung bei Reflexion an einem Elementarspiegel, bezogen auf die geometrische Mittelebene seiner Schicht, eine viertel Wellenlänge*, und zwar eine Phasenverzögerung, wenn, wie hier vorausgesetzt, die Schicht des Elementarspiegels einen höheren Brechungsexponenten hat als seine Umgebung, eine Phasenbeschleunigung

vom gleichen Betrage, wenn sie einen kleineren Brechungsexponenten hat.

Dabei ist freilich noch vorausgesetzt, dass die Amplituden der an beiden Grenzflächen des Elementarspiegels reflectirten Wellen als gleich gross angenommen werden dürfen. In Wirklichkeit muss die Amplitude, welche zu der zweiten Reflexion gehört, die kleinere sein, allein schon wegen des Intensitätsverlustes des Lichtes bei der ersten Reflexion.

Will man diese Verschiedenheit der Amplituden berücksichtigen, so ersieht man aus Fig. 1, dass die Phase der resultirenden Welle W_r etwas grösser als 90^0 ($^1/_4\,\lambda$) werden muss, wenn $W_2 < W_1$, und zwar um so mehr, je kleiner das Amplitudenverhältniss v von W_2 zu W_1 ist, und ferner um so grösser, je kleiner bei gleichem v der Winkel φ ist.

Quantitativ lässt sich leicht ersehen, dass die Vergrösserung ε der Phasenverzögerung über 90^0 hinaus aus v und φ sich durch die folgende Gleichung berechnen lässt:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1 - v}{(1 + v) \operatorname{tg} \varphi}.$$

Aus dieser Formel erkennt man, dass selbst in ungünstig gegriffenen Fällen ε keine grossen Beträge erreichen wird. Nach von mir angestellten angenäherten Messungen, deren Mittheilung mich hier zu weit führen würde, dürfte bei den Farbenphotographien, mit denen ich experimentirte, v schwerlich kleiner als 0,85 sein. Macht man ferner die Annahme, dass die Stelle des schroffsten Wechsels der Brechungsexponenten von der Bauchebene nur in $^1/_4$ ihres Abstandes von der Knotenebene entfernt liegt, so würde $\varphi = 45^0$ und $\operatorname{tg} \varphi = 1$ werden; daraus ergiebt sich ε zu rund 5^0, entsprechend einer Vermehrung der Phasenverzögerung von 0,015 Wellenlängen; würde die Stelle des schroffsten Wechsels nur in $^1/_8$ jenes Abstandes von der Bauchebene abliegen, so wäre $\varphi = 22{,}5^0$, und daraus ergäbe sich ε zu rund 11^0, entsprechend einer Vermehrung der Phasenverzögerung von 0,031 Wellenlängen. Die letztere Annahme ist aber schon sehr unwahrscheinlich.

Zwar folgt aus obiger Formel für $\varphi = 0^0$, $\varepsilon = 90^0$, sodass die gesammte Phasenverzögerung ψ an dem Elementarspiegel 180^0 oder eine halbe Wellenlänge sein würde. Man darf aber

nicht übersehen, dass zugleich mit φ, also auch zugleich mit der Dicke des Elementarspiegels, die Amplitude der an ihm reflectirten Welle gegen Null convergirt. Denn obgleich die Amplitude der an der hinteren Fläche des Elementarspiegels zurückgeworfenen Welle kleiner ist als die für die vordere Fläche, wegen des durch sie bedingten Intensitätsverlustes, so wird die Amplitude der Gesammtwelle doch streng Null bei Berücksichtigung der mehrfach hin- und hergehenden Reflexionen, so lange wenigstens eine merkliche Absorption in der Schicht nicht in Frage kommt.

Wesentlich anders liegen aber die Verhältnisse, wenn noch eine Absorption in der Elementarschicht zu berücksichtigen ist, welche der metallischen Absorption gleich oder nahe kommt. Hier kann eine Schicht von $^1/_{1000}$ Wellenlänge Dicke noch merkliche Reflexion ausüben, was für eine gleiche dicke, nicht absorbirende Schicht nicht mehr der Fall ist.

Damit ist bereits auf die andere Möglichkeit von der Wirkungsweise des photographischen Niederschlages eingegangen, wonach dieser in getrennten, gegen die Lichtwelle kleinen Theilchen oder entsprechend dünnen Schichten angeordnet ist.

Man hat gegen diese Auffassung geltend gemacht, dass die Schicht gar nicht kornlos erscheint, wie sie voraussetzen müsste. Neuhauss[1]) und Schütt[2]) haben mit dem Mikroskop Körner von einem Durchmesser bis gegen 0,0015 bez. 0,0013 mm nachzuweisen geglaubt. Doch waren das wirklich Körner, was sie sahen? Wenn man so schliesst, übersieht man, dass durch die mikroskopische Betrachtung nur die Flächenansicht dieser Gebilde beobachtet wurde, nicht die Seitenansicht. Aber gerade Neuhauss ist ja auch die schwierige Aufgabe gelungen, einen Querschnitt der Schicht mikroskopisch zu photographiren. Hr. Dr. Neuhauss hat die Freundlichkeit gehabt, mir die Positive zweier seiner Aufnahmen zu senden, aus denen die Einzelheiten noch etwas schärfer zu erkennen sind, als in der Abbildung in den Annalen.[3]) Hier ist von einem Korn nichts mehr zu erkennen, sondern nur die periodische Veränderlichkeit der Dichte des Niederschlages.

1) R. Neuhauss, Verh. d. Phys. Ges. zu Berlin **14.** p. 18. 1895.
2) F. Schütt, l. c. p. 537.
3) R. Neuhauss, Wied. Ann. **65.** p. 165. 1898.

Mithin darf man aus den obigen Beobachtungen nicht auf nach allen Seiten gleich dicke Körner, sondern nur auf Blättchen schliessen, deren seitliche Dimensionen die Lichtwellenlänge zum Theil übertreffen, deren Dicke aber unterhalb der Wellenlänge bleibt.

Uebrigens giebt Schütt die Möglichkeit solcher feineren Lamellen doch zu mit den Worten: „Von einer Lamellenbildung durch diesen Niederschlag kann demnach überhaupt nicht die Rede sein, wohl aber von einer Lamellenbildung in demselben."

Es fragt sich nun, woraus der Niederschlag besteht. Dass es cohärentes metallisches Silber wäre, dagegen spricht seine in der Durchsicht braune Farbe, während cohärentes Silber bekanntlich in der Durchsicht blau ist.

Dagegen ist die Annahme sehr wahrscheinlich, dass der Niederschlag aus molecularem Silber besteht oder zum mindesten ans einem ihm optisch nahestehenden Körper.

Unter molecularem Silber versteht Wernicke[1]) Silber, dessen Molecüle durch irgendwelche andere Theilchen voneinander getrennt sind[2]), so dass die starken metallischen Cohäsionskräfte nicht zur Geltung kommen, das aber durch Druck und andere Einflüsse leicht in cohärentes Silber übergeführt werden kann.

In scharfsinniger Weise hat Wernicke nachgewiesen, dass diese beiden Modificationen es sind, welche die Widersprüche erklären, die zwischen den Beobachtungen verschiedener Beobachter über die absolute Phasenänderung des Lichtes an dünnen Metallschichten unter sich und mit der Theorie bestanden.

Kurz vorher hatte schon Drude[3]) jene Abweichungen auf eine sehr dünne Oberflächenschicht des Silbers zurückgeführt und deren optische Constanten bestimmt.

Diese Constanten sind also nach Wernicke diejenigen des molecularen Silbers. Sie unterscheiden sich von denen

---

1) W. Wernicke, Wied. Ann. **52.** p. 523. 1894.

2) Ob die Aneinanderlagerung zweier Silbermolecüle bereits diesen die Eigenschaften des cohärenten Silbers ertheilt, dürfte wohl nicht feststehen. Es ist daher auch nicht gesagt, dass man diesen Ausdruck wörtlich nehmen muss.

3) P. Drude, Wied. Ann. **50.** p. 595. 1893; **51.** p. 77. 1894.

des cohärenten Silbers durch einen bedeutend grösseren Brechungsexponenten n und einen bedeutend kleineren Absorptionsindex $\varkappa$ (der sich auf die Strecke einer Wellenlänge bezieht, während der Absorptionscoefficient $n \,.\, \varkappa$ sich auf gleiche absolute Längen bezieht). Nach Drude sind die Constanten für cohärentes Silber $n = 0{,}181$; $n\varkappa = 3{,}67$; also $\varkappa = 20{,}3$; diejenigen für moleculares Silber zufolge der Deutung von Wernicke: $n = 4$; $n\varkappa = 2{,}82$; also $\varkappa = 0{,}705$.

Es hat eine hohe Wahrscheinlichkeit für sich, dass die letzteren Constanten zugleich annähernd diejenigen des photographischen Niederschlages bei den Lippmann'schen Bromsilberplatten sind, selbst in dem Falle, dass der Niederschlag nicht aus reinem Silber, sondern aus einem Oxyd desselben bestehen sollte. Denn nach Wernicke[1]) ist das optische Verhalten eines solchen nur wenig von dem des molecularen Silbers verschieden.

Die nächste Frage ist die nach der Dicke der zusammengedrängt gedachten Silberschicht, die sich in einem Elementarspiegel durch die Entwickelung abscheiden kann. Ihre obere Grenze lässt sich abschätzen aus dem Verhältniss der angewandten Substanzmengen und den specifischen Gewichten und Brechungsexponenten der in der präparirten Schicht vorhandenen Stoffe. Die Platten, welche zu den für die vorliegende Frage maassgebenden Versuchen benutzt wurden, waren nach dem von Neuhauss[2]) angegebenen Recept hergestellt. Würde durch die Entwickelung alles Silber zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotenebenen ausgeschieden, so würde dieses zusammengedrängt eine Schicht von etwa 2,9 $\mu\mu$ (Millionstel mm) ausfüllen. Macht man die nächstliegende Annahme, dass nur die Hälfte ausgeschieden wird, so würde sie etwa 1,4 $\mu\mu$ betragen.

Das Reflexionsvermögen einer Silberschicht solcher Dicke darf nicht unterschätzt werden. Bei einer früheren Gelegenheit[3]) habe ich die Dicke derjenigen dünnsten Silberschicht bestimmt, die sich eben noch durch ihr Reflexionsvermögen von der un-

1) W. Wernicke, Wied. Ann. **52.** p. 525. 1894.

2) R. Neuhauss, Die Photographie nach Lippmann's Verfahren; Encyklopädie der Photographie. Heft 33. Halle a. S. Verl. v. W. Knapp. 1898.

3) O. Wiener, Wied. Ann. **31.** p. 666. 1887.

bedeckten durchsichtigen Unterlage (Glimmer) abhebt. Der gefundene Mittelwerth aus zwei Zahlen war 0,13 $\mu\mu$. Da man den Molecülen eine Grösse von dieser Ordnung zuschreibt, so dürften Lippmann's „molécules réfléchissantes disséminées" vielleicht sogar wörtlich genommen werden.

Einer Silberschicht von 1,4 $\mu\mu$ Dicke kommt also bereits ein nicht unbedeutendes Reflexionsvermögen zu. Trotz merklicher Absorption ist eine solche Schicht aber noch sehr gut durchsichtig, sodass die diesbezüglichen Bedenken von Schütt[1]) wegfallen.

Welche Phasenänderung wird nun ein Elementarspiegel bedingen, wenn man annimmt, dass die Reflexion an äusserst dünnen Blättchen aus molecularem Silber erfolgt, die innerhalb seiner Schicht zerstreut sind und deren Dicke insgesammt nur etwa 1,4 $\mu\mu$ beträgt?

Ich habe schon oben (p. 498) angedeutet, wie sich die Phasenänderung einer sehr dünnen, in einen andersartigen Stoff eingelagerten Schicht verändern muss, wenn Absorption noch mit ins Spiel kommt. Solange diese nicht schon innerhalb einer Wellenlänge stark ist, wird die Phasenänderung bei Reflexion an der vorderen Fläche eine halbe Wellenlänge, die an der hinteren gleich Null sein. Aber die Amplitude für das an der Vorderfläche zurückgeworfene Licht ist jetzt im Uebergewicht, da das von der hinteren Fläche kommende Licht, abgesehen von den Schwächungen beim Durchtritt durch die vordere Fläche, zweimal die Absorption in der Schicht zu erleiden hatte. Die Phasenänderung wird also im Ganzen nahezu ebenfalls eine halbe Wellenlänge betragen, nicht ganz, wegen des zu berücksichtigenden kleinen Wegunterschiedes der von hinten kommenden und der mehrfach reflectirten Wellen. Ausserdem wird noch die Absorption an sich, indem sie die Reflexion verstärkt, einen modificirenden Einfluss ausüben.

Das Experiment bestätigt diese Anschauung. Ich habe schon bei früherer Gelegenheit die Phasenänderung an sehr dünnen Silberschichten bestimmt, welche zwischen Stoffen von nahezu übereinstimmenden Brechungsexponenten eingebettet waren, nämlich zwischen Glimmer und Cassiaöl. Die Schicht

1) F. Schütt, l. c. p. 539.

muss nach Wernicke als im wesentlichen aus molecularem Silber bestehend aufgefasst werden.

Man erkennt die Phasenänderung aus Fig. 19, Taf. V, meiner früheren Abhandlung.[1]) Die Verschiebung der dort dargestellten Interferenzstreifen für die Reflexion Glimmer-Silber-Cassiaöl beträgt gegenüber der für Glimmer-Luft nahezu eine halbe Wellenlänge in allen Theilen des Spectrums, d. h. die Phasenänderung ist nahezu eine halbe Wellenlänge.

Die bezeichnete Figur lehrt zugleich, da sie auch die Interferenzstreifen für die Reflexion Glimmer-Silber-Luft aufweist, wie stark die Phasenänderung von dem Brechungsexponent des hinter der Silberschicht liegenden Stoffes abhängt. Neuerdings angestellte Versuche haben mir das bestätigt.

Daraus folgt, dass die Phasenänderung bei den Lippmann'schen Schichten davon abhängen wird, ob zu beiden Seiten des Silbers wirklich nur Gelatine, oder vielleicht nach der geometrischen Bauchebene hin Gelatine, mit noch etwa zurückbleibenden Stoffen verunreinigt, sich befindet. Die Art und Dauer der Entwickelung und die Genauigkeit des Auswaschens kann also auf diese Verhältnisse und die dadurch bedingte Farbenwiedergabe Einfluss haben.

Aus der Phasenänderung an einem einzelnen Silberblättchen kann man jetzt in ähnlicher Weise wie bei der früheren Ableitung für fehlende Absorption die Phasenänderung für den ganzen Elementarspiegel ableiten. Man zerlege zu diesem Zwecke denselben in etwa drei gleich dicke Schichten, so wird die oberste die durch W'_1 (Fig. 2), die mittlere die durch W'_2, die unterste die durch W_3 nach Amplitude und Phase dargestellten Wellen zurücksenden, die sich zu einer einzigen addiren, der gleichfalls die Phasenänderung von einer halben Wellenlänge zukommt, jedoch wieder nur angenähert, erstens aus dem schon oben angegebenen Grunde und zweitens, weil W'_3 eine kleinere Amplitude als W_1 zukommen wird.

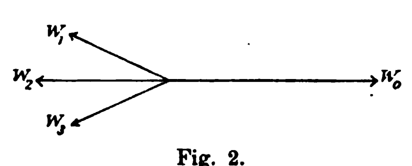


Fig. 2.

Die beiden verschiedenen Annahmen über die Art des

1) O. Wiener, Wied. Ann. 31. Taf. V. Fig. 19. 1887.

Niederschlages führen also zu wesentlich verschiedenen Folgen für die Phasenänderung des an einem Elementarspiegel zurückgeworfenen Lichtes. Annahme I bei fehlender Absorption bedingt Phasenverzögerungen von annähernd einer viertel Wellenlänge mit Neigung zu etwas grösseren Verzögerungen, Annahme II bei einer der metallischen nahekommenden Absorption bedingt Phasenverzögerungen von annähernd einer halben Wellenlänge mit Neigung zu etwas kleineren Verzögerungen.

3. Der Phasenunterschied zwischen der von der Oberfläche und der vom ersten Elementarspiegel zurückgeworfenen Welle.

Der Phasenunterschied δ zwischen der von der Oberfläche und der vom ersten Elementarspiegel zurückgeworfenen Welle hängt erstens von dem Abstand a der ersten geometrischen Bauchebene von der Schichtoberfläche und zweitens von der Phasenverzögerung ψ bei Reflexion an dem Elementarspiegel ab. Der zurückgelegte Weg $2a$ bedingt eine Phasenverzögerung gegenüber der einfallenden Welle von $2a/\lambda$, welcher nach Abschnitt 1 (p. 491) gleich φ, d. h. gleich der Phasenbeschleunigung ist, die das Licht bei Reflexion in der empfindlichen Schicht am Quecksilberspiegel erlitt. Die gesammte Phasenverzögerung der am ersten Elementarspiegel reflectirten Welle gegenüber der einfallenden beträgt daher $\varphi + \psi$. Die Phasenverzögerung an der Oberfläche der Schicht ist gleich einer halben Wellenlänge. Der gesuchte Phasenunterschied ist daher:

$$\delta = \varphi + \psi - \tfrac{1}{2}.$$

Setzt man nach den früheren Abschnitten für φ den für sorgfältig getrocknete Gelatine geltenden Werth 0,41 und für ψ den für unmerkliche Absorption annähernd geltenden Werth 0,25 ein, so ergiebt sich:

$$\delta = 0{,}41 + 0{,}25 - 0{,}5 = 0{,}16.$$

Für nur an Luft getrocknete Gelatine könnte im Blau des Spectrums φ auf 0,39 sinken, dann würde $\delta = 0{,}14$, im Roth dagegen auf 0,49 steigen, dann würde $\delta = 0{,}24$.

Setzt man für ψ den für beträchtliche Absorption annähernd geltenden Werth 0,5 ein, so ergiebt sich für sorgfältig getrocknete Gelatine $\delta = 0{,}41$, für nur an Luft getrocknete könnte δ nahe den Werth 0,5 im Roth erreichen; d. h. dann

stände das aus der Tiefe der Schicht kommende Licht mit dem an der Oberfläche reflectirten nahezu in entgegengesetzter Phase. Der schädliche Einfluss der Oberflächenreflexion wäre dann am grössten. Es ist, wie schon oben bemerkt, leicht möglich, dass für die präparirte, selbst gut getrocknete Gelatine ein Werth φ gilt, welcher demjenigen der an Luft getrockneten reinen Gelatine näher steht, als dem der vollkommen trockenen. Der Werth von δ wird also je nach den Versuchsbedingungen und den davon abhängenden Werthen von φ und ψ verschieden ausfallen.

Es ergiebt sich aber, dass *selbst unter normalen Versuchsbedingungen die Oberflächenwelle in ihrer Phase nicht mit der ersten Elementarwelle übereinstimmt für die Farbe, mit der die Platte belichtet worden war.*

4. Lippmann'sche Schichten, deren Grenzfläche die Elementarspiegel schneidet.

Bevor ich zur Besprechung der unter Einfluss der Oberflächenreflexion entstehenden Farben übergehe, ist des besseren Verständnisses halber die Mittheilung der hier folgenden Versuche erforderlich.

Betrachtet man eine in Gelatine hergestellte Farbenphotographie von der Glasseite aus, so sieht man das Spectrum von einer Reihe heller und dunkler Streifen durchzogen. Die Erscheinung gewährt ungefähr den Anblick wie der des Spectrums in einem Spectralapparat, auf dessen Spalt man das Bild eines dünnen und nicht ganz gleichmässig dicken Blättchens entworfen hat oder eines Spectrums, das man auf einem solchen Blättchen entworfen hat und im reflectirten Lichte betrachtet. Nur sind die Minima im Lippmann'schen Spectrum nicht so stark ausgeprägt wie in den beiden damit verglichenen Spectra.

Man wird daher geneigt sein, die Erscheinung so aufzufassen, als ob ein dünnes Blättchen der Beleuchtung durch das Lippmann'sche Spectrum ausgesetzt wäre. Es würde dies voraussetzen, dass das Spectrum nur durch einen äusseren Theil der Schicht erzeugt wird, während der innere von Elementarspiegeln frei bliebe. Es würde dann die im Glas an der Schichtgrenze mit der aus der Tiefe kommenden Welle

ı nahe homogener Farbe interferiren. Diese Auffassung ·d begünstigt durch die Beobachtung von Neuhauss[1]), der seinem mikroskopischen Nachweis der Elementarspiegel einer Eiweissschicht solche nur in dem äusseren Theile des .ttchens fand, während der innere davon frei war. Dagegen bachtete er gerade an dessen innerer Grenze einen wenn :h nur feinen Niederschlag. Dieser könnte also das zur därung nothwendige Reflexionsvermögen an jener Stelle ingen.

Trotz allem ist diese Erklärung der Streifen nicht stich-tig. Die Farben des Lippmann'schen Spectrums sind :u nicht homogen genug, zum mindesten nicht bei den r vorliegenden Platten. Man überzeugt sich davon leicht, em man auf der Schichtseite eine fernere Schicht aus lodium oder dergl. von geeigneter Dicke aufträgt. Es ist ın im Tageslicht nichts von Streifen zu sehen, wohl aber Natriumlicht, sodass also die Möglichkeit der Streifenbildung :h im weissen Licht gegeben wäre.

Die Verhältnisse liegen also anders wie bei den Neu-uss'schen Eiweissschichten, bei denen die hier beobachtete scheinung auch nicht stattgefunden zu haben scheint, da nur mittheilt, dass die Farben auf der Glasseite „viel ıiger leuchtend sind"[2]), und von Streifen nichts erwähnt. ist ferner zu berücksichtigen, dass die Eiweissschichten en Gehalt an Silbersalz erst hinterher durch ein Bad er-ten; es ist also leicht möglich, dass die Diffusion des zes nicht tief genug reicht. Bei den Bromsilberplatten ;egen ist das Salz von vornherein gleichmässig in der Schicht theilt.

Vielmehr sind jene Streifen die nothwendige Folge davon, ıs die Grenzfläche Schicht-Glas im allgemeinen die Elementar-egel in schwacher Neigung schneiden wird.

Dass die Elementarspiegel die ganze Schicht durchsetzen ınen, wenn die Entwickelung lange genug gedauert hat, ist ht zu bezweifeln; denn in der nahezu vollkommen durch-htigen unentwickelten Schicht müssen die stehenden Licht-

---

1) R. Neuhauss, Wied. Ann. 65. p. 165. 1898.

2) l. c. p. 171.

wellen in der ganzen Tiefe auftreten, sonst könnten sie bei meinen eigenen Versuchen über solche auch nicht beobachtet worden sein, wo der Abstand der empfindlichen Schichten am Spiegel zum Theil bedeutend grösser war, als die Dicke der Gelatineblättchen betrug.

Dass in der That die ganze Schicht mit Elementarspiegeln ausgefüllt ist, lässt sich einfach nachweisen, indem man den grössten Theil der Schicht durch Reiben mit Leder und englisch Roth abträgt, soweit als es bequem möglich ist, ohne die Schicht vollkommen von der Glasunterlage zu entfernen, und soweit, dass die übrigbleibende Schicht bedeutend durchsichtiger geworden ist; man sieht dann von der Glasseite her immer noch das Spectrum mit den Streifen, wenn auch begreiflicherweise durch die von der Rückseite her in Schicht an Luft zurückgeworfenen Welle etwas verändert. Die obige Erklärung der Streifen ist damit widerlegt.

Ein Schneiden der Elementarspiegel mit der anliegenden Glasfläche muss gerade dann eintreten, wenn die Gelatineschicht planparallel ist.

Es werde zunächst einmal die Annahme einer solchen Planparallelität gemacht und der Einfachheit halber die fernere, dass das Spectrum vom Roth der Wellenlänge 760 $\mu\mu$, bis zum Ultraviolett der Wellenlänge 380 $\mu\mu$, abgebildet werde, dann liegt an der letzten Stelle im Vergleich zur ersten die doppelte Zahl von Elementarschichten, worunter der Zwischenraum zwischen zwei Knotenflächen der stehenden Wellen verstanden sei.

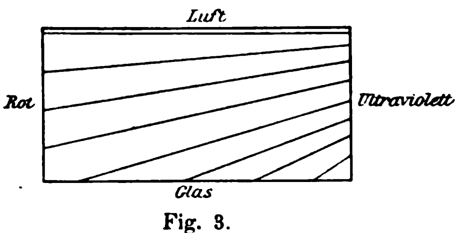


Fig. 3.

In nebenstehender Fig. 3 ist der Fall veranschaulicht, dass im Roth 4 und im Ultraviolett 8 Elementarschichten in dem Gelatineblättchen Platz finden, wobei jeweils an den Grenzen zwei unvollständige Schichten auftreten, die sich zusammen zu einer vollständigen ergänzen. Die gezeichneten Striche sollen dabei die Mittelebenen der Elementarschichten d. h., die Bauchebenen darstellen.

Die Figur lehrt, dass dann die Grenzfläche am Glase uch von vier Elementarschichten geschnitten werden muss.)ies gilt allgemein; so viele Elementarschichten im Roth, so ›ft muss die Grenzfläche am Glas von Elementarspiegeln ge- ›chnitten werden.

Betrachtet man nun die Platte von der Glasseite, so muss lie an der Grenze Glas-Gelatine zurückgeworfene Welle mit ler aus der Tiefe kommenden Gesammtwelle zur Interferenz elangen. Zwischen zwei Schnittstellen der Mittelebenen der lementarspiegel sind nun alle möglichen Phasenunterschiede er Oberflächenwelle gegenüber der Gesammtwelle aus der 'iefe vertreten; es müssen also so viele dunkle Streifen als chnittstellen der Elementarspiegel mit der Glasfläche vor- anden sein.

Die Minima für verschiedene Farben müssen ferner an erschiedenen Stellen liegen. Dies ist in der That der Fall. ei genauerem Zusehen beobachtet man nämlich, dass die treifen mit farbigen Säumen umgeben sind, welche nicht zum pectralbereich der beobachteten Stelle gehören. Dadurch nterscheidet sich also die Erscheinung von der oben erwähnten er spectralen Interferenzen dünner Blättchen und schliesst aher schon deshalb die Zurückführung auf diese aus.

Beobachtet man im homogenen gelben und blauen Lichte, › liegen daher auch die Minima nicht an denselben Stellen, nd zwar die Minima für Blau gegenüber denen für Gelb egen das rothe Ende des Spectrums hin verschoben, in Ueber- instimmung mit der in Fig. 3 dargestellten Lage der Elementar- piegel.

Die Maxima und Minima sind indess nicht ausschliesslich urch Interferenz bedingt; denn man darf nicht vergessen, ass die Stärke des Niederschlages, mithin auch die Stärke er Reflexion an den Knotenstellen eine bedeutend kleinere t, als an den Bauchstellen. An diesen ist daher schon an ch die Amplitude der zurückgeworfenen Welle grösser. aher kommt es, dass man die Streifen auch im Natrium- cht nicht bloss in Gelb, wo sie begreiflicher Weise sehr stark uftreten, sondern auch in der ganzen Ausdehnung des photo- raphirten Spectrums noch verhältnissmässig gut erkennen ann; sie sind in den nicht gelben Partien desselben daher

wesentlich durch die Unterschiede in dem Reflexionsvermögen der Schicht an Knoten- und Bauchstellen bedingt. Die dunklen Linien sind deshalb hier annähernd die Schnittlinien der Knotenebenen mit der Glasfläche.

Im allgemeinen wird die Schicht nicht genau planparallel sein. Ist sie an dem rothen Ende des Spectrums dicker, so wird man weniger, ist sie am violetten Ende des Spectrums dicker, so wird man mehr Schnittstellen der Elementarspiegel mit der Glasoberfläche erhalten, und entsprechend ändert sich die Zahl der von der Glasseite aus beobachteten Streifen. Man übersieht dies sofort an der Hand der Fig. 3. *Jedenfalls müssen stets mindestens soviel Elementarspiegel vorhanden sein, als man Streifen auf der Glasseite zählt.*

Man könnte höchstens einwenden, dass das Blättchen eine wellige Oberfläche besässe, wodurch es möglich wäre, dass derselbe Elementarspiegel die Glasoberfläche nochmals schnitte. Indess müssten dann die Streifen ebenfalls aus Wellenlinien bestehen, was der Beobachtung widerspricht.

Gleichwohl spiegeln sich die Unebenheiten des Blättchens in dem Verlaufe der Streifen wieder, die meist mehr oder weniger, wenn auch stetig gekrümmt sind. Sie bevorzugen aber die Richtung der Spectrallinien, was dem Umstande zu verdanken ist, dass die Blättchen auf horizontaler Unterlage trocknen gelassen wurden. Manchmal bestehen die Streifen aus ziemlich geraden und parallelen Linien, die aber mit der Richtung der Spectrallinien einen Winkel einschliessen. Dieser Fall muss bei keilförmigen Blättchen eintreten, deren Keilschneide nicht parallel der Richtung der Spectrallinien verläuft.

Merkwürdigerweise beobachtet man von diesen Streifen beim Betrachten der Platte von der Schichtseite aus nichts. Diese Thatsache beweist, dass das von der Glasfläche zurückgeworfene gegenüber dem aus den oberen Theilen der Schicht kommenden Licht keine merkliche Stärke mehr besitzt. Dies erklärt sich zum Theil durch die Absorption des Lichtes in dem ziemlich dunkelbraun gefärbten Niederschlag, zum Theil durch die Reflexion an den oberen Elementarspiegeln und die dadurch verminderte Stärke des weiter nach unten dringenden Lichtes.

Aber ähnliche Streifen wie die auf der Glasseite lassen sich auch auf der Luftseite hervorrufen, wenn man die Schicht mit Leder und Polirroth keilförmig abträgt. Diese Streifen sind nur noch stärker ausgeprägt, entsprechend dem grösseren Unterschiede der Brechungsexponenten zwischen Luft und Schicht und der dadurch bedingten grösseren Stärke des in Luft an der Schicht reflectirten Lichtes. Bei diesem Versuche sieht man also die Farben nebeneinander, die Neuhauss[1]) durch gleichmässiges Abreiben der Schicht hintereinander hat erscheinen lassen. Neuhauss glaubte damals diese Erscheinung in Widerspruch mit der Zenker'schen Theorie. Sie folgt indess, wie aus obigem hervorgeht, nothwendiger Weise aus derselben.

Eine solche durch theilweises Abtragen verhältnissmässig dünn und durchsichtig gewordene Schicht bietet also den merkwürdigen Anblick voneinander unabhängiger Streifensysteme auf den beiden Seiten der Schicht dar. Die Erklärung dafür ergiebt sich wie oben durch die grossen Intensitätsverluste, die das aus grösseren Tiefen kommende Licht durch Absorption und Reflexionen erlitten hat.

Begreiflicherweise giebt es aber für die Unabhängigkeit der beiden Streifensysteme voneinander eine Grenze. Hat die Schicht eine ausreichend kleine Dicke erreicht, so macht sich die Reflexion an der Grenze Schicht-Luft durch eine Verzerrung der von der Glasseite aus betrachteten Streifen bemerklich.

5. Zahl der Elementarspiegel, die wesentlich an der Farbenwiedergabe betheiligt sind.

Die Beobachtungen des letzten Abschnittes gestatten einen Schluss auf die Zahl der Elementarspiegel, die wesentlich an der Farbenwiedergabe betheiligt sind.

Eine untere Grenze für die Zahl der überhaupt vorhandenen Elementarspiegel liefert die Zahl der von der Glasseite her beobachteten Streifen im Spectrum (vgl. p. 508). Ich zählte deren bei zwei Platten in den glänzendsten Theilen

1) R. Neuhauss, Verhandl. d. Physikal. Gesellsch. zu Berlin (2) **14.** p. 17. 1895.

des Spectrums von Orange bis in den Anfang des Blau hinein 12 bez. 18. Soviel Elementarspiegel müssen also mindestens im blauen Theile des Spectrums vorhanden sein.

Es ist aber nicht gesagt, dass die sämmtlichen Elementarspiegel einen merklichen Beitrag zu der reflectirten Gesammtwelle liefern. Die Thatsache, dass die Interferenzbilder auf Luft- und Glasseite voneinander unabhängig sind, lehrt das Gegentheil.

Einen genaueren Aufschluss liefert der folgende Versuch. Eine keilförmige, bis zur Dicke Null abgetragene Schicht wurde darauf hin untersucht, an welcher Stelle sich eben noch die schwächsten Spuren der Reflexion an der Grenze Schicht-Luft durch eine Verzerrung der von der Glasseite aus betrachteten Streifen bemerklich macht. Es war die, an der man von der Dicke Null an gerechnet immerhin noch den 9. bis 13. Streifen auf der Luftseite zählte, der zu der an der betrachteten Stelle beobachteten Farbe gehörte.

Es betheiligen sich also noch merklich 9—13 Elementarspiegel an der Farbenwiedergabe. Es könnten in Wirklichkeit deren noch mehr sein, da die dünnste beim Wegwischen noch stehen gebliebene Schicht bereits wenige Elementarspiegel enthalten könnte. Auf der anderen Seite ist es wahrscheinlich, dass auf der Luftseite der unversehrten Schicht eine geringere Zahl von Elementarspiegeln zur Geltung kommt, als auf der Glasseite, weil dort wahrscheinlich der photographische Niederschlag dichter ist.

Diese annähernden Feststellungen haben natürlich keine allgemeine Gültigkeit.

Je geringer die Absorption der Schicht und je kleiner die Amplitude der an einem einzelnen Elementarspiegel zurückgeworfenen Welle ist, um so mehr Elementarspiegel werden auf die reflectirte Gesammtwelle merklichen Einfluss haben können. Diese Zahl hängt also unter anderem von der Stärke der Belichtung und Entwickelung ab.

Immerhin hat die obige Zahl insofern ein Interesse, als sie für den vorliegenden Fall einen annähernden Anhalt über das Verhältniss der Amplituden giebt, mit denen sich zwei aufeinanderfolgende Elementarspiegel an der reflectirten Gesammtwelle betheiligen.

6. Zur Theorie der Lippmann'schen Spectrumphotographie für den Fall des Fehlens einer Oberflächenreflexion.

Lippmann[1]) selbst hat, wie bereits erwähnt, eine Theorie seines Verfahrens entwickelt, dabei aber nicht berücksichtigt, dass die Amplitude der an einem Elementarspiegel zurückgeworfenen Welle mit seiner Tiefe unter der Oberfläche der Schicht abnehmen muss, selbst in dem Fall, dass keine merkliche Absorption in der Schicht stattfindet. Infolge dessen lassen sich seine Formeln nicht ohne weiteres auf den praktisch vorliegenden Fall übertragen.

Dagegen hat Meslin[2]) die durch Reflexion erfolgende Abschwächung der Elementarwellen bei zunehmender Tiefe in Betracht gezogen und die Amplitude der Gesammtwelle berechnet; trotzdem erkannte er den Sachverhalt nicht vollständig richtig infolge Vernachlässigung der Oberflächenreflexion und einer nicht vollkommen zutreffenden Analogie mit den Newton'schen Farben von dünnen Blättchen im durchgehenden Lichte.

Die Aufgabe lässt sich durch ein ausserordentlich einfaches geometrisches Verfahren lösen, welches zugleich Amplitude und Phase der aus allen Elementarwellen zusammmengesetzten Welle ergiebt. Die Meslin'schen Schlussformeln lassen sich ohne weiteres daraus ableiten. Aber eine weitere geometrische Darstellung lässt alle in Betracht kommenden Verhältnisse leichter überblicken als solche Formeln.

Ich beschränke mich jedoch, wie Lippmann und Meslin, auf die Betrachtung jeweils einer Reflexion an jedem Elementarspiegel und sehe also von den mehrfachen Reflexionen ab, die innerhalb der Schicht hin und her erfolgen, ehe das Licht wieder nach aussen tritt. Bei der zunächst in Betracht kommenden 3 maligen Reflexion an Elementarspiegeln wird die Amplitude kaum noch von merklichem Betrage sein.

Der einfachste Fall ist zunächst der, dass die Wellenlänge λ' einer Farbe des Lichtes, in der das Bild betrachtet wird — sie heisse die Beleuchtungsfarbe —, übereinstimmt mit der Wellenlänge λ des Lichtes, mit dem dieselbe Stelle

1) G. Lippmann, Journ. de phys. (3) **3.** p. 97. 1894.

2) G. Meslin, Ann. de chim. et de phys. (6) **27.** p. 389. 1892.

vorher belichtet worden war — diese heisse die Belichtungsfarbe.

Sei 1 die Amplitude der am ersten Elementarspiegel reflectirten Welle und r diejenige der am zweiten Spiegel reflectirten Welle in dem Augenblicke, wo sie den ersten Spiegel soeben wieder durchsetzt hat. Da im angenommenen Falle alle Wellen übereinstimmende Phasen haben, so ist die Summe s_0 der Amplituden:

$$s_0 = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

Da, wie im Abschnitt 5 bemerkt, die von der Rückseite der Schicht kommende Welle keinen merklichen Einfluss mehr hat, so darf man die Summe ins Unendliche erstrecken und erhält:

$$s_0 = \frac{1}{1 - r}.$$

Ist λ' von λ verschieden, so wird die an dem zweiten Elementarspiegel reflectirte Welle einen um α grösseren Phasenunterschied als eine ganze Wellenlänge gegenüber der ersten Elementarwelle besitzen. Drückt man α als Phasenverzögerung in Bogengraden aus, so ist:

$$\alpha = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} \cdot 360^{\circ}.$$

Wählt man wieder die auf p. 495 geschilderte graphische Darstellung, so stellt in Fig. 4 W_0 und W_1 den zur ersten und zweiten Elementarwelle gehörigen Schwingungszustand nach Amplitude und Phase dar, wobei als Ausgangsphase Null



Fig. 4. Fig. 5.

diejenige von W_0 und für W_1 die Phasenverzögerung $\alpha = 15^{\circ}$, die Amplitude $r = 0{,}85$ gewählt ist.

Die Darstellung jeder folgenden Elementarwelle W_n erhält man aus der der vorhergehenden W_{n-1} indem man den Fahrstrahl nach Maassgabe des Verhältnisses $r:1$ verkleinert und ihn um den Winkel α weiterdreht. Nach diesem Verfahren sind in Fig. 5 die Wellen W_0 bis W_{12} dargestellt.

Die Summe all dieser Fahrstrahlen W bis ins Unendliche erstreckt, erhält man nun sehr leicht, wenn man sie als Darstellungen complexer Zahlen in der Zahlenebene auffasst. Der Modul oder absolute Betrag der complexen Zahl ist dann gleich der Amplitude, das Argument gleich dem Werthe der Phasenverzögerung zu setzen. So wird W_1 dargestellt durch

$$z = r \cdot e^{i\alpha},$$

W_2 durch

$$z^2 = r^2 e^{i 2\alpha} \text{ etc.}$$

Da sich complexe Zahlen wie Strecken addiren, so wird die Summe aller Fahrstrahlen dargestellt durch

$$s = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots,$$

d. h., es ist

$$s = \frac{1}{1 - z}.$$

Den Werth von

$$1 - z = z'$$

findet man durch die in Fig. 6 dargestellte Construction. Man trägt an die Strecke $AB = 1$ die Strecke $BC = -z$ mit dem absoluten Betrag r an und findet so $1 - z = z'$ dargestellt durch die Strecke AC mit dem absoluten Betrag r' und dem Argument ω. Es ist also

$$z' = r' e^{i\omega}.$$

Daraus ergiebt sich

$$s = \frac{1}{z'} = \frac{1}{r'} e^{-i\omega},$$

s ist in Fig. 6 durch die Strecke AD dargestellt.

Daraus ergiebt sich die folgende einfache Regel:

Hat die zweite Elementarwelle zur ersten ein Amplitudenverhältniss r und eine Phasenverzögerung α, so construire man mit den Seiten 1 und r und dem zwischenliegenden Winkel α ein Dreieck. Dann hat die aus sämmtlichen Elementarwellen zusammengesetzte Welle eine Amplitude, die gleich dem reciproken Werth der α gegenüberliegenden Seite r' des Dreieckes ist und eine Phasenverzögerung gegen die erste Elementarwelle, die gleich dem Winkel zwischen r' und 1 ist.[1])

1) Dieser Satz, bez. die Methode seiner Ableitung lässt sich bei verschiedenen Problemen der Optik, wie bei den mehrfachen Reflexionen

Die Construction findet sich in Fig. 7 ausgeführt, wo $BC = r'$ ist. Aus dieser Figur ist zugleich die Construction eines zu $1/r'$ proportionalen Werthes ersichtlich. Man braucht nämlich nur um A als Centrum einen Kreis mit dem Radius AC zu schlagen, so erhält man als zweiten Schnittpunkt der Geraden BC mit dem Kreise den Punkt C'. Es ist dann BC' mit BC umgekehrt proportional, da ihr Product gleich dem Quadrat des Abschnittes BF auf der von B aus an den Kreis gezogenen Tangente ist.

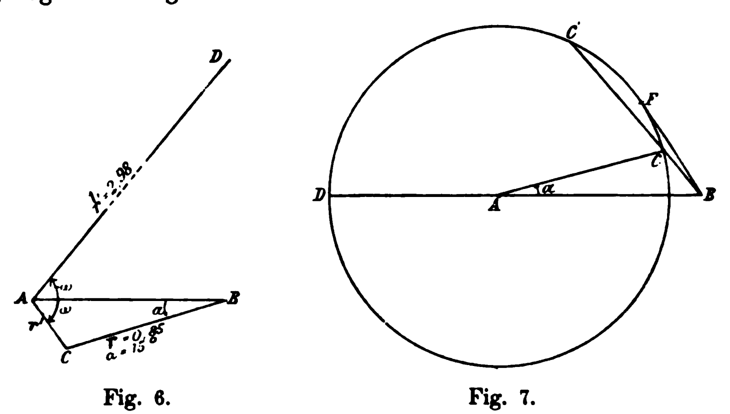


Fig. 6. Fig. 7.

Fig. 7 gestattet zugleich den ganzen Verlauf der Abhängigkeit der Amplitude und Phase der Gesammtwelle von dem Phasenunterschiede α zweier benachbarten Elementarwellen, mithin von dem Unterschiede der Wellenlänge der Belichtungs- und Beleuchtungsfarbe zu überblicken.

Die Amplitude der Gesammtwelle war für $\alpha = 15^0$ mit $B\,C'$ umgekehrt proportional, für $\alpha = 0^0$ ist sie mit BD umgekehrt proportional. Fasst man nun das Verhältniss a jener Amplitude für beliebiges α zu ihrem maximalen Werthe für $\alpha = 0$ ins Auge und setzt $BD = 1$, so ist unmittelbar $BC' = a$. Den Radius AC des Constructionskreises findet man dann aus $BD = 1$ durch die Gleichung:

$$AC = \frac{BD \cdot r}{1 + r} = \frac{r}{1 + r} \cdot$$

in einer Planplatte und bei Beugungserscheinungen bequem verwenden. Man vergleiche die verhältnissmässig verwickelten Ableitungen in Kirchhoff's Vorlesungen über mathematische Optik 1891, p. 157 und p. 100.

Man übersieht jetzt, dass a bei stetig von Null wachsenm α zuerst rasch und dann langsamer abnimmt und für = 180° ein Minimum erreicht.

Die Phasenverzögerung ω der Gesammtwelle nimmt unter n gleichen Bedingungen erst rasch zu, erreicht ein Maximum, nn $\omega + \alpha = 90°$, und nimmt dann wieder langsam ab. Das ximum tritt ein für $\cos \alpha = r$ mit $\sin \omega = r$; für diesen Fall zugleich die verhältnissmässige *Intensität* durch die einfache rmel ausgedrückt:

$$a^2 = \frac{1 - r}{1 + r}.$$

r maximale Werth von ω kann nicht grösser als 90° werden, lcher Werth für $r = 1$ eintreten würde.

Figur 8 stellt Abhängigkeit der össe a von α, Fig. 9 jenige der Grösse von α dar; beide rven sind mit der nstanten $r = 0,85$ s Fig. 7 abgeleitet. ch verschiedenen hätzungen (vgl. B. die Bemerkung Schluss von Abnitt 5, p. 510) hme ich an, dass ser Werth nicht it abliegt von demigen, der für einige einer Spectrumotographien gilt.

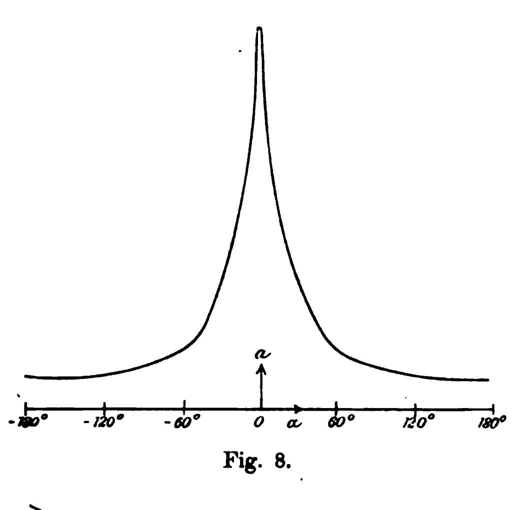


Fig. 8.

Fig. 9.

Am meisten inessirt zunächst, t welcher verhältsmässigen Intenät a^2 eine von der Belichtungsfarbe mit der Wellenlänge λ weichende Beleuchtungsfarbe mit der Wellenlänge λ' von der

fertigen Platte zurückgeworfen wird. Man findet z. B. für $\alpha = 30^0$, d. i. für

$$\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} = \frac{30}{360} = \frac{1}{12},$$

d. h. wenn der Wellenlängenunterschied nur $^1/_{12}$ der Wellenlänge λ' ist, eine verhältnissmässige Amplitude $a = 0,3$ und somit eine verhältnissmässige Intensität gleich 0,09.

Es ist aus Fig. 7 ersichtlich, dass der Intensitätsabfall bei grösserem r viel rascher geschieht; wenn r gegen 1 convergirt, convergiren die verhältnissmässigen Intensitäten für von den Belichtungsfarben abweichende Beleuchtungsfarben gegen Null; ein Ergebniss, das auch schon von Lippmann abgeleitet wurde. Praktisch findet diese Convergenz nicht statt. Man erkennt aber, dass die reflectirte Farbe eine um so reinere sein muss, je geringer der Intensitätsverlust der eindringenden Wellen durch Absorption und Reflexion ist, vorausgesetzt natürlich, dass in entsprechendem Maasse die Zahl der wesentlich betheiligten Elementarspiegel zunimmt.

7. Berücksichtigung der störenden Oberflächenreflexion und Erklärung der durch sie bedingten fehlerhaften Farbenwiedergabe.

Die Ergebnisse der früheren Abschnitte ermöglichen, zunächst wenigstens qualitativ, zu beurtheilen, wie an einer bestimmten Stelle des Spectrumbildes die Oberflächenwelle die aus der Tiefe kommende Welle für jede einzelne Farbe beeinflusst.

Bezeichne ähnlich wie früher W_0 in Fig. 10 die an der Oberfläche der Schicht ankommende Welle mit der Phase Null, so stellt W_{ob} die an der Oberfläche zurückgeworfene Welle dar, W_{t1} die aus der Tiefe kommende Gesammtwelle für die mit der wirksam gewesenen Belichtungsfarbe übereinstimmende Beleuchtungsfarbe beim Betrachten der fertigen Schicht,

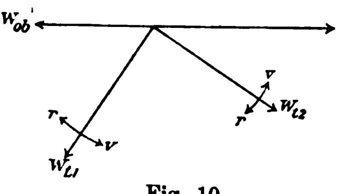


Fig. 10.

für den Fall, dass nach Annahme I in Abschnitt 2 die Phasenänderung ψ bei Reflexion an einem Elementarspiegel eine viertel Wellenlänge, W_{t2} im Falle sie nach Annahme II eine

halbe Wellenlänge beträgt.[1]) In beiden Fällen ist eine Phasenänderung φ für die Reflexion der im Exsiccator getrockneten Gelatine gleich 0,41 vorausgesetzt.[2])

Nun lehrt Fig. 9, welches die Phasenverzögerung der Tiefenwelle bei einer von der Belichtungsfarbe mit der Wellenlänge λ abweichenden Beleuchtungsfarbe mit der Wellenlänge λ' wird gegenüber der in der Symmetrieebene des ersten Elementarspiegels ankommenden Welle. Jetzt sind aber die Phasenverzögerungen gegenüber der in der Oberfläche ankommenden Welle zu bestimmen. Sie waren in Fig. 10 durch die Winkel der W_t mit W_{ob} angegeben für den Fall der Uebereinstimmung jener beiden Farben. Sie werden bei Verschiedenheit dieser Farben aber noch vergrössert um den Betrag $\varphi(\lambda - \lambda')/\lambda'$, in Wellenlängen ausgedrückt, oder um den Betrag

$$\varphi \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} \cdot 360^0 = \varphi \,.\, \alpha$$

in Bogengraden ausgedrückt.

Der Werth $\varphi\alpha$ in Abhängigkeit von α wird also durch eine gerade Linie ausgedrückt, die die Abscissenaxe der Fig. 9 unter einem Winkel schneidet, deren Tangente gleich φ ist, wofür in der Figur der Werth 0,41 benutzt wurde.

Will man also den Gesammtzuwachs der Phasenänderung für λ' gegenüber der für λ wissen, so hat man für den Winkel

$$\alpha = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} \cdot 360^0$$

in Fig. 9 den Abstand zwischen der Curve und der geraden Linie zu suchen.

Der Zuwachs der Phasenänderung ändert sich also für kleine α noch rascher im vorliegenden Fall, als in dem Falle des Abschnittes 6, wird aber dann bald nahezu constant, weil die Curve nach Ueberschreitung des Maximums ungefähr mit der Neigung der Geraden abfällt.

Daraus erkennt man, dass für Beleuchtungsfarben grösserer Wellenlänge als die der Belichtungsfarbe, wobei α und ω

---

1) Es sind der Einfachheit halber die Grenzwerthe angegeben; vgl. darüber Abschnitt 2.

2) Vgl. die möglichen Abweichungen von diesem Werthe in Abschnitt 1.

negativ werden, sich die Fahrstrahlen der Fig. 10 mit dem Uhrzeiger drehen in den durch r bezeichneten Richtungen, für nach Violett zu liegenden in den entgegengesetzten, durch v bezeichneten Richtungen, und zwar schon bei kleinen Farbenänderungen am Anfang recht beträchtlich.

Es ist daher sofort klar, dass die Tiefenwellen W_t von der Oberflächenwelle W_{ob} bei Interferenz stärker begünstigt werden durch Beleuchtungsfarben grösserer, als durch solche kleinerer Wellenlängen.

Daher hat die Oberflächenwelle die Wirkung, dass der Schwerpunkt der wiedergegebenen Farbe gegenüber der Belichtungsfarbe nach Roth zu verschoben wird.

Das ist es auch, was man im allgemeinen beobachtet. Nur am rothen Ende des Spectrums gewahrt man häufig Farben kleinerer Wellenlänge, je nach dem Präparat, Blau oder Blaugrün; auch wechseln hier die Farben in rascher Folge. Meist sind diese Farben äusserst dunkel, häufig schwer zu erkennen, weil sie gegen Grau oder Schwarz hinneigen.[1])

Hier ist zunächst zu bedenken, dass am rothen Ende des photographirten Spectrums, das allerdings meist nur bis etwa zur Fraunhofer'schen Linie B reicht, die durch die Oberflächenwelle begünstigten Farben zum Theil in das Ultraroth fallen und also nicht mehr dem Auge wahrnehmbar sind.

Ferner kommt es nun wesentlich darauf an, ob man es mit W_{t1} oder mit W_{t2} zu thun hat.

Darüber erhält man Aufschluss, wenn man das vom Lippmann'schen Bilde reflectirte Licht spectral untersucht. Da beobachtet man, wie das schon Meslin[2]) beschrieben hat, die auffallende Erscheinung, dass dieses einen, und zwar bei dicken Schichten *nur einen* intensiv dunkeln Streifen aufweist, der offenbar die Rolle eines Interferenzstreifens spielt. Er liegt nicht weit von der Belichtungsfarbe nach Violett zu verschoben.

Gerade das ist aber die Erscheinung, die man beobachten muss, wenn Annahme II die richtige ist. Dann liegt W_{t2} in der Nähe von W_0 und muss es erreichen für Beleuchtungs-

1) Vgl. auch die Angaben von Meslin, l. c.
2) G. Meslin, l. c. p. 387.

farben, die ein wenig von der Belichtungsfarbe nach Violett zu liegen. In der Lage W_0 wird die Tiefenwelle am stärksten durch die Oberflächenwelle geschwächt. Bei einer Beleuchtungsfarbe von noch kleinerer Wellenlänge überschreitet W_{t2} die Lage W_0, und die Intensität der Gesammtwelle muss wieder zunehmen. Aber auch W_{t2} muss von vornherein, wenn die Erscheinung möglich sein soll, sehr nahe an W_0 liegen, damit diese Phase erreicht werden kann für so kleine Werthe von α, dass ω noch auf dem aufsteigenden Ast der Curve (Fig. 9) liegt, weil sonst W_0 nicht mehr nach der anderen Seite überschritten werden kann.

Auch im einzelnen stimmen die beobachteten Intensitätsverhältnisse mit den nach den Figg. 8—10 zu erwartenden überein. So erscheinen nur auf der rothen Seite des Interferenzstreifens die Farben mit bedeutend grösserer Intensität im Vergleich zu denjenigen des daneben liegenden Spectrums, welches von der unbelichteten Nachbarfläche der Lippmann'schen Platte herrührt.

Gegen die blaue Seite hebt sich daher auch der Interferenzstreifen nicht so schroff ab. Es kommt dies daher, dass W_{t2} in Fig. 10 nach Ueberschreiten von W_0 nicht mehr so grosse Intensitäten besitzen kann, da sich die Beleuchtungsfarbe hier von der Belichtungsfarbe zu weit entfernt, während für die entgegengesetzte Drehung von W_{t2} sich zugleich grössere Amplituden und günstigere Phasen der Tiefenwelle einstellen.

Am rothen Ende des Spectrums liegen aber die meist begünstigten Farben schon im Ultraroth, die noch frei bleibende Stelle im Roth ist zu klein und zu wenig leuchtend; nach Blau zu erfolgen aber auch keine günstigeren Bedingungen. Daher erklärt sich die an dieser Stelle beobachtete Dunkelheit und auch die Farbe, welche zu dem ausgelöschten Streifen, der zwischen den Fraunhofer'schen Linien *C* und *D* liegt, complementär ist, d. h. je nach Lage des Streifens blaugrün bis blau. Die Belichtungsfarbe an dieser Stelle lag in der Nähe von *B*.

Will man später diese Verhältnisse genauer quantitativ verfolgen, so muss man beachten, dass der Abschwächungsfactor *r* nicht für alle Farben gleich, sondern für das rothe Ende des Spectrums kleiner als für das violette ist, entsprechend dem Absorptionsspectrum der braun durchsichtigen Schicht.

Sehr einfach bestätigt der folgende Versuch die in den Figg. 7—10 dargestellte Theorie. Betrachtet man dieselbe Platte, welche die soeben beschriebene Erscheinung liefert, im senkrecht reflectirten Natriumlicht, so sieht man einen kräftigen Interferenzstreifen an einer Stelle, wo die Belichtungsfarbe von der Farbe des Natriumlichtes etwas weiter gegen Roth lag. Legt man jetzt auf die Lippmann'sche Platte eine durchsichtige ebene Glasplatte und orientirt die entstehenden Luftinterferenzstreifen so, dass sie jenen Interferenzstreifen senkrecht durchschneiden, so bemerkt man an der Durchschnittsstelle eine starke Verschiebung der Interferenzstreifen, welche an einigen Stellen den Betrag von etwa einer halben Streifenbreite erreicht.

Diese Verschiebung beweist einen sehr raschen Wechsel der Phase der von der Lippmann'schen Schicht kommenden Gesammtwelle; denn dass nicht etwa Dickenunterschiede der Schicht, vielleicht durch die Verschiedenheit der Stärke des Niederschlages hervorgerufen, die Ursache der Streifenverschiebungen sind, erkennt man, wenn man den Einfallswinkel der Strahlen ändert und dadurch die Stelle raschen Phasenwechsels auf der Oberfläche des Blättchens verschiebt. Diese Stelle dürfte sich nicht ändern, wenn Dickenunterschiede des Blättchens hier in Frage kämen.

Die Verschiebungen sind vielmehr die Folge der mit der Entfernung der Beleuchtungsfarbe von der Belichtungsfarbe sich rasch ändernden Phase ω der Tiefenwellen und der damit verbundenen raschen Phasenänderung der Gesammtwelle.

Der einzige Unterschied zwischen den Bedingungen des Versuches und der Darstellung der Figuren ist, dass der Versuch sich auf dieselbe Beleuchtungsfarbe bei sich ändernder Belichtungsfarbe bezieht, während die Figuren den umgekehrten Fall erläutern.

Die beobachtete Phasenänderung ist derart, dass sie für die vom Interferenzstreifen gegen Roth hin liegende Seite des Lippmann'schen Spectrums gegenüber der gegen Violett zu liegenden eine Phasenbeschleunigung der Gesammtwelle bedeutet. Daraus folgt, wie man sich leicht klar machen kann, dass der Oberflächenwelle im vorliegenden Fall eine grössere Amplitude als der Tiefenwelle zukommt. Wenngleich die

letztere in der Nähe der Stelle, wo sie mit der Oberflächenwelle entgegengesetzte Phase hat, nicht ihre maximale Amplitude besitzt, so geht daraus doch hervor, wie wenig man Recht hat, die Oberflächenwelle ausser acht zu lassen.

Meslin[1]) glaubt die besprochenen Interferenzstreifen im Spectrum auch ohne Oberflächenwelle erklären zu können. Er irrt sich darin; denn dann gelten die durch Fig. 8 dargestellten Intensitätsverhältnisse in Uebereinstimmung mit seinen eigenen Formeln. Die Helligkeit fällt von ihrem Maximum symmetrisch nach beiden Seiten des Spectrums ab.

Das lässt sich auch leicht durch das Experiment beweisen; man braucht bloss über die Lippmann'sche Platte z. B. Kanadabalsam zu giessen und mit einer Glasplatte zuzudecken, so ist die interferenzfähige Oberflächenwelle beseitigt. Denn die von der Oberfläche der aufgelegten Glasplatte reflectirte Welle kommt nun wegen des zu grossen Abstandes von der Schicht nicht mehr zur Interferenz.

Die spectrale Untersuchung der Helligkeitsvertheilung für die verschiedenen Farben entspricht vollständig der Erwartung. Der Interferenzstreifen ist verschwunden und statt dessen ist eine verhältnissmässig schmale helle Zone zu erkennen in dem sonst dunklen Spectrum. Diese Zone habe ich z. B. in einem Falle als zwischen den Wellenlängen 682 und 618 $\mu\mu$ liegend gefunden. Das entspricht einem Winkel α für die Randfarbe gegenüber der Mittelfarbe von 18^0.

Aber all dies gilt nur für so dicke Platten, dass von der Rückseite nicht mehr merklich Licht reflectirt werden kann. Bei dünnen Platten gelten die Betrachtungen des Abschnittes 6 nicht mehr streng. Es wird dann jede einzelne Elementarwelle ihre Schwankungen für die Amplitude der Gesammtwelle bedingen[2]), d. h. man wird mehr als einen dunklen Streifen im analysirenden Spectrum erhalten. Das habe ich auch an dünnen Platten bekommen, ja auch noch an dickeren

---

1) G. Meslin, l. c.

2) Das Genauere ergiebt sich aus der Summation der p. 518 angeführten Reihe, die dann mit einem endlichen Gliede x^n abschliesst; es wird dann

$$s = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

in den gelben und rothen Theilen des Spectrums, für die die Absorption der Schicht besonders schwach ist.

Daher erklären sich auch die von Schütt[1]) beobachteten Streifen, der mit sehr dünnen Schichten experimentirte. Es trägt aber, wie man sieht, nicht zur Güte der Farbenwiedergabe bei. Bei den Becquerel'schen Chlorsilberplatten, auf die sich Schütt beruft, liegen die Verhältnisse anders, weil dort die Absorption in der Schicht eine unverhältnissmässig stärkere ist, als bei den Lippmann'schen Platten.

8. Krone's Farbendarstellung ohne Quecksilberspiegel; Versuche von Neuhauss.

Die vorstehenden Untersuchungen ermöglichen das Verständniss für die Versuche verschiedener Forscher auf diesem Gebiete, welche noch nicht richtig oder noch nicht völlig erklärt waren.

Krone[2]) ist es gelungen, das Spectrum auch ohne Quecksilberreflexion zu photographiren. Die Reflexion erfolgt also in der Schicht an Luft. Die Abweichung der von ihm erhaltenen Farben von den entsprechenden unter Anwendung des Quecksilberspiegels ergiebt sich ohne weiteres, wenn man beachtet, dass die Phasenänderung φ bei Reflexion in Schicht an Luft jetzt Null ist, statt wie sonst etwa zwischen 0,4 und 0,5 zu liegen. Die Phasenverzögerung der Tiefenwelle gegenüber der Oberflächenwelle ergiebt sich daher aus der p. 503 abgeleiteten Formel

$$\delta = \psi - \tfrac{1}{2}.$$

Wäre ψ, die Phasenänderung bei Reflexion an einem Elementarspiegel, genau gleich $\frac{1}{2}$, so würde durch dieses Verfahren genau die richtige Farbe wiedergegeben. Die Farben müssen aber dann schon im Vergleich zu den mit dem Quecksilberspiegel erhaltenen nach Roth zu verschoben sein. Das ist es auch, was Krone beobachtet.[3]) Sie müssen noch weiter im gleichen Sinne verschoben sein, wenn, wie im Abschnitt 2 wahrscheinlich gemacht, ψ etwas kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, sodass δ

1) F. Schütt, l. c. p. 546.

2) H. Krone, Die Darstellung der natürlichen Farben durch Photographie, Verl. der deutsch. Photographenzeitung (K. Schwier), Weimar 1894.

3) H. Krone, l. c. p. 65.

negativ wird und gegenüber dem bei Quecksilberreflexion geltenden Werth sein Zeichen wechselt. Man ersieht dies leicht aus **Fig. 11**, wo W_{t2} jetzt für kleinere Wellen als die der Beleuchtungsfarbe mit der Oberflächenwelle W_{ob} eine übereinstimmende Phase erhält. Im gleichen Sinne wirkt auch die Reflexion an der unteren Grenze des ersten Elementarspiegels, dessen Symmetrieebene jetzt in die Oberfläche hineinfällt, sodass seine eine Hälfte fehlt.

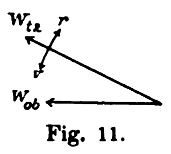


Fig. 11.

Auch dieser Schluss bestätigt sich, da Krone nach seiner Methode gewöhnlich überhaupt kein Roth erhält.

Neuhauss hat seine Versuche mit Lippmann'schen Photographien ausführlich in dem schon erwähnten Buche beschrieben und auch seine zum Theil lang andauernden Misserfolge in humorvoller Weise zum besten gegeben.[1]) Es ergiebt sich daraus ein von vornherein schwer verständlicher Einfluss der Bezugsquelle seiner Gelatine.

Wenn man bedenkt, wie häufig schon kleine, chemisch kaum nachweisbare Verunreinigungen die Phasenänderung eines durchsichtigen Stoffes an Metallen beeinflusst, so liegt es nahe, darin jenen Einfluss der Gelatinesorte zu suchen. Mit der Phasenänderung φ ändert sich aber auch das für die Oberflächenreflexion maassgebende δ. Ist diese Erklärung richtig, so musste Neuhauss mit Gelatine jeglicher Sorte gleich gute Bilder erhalten, sowie er die Oberflächenreflexion beseitigte.

Versuche mit Mischfarbenaufnahmen durch Eiweissplatten haben Neuhauss[2]) auf die Vermuthung eines besonderen Einflusses der obersten Schicht geführt. Er sagt über die Möglichkeit eines Erfolges solcher Aufnahmen mit Eiweissplatten:

„Es hat nämlich den Anschein, als ob unter der Oberfläche doch gute Lamellenbildung vorhanden ist, welche auch die Mischfarben richtig wiedergeben könnte, und dass nur durch die alleroberste Schicht, welche bei der Aufnahme in unmittelbarer Berührung mit dem Quecksilber steht und daher durch das Licht die durchgreifendsten Veränderungen erfährt, die

1) R. Neuhauss, l. c. p. 20.
2) R. Neuhauss, l. c. p. 15.

richtigen Farben zerstört werden. Im Einklang mit dieser Vermuthung steht der Umstand, dass die Mischfarben auf der Rückseite des Glases häufig besser sichtbar sind, als auf der Schichtseite.“

Neuhauss’ Vermuthung wird streng richtig, wenn man statt „alleroberste Schicht“ das Wort „Oberfläche“ setzt.

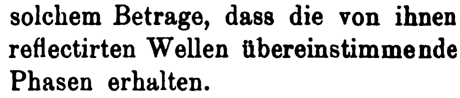
Uebrigens ist es nicht ausgeschlossen, dass unter Umständen unmittelbare chemische Einwirkungen des Quecksilbers auf die Schicht ausserdem noch eine Rolle spielen. Es würde mich zu weit führen, wollte ich noch weitere Beobachtungen dieser Art erörtern, die sich leicht auf einen der oben besprochenen Einflüsse zurückführen lassen.

9. Beseitigung des ungünstigen Einflusses der Oberflächenreflexion.

Am nächsten liegen die folgenden Verfahren, um den störenden Einfluss der Oberflächenwelle zu beseitigen.

1. Man beseitigt die Reflexion an der Oberfläche überhaupt.

2. Man lässt die Oberflächenwelle nicht zu merklicher Interferenz mit der Tiefenwelle kommen.

3. Man verändert nach der Fertigstellung der Platte den Abstand der Oberfläche von dem ersten Elementarspiegel in solchem Betrage, dass die von ihnen reflectirten Wellen übereinstimmende Phasen erhalten.

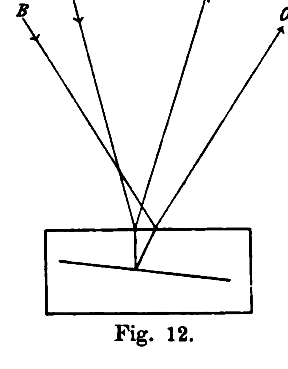
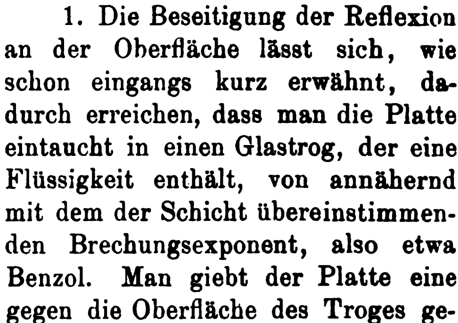


Fig. 12.


1. Die Beseitigung der Reflexion an der Oberfläche lässt sich, wie schon eingangs kurz erwähnt, dadurch erreichen, dass man die Platte eintaucht in einen Glastrog, der eine Flüssigkeit enthält, von annähernd mit dem der Schicht übereinstimmenden Brechungsexponent, also etwa Benzol. Man giebt der Platte eine gegen die Oberfläche des Troges geneigte Stellung, sodass sie nach dem Auge in *O* (Fig. 12) das Licht einer wenig ausgedehnten Lichtquelle in *A* zurückwirft. Da in der Flüssigkeit an der Schicht keine merkliche Reflexion

stattfindet, so gelangt nur das von den Elementarspiegeln zurückgeworfene Licht ins Auge, während die Oberfläche des Troges das Licht nach einer anderen Richtung A' reflectirt. Es muss nur dafür gesorgt sein, dass in der Richtung B von woher die Trogoberfläche Licht nach O spiegeln könnte, keine störende Helligkeit herrscht.

Unter diesen Verhältnissen gewahrt man überaus glänzende Farben, die annähernd an der richtigen Stelle liegen.

Lässt man den einen Theil der Platte aus der Flüssigkeit herausragen, und auch von ihr Licht reflectiren, so zeigen sich die Farben des photographirten Spectrums gegeneinander verschoben, und zwar so, dass der herausragende Theil, abgesehen von dem rothen Ende des Spectrums, Farben grösserer Wellenlänge zeigt, als der benachbarte eingetauchte Theil, in Uebereinstimmung mit obiger Theorie.

Das Gleiche erreicht man durch Verwendung eines schwachen Glaskeiles, der mit Canadabalsam auf die Schicht gekittet wird. Nach Valenta[1]) hat sich schon L. Lumière eines solchen bei Projectionen bedient, die erzielte glänzende Farbenwirkung liegt aber nicht an der Projection, wie Valenta anzunehmen scheint[2]), sondern hauptsächlich in der Ausschaltung der störenden Oberflächenreflexion.

In Ermangelung eines Glaskeiles kann man eine zweite Planplatte mit keilförmiger dickflüssiger Canadabalsamschicht auf die photographische Platte aufkitten. Man kann dann leicht die Platten so halten, dass nur das aus der Tiefe kommende Licht ins Auge fällt, das dann die Farben in grosser Sättigung und Glanz erblickt.

Das Verfahren des Eintauchens der fertigen Platte in Benzol empfiehlt sich zum mindesten zu ihrer Prüfung. Man kann so stets leicht entscheiden, ob wenigstens die Elementarspiegel gut und in richtigen Abständen ausgebildet sind.

2. Kittet man die Planplatte nicht keilförmig, sondern parallel zur photographischen Platte auf, so wird deren Oberflächenreflexion zwar beseitigt, man erhält aber dafür Licht von der Aussenseite der Planplatte reflectirt. Doch dieses

---

1) E. Valenta, l. c. p. 79.

2) l. c. p. 78.

deckt sich jetzt als weisses Licht gleichmässig über die aus der Tiefe stammenden Farben; denn der grosse Gangunterschied zwischen beiden Wellen schliesst eine störende Interferenz aus.

Dieser Gangunterschied braucht nicht einmal so gross zu sein, es genügt einfach eine dickere Schicht von photographischem Lack, Collodium, Celloidin (gelöst in Amylacetat, sog. Zaponlack) oder dergleichen aufzutragen, so treten bereits die richtigen Farben der Schicht hervor. Die aufzutragende Schicht braucht nur so dick zu sein, dass sie für sich ein Weiss ausreichend hoher Ordnung erzeugen würde. Sie braucht um so weniger dick zu sein, je weniger homogen die Farben der Schicht sind.

Will man Gelatine selbst auftragen, so muss man sich vorsehen, dass man dabei die nicht schon vorhandene Gelatineschicht auflockert und dadurch den Abstand der Elementarspiegel ändert. Es wird sich dann empfehlen, wenigstens erst eine andersartige dünne Schicht, z. B. von Collodium, zwischenzuschalten.

Die so erhaltenen Platten liefern natürlich lange nicht so glänzende Farben, wie die nach Verfahren 1, weil eben sich überall das Weiss der Oberflächenreflexion überlagert.[1])

3. Ein günstigeres Ergebniss wäre zu erwarten, wenn es gelänge, der Oberfläche der Schicht einen solchen Abstand von dem ersten Elementarspiegel zu geben, dass die Phase der Oberflächenwelle mit der der Tiefenwelle übereinstimmt.

Dies ist zunächst möglich durch ein Heben der Oberfläche, d. h. indem man eine dünne Schicht, wieder etwa von Celloidin aufträgt. Da die Oberflächenwelle gegenüber der Tiefenwelle um 0,4 bis 0,5 λ voraus ist, so würde für eine Ergänzung des Gangunterschiedes zu einer ganzen Wellenlänge ein Phasenzuwachs von 0,6 bis 0,5, oder ein Dickenzuwachs gleich der Hälfte, also 0,3 bis 0,25 λ (bezogen auf die Schicht) nöthig sein.

---

1) Wie ich hinterher bemerke, hat auch schon Neuhauss in seinem Buch p. 59, um die Platten zu schützen, Lack und dergleichen aufgegossen. Er giebt unter anderem an, dass die Farben an Glanz verlieren, nicht aber, dass sie sich ändern.

Zu diesem Zwecke stellt man sich verdünnte Lösungen der aufzutragenden Schicht her und prüft die mit bestimmter Tropfenzahl erzielte Dicke durch eine Probeglasplatte von gleicher Fläche, wie die der photographischen Platte, indem man nach Eintrocknen einen Theil der Schicht entfernt, eine zweite Glasplatte auflegt und die an der Grenze des weggewischten Theiles im Natriumlicht eintretende Verschiebung der Luftinterferenzen beobachtet.[1])

Es gelang mir in einem Falle, die richtige Schichtdicke zu treffen, sodass die Farben ziemlich richtig, wenn auch nicht genau richtig wiedergegeben wurden. Es ist aber ziemlich schwer, gleichförmige Dicke zu erreichen; daher zeigten sich an einer Stelle Farbenschwankungen entlang der Richtung der Spectrallinien. Ferner müsste streng genommen, wegen der Abnahme der Wellenlänge gegen Violett, die aufgetragene Schicht auf dem violetten Ende des Spectrums kleiner, als auf dem rothen Ende sein.

Dass obiger Versuch annähernd gelang, war nur ein Zufall, denn ich kannte damals noch nicht den richtigen Werth für die Phasenänderung am Elementarspiegel.

Dass er trotzdem gelang, liegt daran, dass es sehr schwer ist, selbst bei gleicher Tropfenzahl stets gleiche Dicken zu erzielen, weil sich von der Flüssigkeit bald mehr, bald weniger am Rande ansammelt, und dass ein Dickenausfall von $^1/_8$ Wellenlänge in der Schicht, oder nur $^1/_{12}$ Wellenlänge in Luft den Fehler wieder ausgleichen konnte. Andere Versuche misslangen unter anscheinend gleichen Bedingungen. Immerhin sind Abänderungen dieses Verfahrens denkbar, welche besser und sicherer zum Ziel führen.

Jedenfalls beweisen diese Versuche schlagend den Einfluss der Oberflächenreflexion. Giesst man z. B. eine äusserst verdünnte Lösung auf, deckt eine zweite Glasplatte darüber und zieht ab, so erhält man dabei sehr ungleichmässige Dicken. Es erscheinen jetzt zum Theil die glänzendsten Farben, aber an durchaus verkehrten Stellen.

Statt die Grenzfläche nach oben, kann man sie auch nach unten verlegen, zunächst durch einfaches mechanisches Ab-

---

1) Vgl. O. Wiener, Wied. Ann. **40.** p. 207. 1890, wo das Verfahren genauer beschrieben ist.

tragen. Dieser Versuch wurde, wie bereits erwähnt, schon von Neuhauss[1]) ausgeführt. Es treten dann, wie meine eigenen Versuche bestätigen, zunächst im allgemeinen die benachbarten Farben kürzerer Wellenlänge auf, d. h. man nähert sich und erreicht bei bestimmter Dickenabnahme der Schicht die richtigen Farben. Geht man noch weiter, so treten wieder verkehrte Farben auf. Es genügt hier, auf schon früher Erwähntes zu verweisen (p. 509).

Eine dritte Möglichkeit ergiebt sich noch aus dem Versuche von Neuhauss[2]), bei dem er die oberflächliche Schicht durch einen photographischen Abschwächer — Lösung von Sublimat oder Fixirnatron und Blutlaugensalz — veränderte oder theilweise zerstörte. Es wird dadurch gleichfalls der Abstand der Oberfläche von dem nächsten Elementarspiegel vergrössert. Doch ist dadurch nicht ohne weiteres die Uebereinstimmung der Phase der Oberflächenwelle mit der von den tiefer liegenden Elementarspiegeln gesichert. Immerhin hatte Neuhauss damit Erfolg. Er schreibt: „Bei dieser Behandlungsmethode" — mit dem zweitgenannten Mittel — „kamen in der That richtige Mischfarben zum Vorschein, von denen vorher keine Spur zu finden war". Es ist möglich, dass die zerstörte Schicht einen ausreichend grossen Abstand der Oberfläche von den Elementarspiegeln herbeiführte, um zwischen beiden ein Weiss höherer Ordnung zu erzeugen.

Bei der Behandlung mit Sublimat ist zu beachten, dass die Schicht so durchsichtig wird, dass die Phasenänderung des Elementarspiegels den Betrag von einer viertel Wellenlänge annimmt. Dafür spricht der Umstand, dass hier Neuhauss[3]) in der Durchsicht die Complementärfarben zu denen der Aufsicht erhielt.

10. Verschiedene sonstige Fehlerquellen beim Lippmann'schen Farbenverfahren. — Schluss.

Auf allerlei andere Fehler, deren Vermeidung beim Lippmann'schen Verfahren anzustreben ist, sei hier nur noch kurz eingegangen.

1) R. Neuhauss, Verhandl. d. physikal. Gesellsch. zu Berlin 14. p. 19. 1895.

2) In dem citirten Buche p. 15.

3) l. c. p. 53.

Die richtige Farbenwiedergabe setzt voraus, dass zwischen zwei Bäuchen der stehenden Lichtwellen der optische Weg, d. h. die Zahl der Wellenlängen, während der Belichtung und nach Fertigstellung der Platte derselbe bleibt.

Zunächst ist klar, dass der optische Weg sich ändert, wenn der Feuchtigkeitsgehalt der Gelatine sich ändert. Es ist daher das sicherste, die Platte vor der Belichtung im Exsiccator zu trocknen. Denn hinterher lässt sie sich jederzeit wieder vollständig trocknen, falls man sie nicht mit einer für Wasserdampf undurchlässigen Schicht überziehen will.

Aber selbst bei gleich bleibendem Feuchtigkeitsgehalt wird der optische Weg kaum derselbe bleiben. Denn, wenn auch alles Silber reducirt würde und diesem als molecularem Silber der Brechungsexponent 4 zukäme, würde der optische Weg gegenüber der ursprünglichen Bromsilberschicht verringert, um so mehr also, wenn ein Theil des Bromsilbers ausfixirt wird.

Ich habe ausgerechnet, dass der optische Weg sich um etwa 4 Proc. vermindert, wenn die Hälfte des Silbers reducirt würde. Der entsprechende Farbenfehler muss noch deutlich zu bemerken sein. Es müssen im Vergleich zu der Belichtungsfarbe im Bilde Farben kleinerer Wellenlängen erscheinen, und um so kleiner, je kürzer die Belichtung gedauert hat. Dies wird auch von verschiedenen Seiten bestätigt.

Dieser Fehler liesse sich leicht beseitigen durch Baden der fertigen Platte in der Lösung eines indifferenten Körpers, durch dessen Aufnahme dann der optische Weg wieder vergrössert wird. Auch könnte man daran denken, die Schicht durch Wasserdämpfe aufzuquellen, und nach Erreichung der richtigen Dicke sie dicht gegen die Luft abzuschliessen.[1])

Doch hat es nur Zweck darauf einzugehen, wenn man den Fehler der Oberflächenreflexion beseitigt, der im allgemeinen überwiegen wird.

Auf andere Fehler, wie den, welchen die Absorption des Niederschlages, besonders der kurzwelligen Farben bedingt, ist schon von anderer Seite genügend eingegangen worden.

---

1) Vgl. dazu Versuche von Neuhauss in dessen Buch p. 49, wo die hier berührten Fehlerquellen in Betracht kommen. Besagte Stelle kam mir erst zu Gesicht, als ich obiges schon geschrieben hatte.

Die vorstehende Untersuchung wurde bereits 1895 im physikalischen Institut der Technischen Hochschule in Aachen begonnen im Zusammenhang mit Versuchen an Becquerel'schen Farbenphotographien. Diese entstehen bekanntlich in silberchlorürhaltigen Chlorsilberschichten auf Silberunterlage im wesentlichen[1]) durch die Wirkung stehender Lichtwellen. Hebt man die Schicht von der Unterlage ab, so erblickt man auf der Hinterseite Farben, die von denen auf der Vorderseite wesentlich verschieden sind. Der Einfluss der störenden Oberflächenreflexion macht sich dort noch viel stärker bemerklich als bei den Lippmann'schen Schichten. Er konnte durch Eintauchen des Blättchens in Schwefelkohlenstoff vermindert, wenn auch wegen des immer noch grösser bleibenden Brechungsexponenten der Schicht so nicht völlig beseitigt werden.

Die Versuche wurden erst in diesem Jahre im physikalischen Institut der Universität Giessen fortgesetzt. Ich wurde dabei durch Hrn. Lehramtsaccessist Nennstiel unterstützt, der insbesondere die Spectrumbilder nach den Vorschriften von Neuhauss herstellte, wofür ich ihm sehr zu Dank verpflichtet bin.

Die Versuche wurden endlich im hiesigen Institute abgeschlossen, wobei mir in der Beurtheilung der Farben, wie auch schon früher, Hr. Dr. Scholl behülflich war.

Die Untersuchung ist annähernd soweit fortgeführt, als es gut möglich ist, ohne die Eigenschaften des photographischen Niederschlages experimentell genauer festzustellen. Ich wollte aber die Veröffentlichung ihrer Ergebnisse nicht länger hinausschieben, die, wie ich hoffe, dem Praktiker von Nutzen sein werden.

Leipzig, Physikal. Inst. d. Univ., August 1899.

1) O. Wiener, Wied. Ann. 55. p. 246 u. 256. 1895.

(Eingegangen 24. August 1899.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1899. ANNALEN № 11.
DER
PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND 69.

1. *Ueber bewegte Körper im elektrischen Felde und über die elektrische Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft;*
von Adolf Heydweiller.

I. Ponderomotorische Kräfte des elektrischen Feldes auf bewegte Körper.

1. Befindet sich ein leitender Körper im elektrischen Felde in einer Umgebung von anderem Leitvermögen, so treten an seiner Oberfläche elektrische Ladungen auf, die sich bei einer relativen Bewegung des Körpers gegen die Kraftlinien des Feldes verschieben und dadurch ponderomotorische Kräfte des Feldes auf den bewegten Körper hervorrufen. Diese Kräfte hemmen die vorhandene Bewegung des Körpers, wenn sein Leitvermögen das der Umgebung übertrifft, sie wirken beschleunigend unter Verbrauch elektrischer Energie im umgekehrten Falle. Ich werde sie im Folgenden kurz als *hemmende* und *treibende* Kräfte unterscheiden. Bei gewissen kleinen Werthen des Leitvermögens können sie auch bei mässigen Geschwindigkeiten messbare Grösse erreichen.

Den theoretischen und experimentellen Nachweis der hemmenden Kräfte für den speciellen Fall, dass das Leitvermögen in der Umgebung des bewegten Körpers verschwindend klein ist, verdanken wir Heinrich Hertz[1]); auf die Verallgemeinerung seiner Entwickelungen und deren Anwendung zur Erklärung von Beobachtungen Hrn. Quincke's und Hrn. O. E. Meyer's habe ich hingewiesen[2]), und Hr. v. Schweidler hat sie auf Hrn. Boltzmann's Veranlassung für den Fall einer im homogenen elektrischen Felde rotirenden Kugel

1) H. Hertz, Wied. Ann. 13. p. 266. 1881; Ges. Werke 1. p. 135. 1895.

2) A. Heydweiller, Verhandl. d. Phys. Gesellsch. zu Berlin 16. p. 32. 1897.

rechnerisch durchgeführt.[1]) Weitere hierher gehörige Beobachtungen werden später erwähnt.

2. Neben diesen Kräften treten noch andere auf, die mit den dielektrischen Eigenschaften des bewegten Körpers zusammenhängen, da infolge der Bewegung die Richtung der dielektrischen Polarisation nicht mehr in jedem Augenblicke zusammenfällt mit der Richtung der elektrischen Kraft; diese Eigenschaft hat man als *dielektrische Hysteresis* bezeichnet; die durch sie bedingten Kräfte, die stets nur unter Verbrauch freier Energie hemmend wirken[2]), sind Gegenstand zahlreicher Experimentaluntersuchungen gewesen, unter denen hier die von Arnò[3]), Threlfall[4]) und Schaufelberger[5]) hervorzuheben sind. Aus dem Folgenden wird hervorgehen, dass bei den meisten dieser Versuche neben den dielektrischen Hysteresiserscheinungen wohl auch Kräfte der erstgenannten Art wirksam waren.

II. Die Vergleichung sehr kleiner elektrischer Leitvermögen.

3. Auf die Möglichkeit, die im ersten Abschnitt erwähnten Erscheinungen für die Bestimmung sehr kleiner Leitvermögen von sogenannten Isolatoren nutzbar zu machen, hat ebenfalls schon H. Hertz hingewiesen. Die Vervollständigung seiner Theorie durch Hrn. v. Schweidler lässt sie noch deutlicher hervortreten.

Hiernach ist das Drehungsmoment, das eine gleichförmig rotirende Kugel vom Radius R im homogenen elektrischen Felde von der Stärke F (elektrostatisch) mit den Kraftlinien senkrecht zur Rotationsaxe erfährt:

$$(1)\qquad D = R^3 F^2 \frac{{}^3/_2\, \tau (\lambda_a - \lambda_i)}{1 + ({}^3/_2\, \tau)^2 (2\lambda_a + \lambda_i)^2}\,,$$

wenn τ die Umlaufszeit, λ_i die elektrische Leitfähigkeit der Kugel im elektrostatischen Maasse und λ_a die der Umgebung ist.

---

1) E. v. Schweidler, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **106.** IIa. p. 526. 1897.

2) Vgl. L. Boltzmann, Wied. Ann. **60.** p. 399. 1897.

3) R. Arnò, N. Cim. (3) **33.** p. 15. 1893; Elektrotechn. Zeitschr. **14.** p. 17. 1893; Rend. della R. Acc. dei Lincei (5) **2.** I. p. 341, **2.** II. p. 260. 1893; Atti della Acc. di Torino **29.** p. 429. 1894; Rend. della R. Acc. dei Lincei (5) **3.** I. p. 272 u. 294. 1894; N. Cim. (4) **5.** p. 52. 1897.

4) R. Threlfall, Phys. Rev. **4.** p. 457; **5.** p. 21 u. 65. 1897.

5) W. Schaufelberger, Wied. Ann. **67.** p. 307. 1899.

Ist λ_i gegen λ_a zu vernachlässigen, so erhält man ein treibendes Drehungsmoment

$$(2) \qquad D = R^3 F^2 \frac{{}^2/_3\, \tau\, \lambda_a}{1 + 4\,({}^2/_3\, \tau\, \lambda_a)^2},$$

für λ_a klein gegen λ_i dagegen ein hemmendes:

$$(3) \qquad D = -R^3 F^2 \frac{{}^2/_3\, \tau\, \lambda_i}{1 + ({}^2/_3\, \tau\, \lambda_i)^2}.$$

Ein rotirendes elektrisches Feld würde im letzteren Falle die Kugel mitzuziehen, im ersteren entgegengesetzt zu drehen suchen, und wenn es gelänge, die Erscheinung rein zu erhalten, müsste man aus den gemessenen Grössen D, R, F und τ die Leitfähigkeiten λ_i oder λ_a bestimmen können. Das ist nun, wie schon Hertz bemerkte, leider nicht der Fall, da zu den leitenden Eigenschaften der in Betracht kommenden festen oder flüssigen Körper die dielektrischen hinzutreten und zu Kräften der zweiten Art Veranlassung geben. Wenn sonach auch genauere quantitative Bestimmungen auf diesem Wege nicht möglich sind, so bieten die besprochenen Erscheinungen doch ein äusserst empfindliches Reagenz auf sehr geringe, in anderer Weise kaum nachweisbare Spuren von Leitvermögen und gestatten eine Bestimmung derselben wenigstens der Grössenordnung nach, die den Vortheil hat, unabhängig zu sein von jeder hypothetischen Annahme über die Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes für die schlechten Leiter und von etwaigen „Uebergangswiderständen" an den Zuführungsstellen des elektrischen Stromes.

III. Störungen und Schwierigkeiten.

4. Der Ausführung solcher Bestimmungen war zunächst folgende Idee zu Grunde gelegt worden. In ein rotirendes elektrisches Feld sollte ein schlechter fester Leiter in Form eines Rotationskörpers in ein gasförmiges oder flüssiges Medium von ebenfalls geringem Leitvermögen eingeführt werden. Bei einer Aenderung des Leitvermögens des festen Körpers oder der Umgebung schien es möglich, einen Uebergang von hemmenden zu treibenden Kräften des rotirenden elektrischen Feldes auf den festen Körper zu finden, dem bei Abwesenheit dielektrischer Hysteresis Gleichheit des Leitvermögens von festem

Körper und Umgebung entsprechen musste, mit Rücksicht darauf, dass die dielektrische Hysteresis nur hemmende Kräfte erzeugt, aber wenigstens Grenzwerthe des Leitvermögens ergeben konnte.

Der Erfolg der ersten mit einer Ebonitscheibe in Luft von verschiedener Dichte angestellten Versuche schien den Erwartungen zu entsprechen. Bald ergab sich aber, dass neben dem schon hier störend bemerkbaren Einfluss der dielektrischen Hysteresis des Ebonits noch andere Wirkungen die Versuche beeinflussten.

Bei der gewählten Versuchsanordnung war ein Einschliessen der rotirenden Scheibe in ein Glasgehäuse nicht zu vermeiden, schon um bei verschiedenen Verdünnungsgraden der Luft beobachten zu können, aber auch bei Luft von Atmosphärendruck, da sich eine vollkommene Trockenheit der Luft nothwendig erwies, und die Ebonitscheibe gegen Luftströmungen gesichert werden musste. Den rotirenden Condensator in das Gehäuse mit einzuschliessen ging nicht an, so befand sich dieses zwischen Condensator und Scheibe, sodass Ladungen an den beiden Seiten der Glaswand auftraten, die im rotirenden Felde zu neuen störenden Kräften Veranlassung gaben. Diese Störungen machten sich zunächst durch einen polaren Unterschied bemerklich, durch Verschiedenheit der erhaltenen Resultate, je nachdem die positive oder die negative Condensatorplatte zur Erde abgeleitet war, dann dadurch, dass nachfolgende Versuche mit ruhendem Condensator zu ganz anderen Ergebnissen führten. Ferner zeigte sich im letzteren Fall, dass die Wirkung einer allmählich gesteigerten Condensatorentladung mit der Zeit abnahm, bei Entladung aber von neuem wieder auftrat und durch langsam abwechselnde Ladung und Entladung dauernd zu erhalten war. Endlich liessen sich die Ladungen der Glaswand direct nachweisen durch einen an der Innenseite der isolirten Condensatorplatte befestigten Streifen aus Aluminiumblatt, der bei hinreichend starker Ladung der Platte divergirte, bei Entladung aber nicht sofort, sondern erst nach einiger Zeit zurückging.

Auf diese Ladungen der Glaswand ist auch wohl der Einfluss von Feuchtigkeit in der umgebenden Luft ausserhalb des Glasgefässes zurückzuführen.

Ebenso sind begreiflicherweise auch Feuchtigkeitsschichten auf der rotirenden Scheibe von Einfluss.

Die entscheidenden Versuche wurden daher immer erst angestellt, nachdem die Scheiben tage- oder gar wochenlang in mit Phosphorpentoxyd getrockneter Luft gehangen und ausserdem auch nur bei ziemlich trockener Zimmerluft.

Die Frage, ob nicht directe Influenzwirkungen infolge mangelhafter Symmetrie des rotirenden Körpers oder der Aufhängevorrichtung die Ergebnisse merklich beeinflussen, liess sich auf Grund mehrfacher Controlversuche bei verschiedener Orientirung der Scheibe gegen die Kraftlinien des Feldes verneinen.

Dagegen machten sich gelegentlich dauernde mit der dielektrischen Hysteresis zusammenhängende Ladungen der rotirenden Scheibe störend bemerklich.

Die erwähnten Umstände führten dazu, die ursprüngliche Idee zu verlassen, und die Beobachtungen hauptsächlich bei ruhendem Condensator anzustellen, wobei man freilich auf das Feststellen treibender Kräfte beschränkt blieb und auch hierbei von dem Vorhandensein zufälliger kleiner Bewegungen abhängig war.

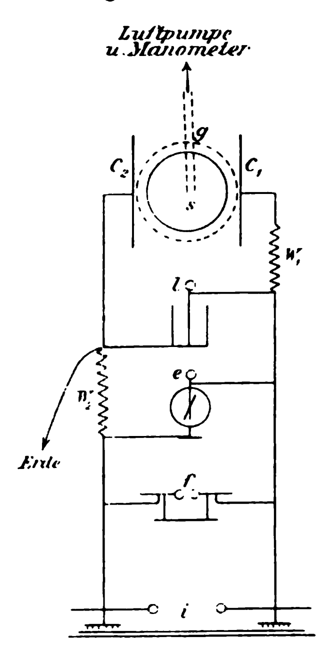
Diese mit Paraffin-, Ebonit- und Glimmerscheiben angestellten Versuche liessen erkennen, dass auch hier zweierlei Wirkungen auftreten, von denen die eine an der Grenze von Glasgehäuse und innerer Luft ihren Sitz hat, zuerst diese in Bewegung setzt und dann erst vermöge der inneren Reibung auch die Scheibe, während die andere an der Grenze von Luft und Scheibe direct auf letztere wirkt. Um diese beiden Wirkungen, von denen die erste hauptsächlich bei grösserer, die andere nur bei sehr geringer Luftdichte zur Geltung kommt, voneinander zu trennen, wurden noch Versuche mit einer Scheibe aus dünnem Kupferblech angestellt, bei der wegen hres grossen Leitvermögens die letzteren Kräfte unmerklich werden.

IV. Versuche im rotirenden Feld.

5. *Versuchsanordnung.* Die Scheiben, deren Rotation beobachtet wurde, waren anfänglich mit Glashütchen auf Spitzen aufgesetzt, später zur Erhöhung der Empfindlichkeit mit einer

Coconsuspension versehen; sie wurden mittels zweier Kork-cylinderchen auf einer Stecknadel festgeklemmt, die an einem 10 cm langen, möglichst feinen Coconfaden hing und zur Verminderung seitlicher Schwankungen unten mit einer kleinen Bleikugel beschwert war. Der Durchmesser der Scheiben betrug 6—7 cm.

Das rotirende Feld wurde bei den ersten Versuchen mit einem geriebenen Glas- oder Ebonitstab erzeugt, der in einem Abstande von etwa 5 cm um die Drehungsaxe der Scheibe rotirte. Später wurde ein Condensator angewendet mit kreisrunden Platten von 10 cm Abstand und von 14 cm Durchmesser, die an zwei concentrischen durch eine Ebonitlage getrennten Cylindern befestigt, mit diesen auf die Axe einer Schwungmaschine gesetzt wurden; die eine Platte war durch die Schwungmaschine zur Erde abgeleitet, die andere wurde mittels einer auf dem zugehörigen Cylinder schleifenden Feder geladen.



Die weitere Versuchsanordnung ist, mit Weglassung der Schwungmaschine, schematisch in der Figur dargestellt. *i* ist die ladende Holtz'sche Influenzmaschine, *f* eine Funkenstrecke, *e* ein Elektrometer, W_1 und W_2 sind Widerstände von ca. 1,3 bez. 50 Megohm, *l* eine grosse Leydener Flasche, c_1 und c_2 die beiden Condensatorplatten, *s* die rotirende Scheibe, eingeschlossen in ein cylindrisches Glasgehäuse *g* von 18 cm Höhe, 7 cm innerem Durchmesser und 0,2 bis 0,25 cm Wandstärke, das unten durch eine aufgekittete Glasplatte verschlossen, oben durch ein eingekittetes Rohr mit einer Töpler-Hagen'schen Quecksilberluftpumpe in Verbindung stand.

Die Influenzmaschine wurde bei jeder Beobachtung in Gang gehalten, sodass in der Funkenstrecke *f*, die zur Regulirung der Spannung diente, ein continuirlicher Funkenstrom

überging; l, w_1 und w_2 dienten zur Verminderung der Spannungsschwankungen. Gemessen wurden die Spannungen bis 3500 Volt mittels eines Braun'schen Elektrometers (mit neuer, richtiger Aichung), darüber hinaus mit meinem Elektrometer für hohe Spannungen[1]), bez. auch durch die Länge der Funkenstrecke f; der Luftdruck im Gehäuse g mit einem Mac Leod-Manometer Kahlbaum'scher Construction.[2]) Die angegebenen Drucke sind daher die der Luft und etwaiger Fett- oder Kittdämpfe (von den Dichtungen herrührend), aber abzüglich der Drucke des Quecksilber- und des Wasserdampfes, die in der angegebenen Weise nicht zur Messung kommen. Der letztere kann übrigens nur gering sein, da das Trockengefäss der Luftpumpe mit Phosphorpentoxyd beschickt war, das Auspumpen immer langsam geschah, sodass die kleinen Druckdifferenzen Zeit zum Ausgleich hatten, und, wie schon bemerkt, die endgültigen Versuche namentlich bei niederen Drucken erst nach tage- und wochenlangem Evacuiren vorgenommen wurden. Die Beobachtungen wurden bei Zimmertemperatur angestellt, meist in der Nähe von 18°.

6. *Einige Vorversuche.* Ich bezeichne im Folgenden mit + Rot. eine Rotation durch treibende Kräfte (Abschnitt 1), also entgegen der Feldrotation, mit — Rot. eine solche durch hemmende Kräfte mit dem rotirenden Felde.

In atmosphärischer Luft geben Scheiben aus Glimmer, Paraffin, Paraffinpapier, trockenem Schreibpapier, Kork lebhafte — Rot., sowohl innerhalb eines Glascylinders, wie ohne denselben; eine Kupferscheibe zeigt keine Bewegung. Benetzen der Glimmerscheibe mit destillirtem Wasser und Bedecken des Papieres mit Graphit schwächt die Wirkung, Anfeuchten mit verdünnter Säure hebt sie auf. In verdünnter Luft nimmt mit abnehmendem Druck die Wirkung erst ab, verschwindet bei geringeren Feldstärken und gewissen kleinen Drucken, um bei grosser Verdünnung wieder stärker zu werden. Bei grösserer Feldstärke erhält man mit der Glimmerscheibe für grosse und mittlere Drucke — Rot., für kleine + Rot., bei sehr hoher Verdünnung wieder — Rot. Es tritt also eine Umkehrung

1) A. Heydweiller, Wied. Ann. **48.** p. 110. 1893.

2) G. Kahlbaum, Zeitschr. f. Instrumentenk. **15.** p. 191. 1895.

der Wirkung auf bei Drucken, die für die angewandte Feldstärke etwa bei $^1/_{10}$ mm Hg lagen.

7. Die folgenden *Versuche mit rotirendem Condensator*, die isolirte Platte + geladen, werden das näher erläutern; p bezeichnet die Drucke in mm Hg, F die Feldstärken in elektrostatischen C.G.S.-Einheiten (bei 10 cm Plattenabstand gleich dem Potentialunterschied der Platten in Volt, dividirt durch 3000).

Tabelle 1.

Glimmerscheibe.

$p =$	25	8	2,5	1	0,5	0,25 mm
$F = 4$	—	—	—	—	+ Rot.	+ Rot.
$F = 5$	– Rot.	– Rot.	– Rot.	+ Rot.	+ Rot.	+ Rot.
$F = 6$	—	—	—	—	—	+ Rot.

$p =$	0,3	0,15	0,02	0,004 mm
$F = 0,5$	—	– Rot.	– Rot.	—
$F = 1,0$	– Rot.	+ Rot.	– Rot.	– Rot.
$F = 2,0$	+ Rot.	+ Rot.	+ Rot.	0
$F = 3,0$	—	+ Rot.	– Rot.	+ Rot.

Tabelle 2.

Ebonitscheibe.

$p =$	17,5	4,5	2,5	0,85	0,15	0,026	0,0023 mm
$F = 1$	– Rot.	– Rot.	– Rot.	—	—	—	– Rot.
$F = 4$	– Rot.	– Rot.	– Rot.	– Rot.	– Rot.	– Rot.	—
$F = 5$	– Rot.	– Rot.	—	0	+ Rot.	– Rot.	– Rot.
$F = 6$	– Rot.	0	+ Rot.	+ Rot.	+ Rot.	+ Rot.	∸ Rot.

Diese Versuche mit der Ebonitscheibe wurden bald nach dem Ansetzen des Gefässes an die Luftpumpe angestellt; nach längerer Verbindung mit der durch Phosphorpentoxyd getrockneten Luftpumpe nimmt die + Rot. zu, d. h. sie setzt schon bei kleineren Feldstärken ein, so ergab sich später:

Tabelle 3.

Ebonitscheibe.

$p =$	6	0,2	0,014	0,0028	0,0008 mm
$F = 1,5$	—	0	– Rot.	– Rot.	—
$F = 3$	—	+ Rot.	– Rot.	– Rot.	– Rot.
$F = 4$	– Rot.	+ Rot.	0	+ Rot.	– Rot.
$F = 5$	– Rot.	+ Rot.	+ Rot.	—	± Rot. (wechselnd)
$F = 6$	– Rot.	+ Rot.	+ Rot.	—	+ Rot.

Bei den vorstehenden Versuchen mit der Glimmerscheibe hatte die Verbindung mit der Luftpumpe schon mehrere Tage bestanden.

Aus diesen Versuchen lässt sich soviel schliessen, dass bei gewissen Verdünnungsgraden und Feldstärken die auf Leitfähigkeit beruhenden Kräfte der ersten Art (Abschnitt 1) die von der dielektrischen Hysteresis herrührenden der zweiten Art (Abschnitt 2) an Wirkung übertreffen, da nur die ersteren treibende Kräfte zu erzeugen im Stande sind, dass die Wirkung der ersteren mit steigender Feldstärke wächst und mit zunehmender Verdünnung bei derselben Feldstärke ein Maximum besitzt. Die auftretenden Unterschiede der einzelnen Reihen erklären sich durch Veränderungen der Oberflächen bei längerem Evacuiren und Trocknen. Unentschieden bleibt, ob in den Fällen, wo — Rot. beobachtet wurde, die Kräfte erster Art doch noch merkliche Wirkung haben, die nur von denen zweiter Art überdeckt wird, und weiter, wo der Sitz der Kräfte zu suchen ist, ob in der Grenze zwischen Glashülle und verdünnter Luft, oder in der zwischen Luft und rotirender Scheibe.

8. Ueber den zweiten Punkt geben die folgenden *Versuche mit einer Kupferscheibe* im rotirenden Felde Auskunft, da bei diesen die Kräfte an der Oberfläche der Scheibe selbst wegen ihres grossen Leitvermögens verschwinden (vgl. Abschnitt 3). Die Scheibe dient also in diesem Falle nur als Indicator für die Bewegung der umgebenden Luft.

Bei höheren Drucken bis zu 10 mm hinunter ist die Art der auftretenden Bewegungen schwer zu bestimmen; häufig treten zunächst + Bewegungen und Rotationen auf, die aber bei Umkehr der Drehungsrichtung des Feldes nicht ebenfalls umkehren. Die Beobachtung wird dadurch erschwert, dass in schwächeren Feldern die Bewegung geringe Stärke hat, in stärkeren die Scheibe in pendelnde Bewegung geräth, dabei an die Glaswand anstösst und durch diese Stösse dann auch in Rotation versetzt wird. Jedenfalls ist nichts von den regelmässigen — Rotationen zu bemerken, wie sie die Glimmer- und Ebonitscheibe bei den entsprechenden Luftdrucken aufweisen. Diese können daher nur von Kräften herrühren, die durch die Substanz der Scheibe selbst bedingt, an deren Ober-

fläche ihren Sitz haben und entweder durch ihre dielektrische Hysteresis oder ihre Leitfähigkeit, vielleicht auch durch beide bedingt sind.

Erst unterhalb 10 mm Druck werden die Erscheinungen wieder regelmässiger; die Kupferscheibe zeigt Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage, die bei gleichmässiger Rotation des Feldes constant sind, bei Wechsel der Drehungsrichtung nach einiger Zeit gleichfalls umkehren und eine gleichmässige Rotation der umgebenden Luft anzeigen. Diese ist regelmässig bei kleineren Feldstärken positiv, bei grösseren negativ, zunächst bei Drucken bis zu 0,1 mm hinunter sehr schwach und nimmt erst bei weiterer Druckabnahme etwas an Stärke zu. Die Zusammenstellung eines Theiles der Beobachtungen in Tab. 4 wird dies erläutern. Darin bedeuten die Zahlen die Ablenkungen der Kupferscheibe aus der Gleichgewichtslage in Bruchtheilen einer Umdrehung bei langsamer gleichförmiger Rotation des Feldes.

Tabelle 4.

Kupferscheibe.

$p =$	7	3,3	0,8	0,044	0,014	0,0035	0,00080 mm
$F = 0,9$	—	—	—	—	$+ 1/8$	$+ 3/4$	—
$F = 1,3$	$+ 1/4$	0	$+ 1/16$	$+ 1/8$	$+ 1/4$	$- 3/4$	$+ 1/2$
$F = 2,0$	0	0	—	$+ 1/16$	$+ 1/2$	—	+ Rot.
$F = 2,7$	$- 1/16$	$+ 1/16$	$+ 1/16$	$- 1/16$	$+ 1/4$	— Rot.	± wechselnd
$F = 3,8$	$- 1/16$	$+ 1/16$	0	$- 1/8$	$- 3/8$	starkes Pendeln	starkes Pendeln

Aus diesen Versuchen, die freilich auch an Regelmässigkeit noch zu wünschen übrig lassen, kann man schliessen, dass erstens bei kleinen Feldstärken die Leitfähigkeit der verdünnten Luft kleiner ist, als die der Glashülle, da nur so positive Bewegungen eintreten können, dass sie bei steigender Feldstärke aber grösser wird, und dass zweitens die an den schlecht leitenden Scheiben in stark verdünnter Luft bei grösseren Feldstärken beobachteten starken + Rotationen in Kräften ihre Ursache haben, deren Sitz an der Grenze der verdünnten Luft und der Scheiben gelegen ist.

V. Versuche im ruhenden Felde.

9. Bei den Versuchen im ruhenden Felde treten wesentlich verschiedene Erscheinungen bei höheren und bei niederen

Drucken auf. Bewegungen, die hier nur von treibenden Kräften herrühren können, sind in beiden Fällen zu beobachten, aber während bei niederen Drucken im constant bleibenden Felde stationäre Zustände auftreten, d. h. je nach dem Verhältniss von treibender und richtender Kraft entweder constante Ablenkungen der Scheibe aus der Gleichgewichtslage oder auch, wenigstens zeitweise, Rotationen mit nahe constanter Winkelgeschwindigkeit, sind bei höheren Drucken die treibenden Kräfte impulsiver Natur und immer nur bei Aenderungen des Feldes, Entstehen und Verschwinden desselben, merklich. Wird das Feld erregt, so erhält die Scheibe einen impulsiven Anstoss, bewegt sich unter dem Einfluss desselben eine Zeit lang und kommt dann im constant bleibenden Felde wieder zur Ruhe, ohne dauernde Ablenkung aus der Gleichgewichtslage. Diese Stösse können sehr heftig sein, und oft kann durch periodische Wiederholung derselben die Bewegung der Scheibe bis zur Rotation gesteigert werden.

Die ersten Versuche mit Glimmer-, Paraffin- und Ebonitscheiben liessen vermuthen, dass auch hier Uebereinanderlagerung zweier verschiedener Wirkungen, wie im rotirenden Felde, auftritt. Nachfolgende Versuche mit der Kupferscheibe bestätigten das und zeigten, dass bei höheren Drucken nur die an der Glaswand wirkenden Kräfte zur Geltung kommen, und erst bei sehr kleinen Drucken die an der Grenze zwischen verdünnter Luft und (schlecht leitender) Scheibe auftretenden die Erscheinungen wesentlich bedingen.

Ich gebe bei den einzelnen Scheiben Dimensionen, Trägheitsmomente und Richtkräfte an, da dieselben in die nachfolgenden Berechnungen der späteren Kapitel eingehen. Desgleichen gebe ich zu demselben Zwecke für die stationären Bewegungen und Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage die Grösse der letzteren in Bruchtheilen einer Umdrehung, sowie als Maass für die Winkelgeschwindigkeit die mittlere Umlaufszeit in Secunden, wobei zu bemerken ist, dass beide Bestimmungen nur ziemlich roh vorgenommen werden konnten. Sofern die Ablenkung aus der Gleichgewichtslage mehr als eine Umdrehung betrug, ist sie einfach als Rotation (Rot.) bezeichnet.

Diese Rotationserscheinungen, die bei sehr kleinen Drucken (unter 0,1 mm Hg) und hinreichenden Feldstärken an den

schlecht leitenden Scheiben zu beobachten sind, können entweder längere Zeit mit nahe gleichförmiger Geschwindigkeit andauern, bis die zunehmende Torsion des Aufhängefadens sie verlangsamt, oder sie setzen bei grösseren Feldstärken gleich mit erheblicher Beschleunigung ein, wobei die Rotationsgeschwindigkeit bald solche Werthe erhalten kann, dass eine Bestimmung kaum mehr möglich ist. Wegen der Gefahr, dass der Faden abgedreht wird, ist es dann nöthig, durch Aufheben des Feldes die Bewegung bald wieder zu unterbrechen. Bei diesen beschleunigten Rotationen habe ich entweder nur den ungefähren Anfangswerth der Umdrehungszeit für die erste Umdrehung, oder auch noch ihre Zunahme für einige Umdrehungen angegeben.

Die Feldstärke ist auch hier überall in elektrostatischen C.G.S.-Einheiten angegeben und erhalten durch Division des Spannungsunterschiedes der Condensatorplatten in Volt durch 3000 (bei 10 cm Plattenabstand).

Von den zahlreichen Beobachtungen wird hier nur ein Theil wiedergegeben; die anderen lehren nichts wesentlich Neues.

10. *Versuche mit Ebonitscheibe.* Halbmesser $a = 3$ cm, Dicke $2\,b = 0{,}041$ cm, Trägheitsmoment $T = 5{,}85$ g.cm^2, Richtkraft der Aufhängung $\Theta = 0{,}0025$ für die Winkelablenkung 1.

In den folgenden Tabellen bedeuten τ die Umlaufszeit der rotirenden Scheibe in Secunden, bez. bei schwächeren Bewegungen $2\,\pi$ dividirt durch die ungefähre mittlere Winkelgeschwindigkeit der Bewegung, ω_1 die maximale Ablenkung der Scheibe aus der Gleichgewichtslage, also bei Hin- und Herbewegung die halbe Amplitude der Bewegung; eine 0 bedeutet, dass die Bewegung nicht merklich ist; ist $\omega_1 > 2\,\pi$, so ist in den Tabellen kurzweg Rot. (Rotation) angegeben; ist die Rotation eine nahe gleichförmige, so ist sie mit gl. Rot., ist sie beschleunigt mit b. Rot. bezeichnet. F ist die Feldstärke in elektrostatischen C.G.S.-Einheiten, p der Druck in mm Hg, t die Temperatur.

Tab. 5 giebt zunächst Beobachtungen bei höheren Drucken wieder, von Atmosphärendruck bis etwa 5 mm, bei denen eine stärkere und dauernde Bewegung nur durch periodisch abwechselndes Laden und Entladen zu erzielen ist.

Tabelle 5.

Ebonit.

= 760 mm = 15,5°		p = 126 mm t = 19,8°			p = 29 mm t = 19,8°			p = 7,0 mm t = 19,9°		
F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ
,33	0	0,17	0,25	100	0,13	0,5	100	0,17	0,25	200
,50	0,25	0,33	0,5	120	0,37	Rot.	35	0,37	Rot.	40
,73	Rot.	0,57	Rot.	50	0,73	„	25	0,73	„	20
,0	„	1,0	„	30	1,2	„	17	1,0	„	15
,9	„	1,6	„	25	1,9	„	15	1,9	„	12
,5	„	2,2	„	15	2,5	„	12	2,5	„	20
,6	„	3,4	„	7	3,6	„	8	3,7	0,25	60
,7	„	4,5	„	5	4,7	„	5	5,8	0,25	60

Tab. 6 giebt die Beobachtungen bei mittleren Drucken rischen 5 mm und 0,1 mm, bei denen bei constanter Ladung r Condensatorplatten ein stationärer Zustand eintritt, eine nstante, wenn auch schwache Ablenkung der Scheibe aus r Gleichgewichtslage, die beim Entladen wieder zurückgeht it übrigens geringer Geschwindigkeit, anfangs mit wachsenr Feldstärke zunimmt bis zu einem Maximum, bei grösseren ıldstärken aber sehr schwach, fast unmerklich wird.

Tabelle 6.

Ebonit.

p = 1,7 mm t = 19,9°			p = 1,3 mm t = 22,5°			p = 0,50 mm t = 20,5°			p = 0,136 mm t = 20,5°		
'	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ
3	0	—	—	—	—	0,23	0,12	300	0,13	0	—
3	0,12	300	0,40	0,25	200	0,43	0,12	300	0,37	0	—
7	0,25	120	0,70	0,25	150	0,70	0,12	300	0,73	0,12	200
	0,25	120	1,0	0,25	150	1,2	0,25	160	1,0	0,12	180
	0,12	300	1,2	0,12	300	1,9	0,12	200	1,9	0,12	180
			1,9	0,12	300	2,5	< 0,12	> 300	2,5	< 0,12	> 300
	0,12	300	bis			bis			bis		
			7,3	0,12	300	7,0	< 0,12	> 300	7,0	< 0,12	> 300

Endlich bringt Tab. 7 die Beobachtungen bei kleinen ucken unter 0,1 mm, bei denen die mit wachsender Feld-

stärke zunehmende Bewegung der Scheibe im constanten Felde wieder sehr beträchtlich wird und zu gleichmässigen oder beschleunigten Rotationen führt. Hierbei ist indessen zu beachten, dass diese auffallenden Rotationserscheinungen nicht zu bemerken sind bei erstmaligem Evacuiren, wenn die Verbindung erst kurze Zeit bestanden hat, vielmehr erfordert ihr

Tabelle 7.

Ebonit.

$p = 0,031$ mm $t = 15,6°$			$p = 0,013$ mm $t = 18,8°$			$p = 0,011$ mm $t = 16,8°$			$p = 0,0056$ mm $t = 19,5°$		
F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ
0,50	0	—	—	—	—	0,63	0,25	—	0,27	0,25	60
0,67	gl. Rot.	55	1,3	gl. Rot.	40	0,87	0,25	—	0,47	gl. Rot.	30
1,1	„ „	30	1,6	„ „	30	1,2	gl. Rot.	60	0,73	„ „	15
1,6	„ „	45	2,0	„ „	30	1,5	„ „	15	1,0	„ „	12
1,9	„ „	70	2,8	„ „	60	1,9	„ „	30	1,8	„ „	7
2,2	„ „	60	2,6	„ „	50	2,5	b. Rot.	7	1,7	„ „	9
2,5	0	—	3,7	b. Rot.	40	3,6	„ „	3	2,0	b. Rot.	8—5
3,6	0,25	200	4,8	„ „	30	4,7	gl. Rot.	15	2,7	„ „	4—3
5,2	0,25	80	5,7	„ „	25	—	—	—	3,8	gl. Rot.	5
—	—	—	7,3	„ „	20	—	—	—	5,7	„ „	5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	6,7	„ „	5

$p = 0,0033$ mm $t = 16,7°$			$p = 0,0012$ mm $t = 16,7°$			$p = 0,00039$ mm $t = 18,7°$			$p = 0,00012$ mm $t = 21,5°$		
F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ
0,93	0	—	—	—	—	0,67	0	—	0,40	0,12	300
1,2	0	—	1,0	0	—	1,0	0	—	0,67	0,25	100
1,5	0,25	100	1,5	0	—	1,3	0,5	60	1,10	0,25	40
1,9	gl. Rot.	40	1,9	0,25	20	1,6	0,5	20	2,0	gl. Rot.	—
2,2	„ „	35	2,2	0,25	30	1,9	gl. Rot.	20	2,6	„ „	15
2,5	b. Rot.	12	3,1	b. Rot.	2	2,6	„ „	10	3,2	„ „	10
3,1	„ „	10	3,6	„ „	2	3,1	„ „	10	3,7	b. Rot.	8—2
4,2	„ „	2	4,7	„ „	1	3,7	b. Rot.	1	4,7	„ „	3—1
4,7	„ „	1	5,7	„ „	1	5,7	„ „	<1	5,7	„ „	2—½
5,2	„ „	2,5	—	—	—	—	—	—	7,3	„ „	< ½

Auftreten, dass die Scheibe tagelang im mit Phosphorpentoxyd scharf getrockneten Vacuum gehangen hat.

In früheren Reihen habe ich, ohne genauere Bestimmung von τ und ω_1, die Beobachtungen bis zu noch kleineren Drucken (0,000025 mm) fortgeführt; es zeigte sich hier dasselbe Verhalten, wie in den Beobachtungsreihen der Tab. 7; die zur Erzeugung einer merklichen Bewegung, einer gleichmässigen und einer beschleunigten Rotation erforderlichen Feldstärken nehmen bei steigender Verdünnung ab bis zu einem Minimum und wachsen dann langsam, aber stetig, auch bis zum äussersten erreichten Vacuum.

Einen Einfluss der Temperatur zwischen 11 und 22° habe ich nicht mit Sicherheit feststellen können; derselbe ist jedenfalls nicht gross und wird überdeckt von den durch die fortschreitende Entfernung der adsorbirten Oberflächenschichten bedingten kleinen Aenderungen. Es darf dies als Beweis dafür aufgefasst werden, dass der Quecksilberdampf, dessen Dichte in dem angegebenen Temperaturintervall um mehr als das Doppelte steigt und die geringsten erreichten Luftdichten bedeutend übertrifft, an der Erscheinung nicht erheblich betheiligt ist.

11. *Versuche mit Glimmer- und Paraffinscheiben.* Die Glimmerscheibe hat einen Halbmesser $a = 3$ cm, eine Dicke $2b = 0{,}01$ cm, ein Trägheitsmoment $T = 2{,}43$ g cm^2 und eine Aufhängung von der Richtkraft $\Theta = 0{,}003$ pro Winkeleinheit; für die Paraffinscheibe ist $a = 2{,}8$ cm, $2b = 0{,}215$ cm, $T = 18{,}4$ g cm^2, $\Theta = 0{,}034$.

Genauere quantitative Bestimmungen, wie mit der Ebonitscheibe, habe ich mit diesen Scheiben nicht gemacht, da mir grössere Reihen mehr qualitativer Beobachtungen, auf deren Wiedergabe ich verzichte, gezeigt hatten, dass die Erscheinungen sich nicht wesentlich von den an der Ebonitscheibe beobachteten unterschieden. Die geringere Amplitude und Geschwindigkeit der Bewegung bei der Paraffinscheibe liess sich auf die grösseren Werthe von Richtkraft und Trägheitsmoment zurückführen, während ich nicht feststellen konnte, dass die Unterschiede des Leitvermögens bei den drei Scheiben irgend einen erkennbaren Einfluss gehabt hätten, worauf mein Augenmerk besonders gerichtet war.

Die auffallenden Rotationserscheinungen bei grosser Verdünnung treten auch bei diesen Scheiben erst auf, nachdem sie längere Zeit im gut getrockneten Vacuum gehangen haben, dann aber in ganz ähnlicher Weise, wie bei der Ebonitscheibe.

12. *Versuche mit Kupferscheibe* vom Halbmesser $a = 3$ cm, der Dicke $2b = 0{,}01$ cm, dem Trägheitsmoment 9,08 g cm², der Richtkraft der Aufhängung $\Theta = 0{,}0025$. Bei höheren Drucken zeigen die Versuche wesentlich Uebereinstimmung mit den entsprechenden für die schlecht leitenden Scheiben. Die Bewegungen, die sich auch hier bis zur Rotation steigern lassen, haben impulsiven Charakter und treten nur beim abwechselnden Laden und Entladen der Condensatorplatten auf. Auch quantitativ besteht die Uebereinstimmung, die Abweichungen in der Winkelgeschwindigkeit, welche die nachstehende Tab. 8, verglichen mit Tab. 5, für die Ebonitscheibe aufweist, sind auf das verschiedene Trägheitsmoment der Scheiben zurückzuführen. Es steht dieses Verhalten im Gegensatz zu den Versuchen im rotirenden Felde, wo die Kupferscheibe sich anders verhält, als die Ebonitscheibe und beweist, dass bei letzteren Versuchen die dielektrische Hysteresis von wesentlichem Einfluss ist.

Tabelle 8.

Kupfer.

$p = 580$ mm, $t = 19{,}5°$			$p = 240$ mm, $t = 18{,}7°$			$p = 65$ mm, $t = 18{,}7°$			$p = 16$ mm, $t = 19{,}0°$		
F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ
0,63	0,12	180	0,20	0	—	0,20	0	—	0,50	0	—
0,83	Rot.	70	1,3	0,25	60	0,50	0,25	200	0,83	0,12	160
1,1	„	50	2,0	0,75	45	0,83	0,5	120	1,1	0,20	120
2,0	„	45	2,7	Rot.	22	1,1	0,75	80	1,4	0,25	90
2,7	„	25	3,8	„	30	1,3	Rot.	40	2,1	0,25	90
3,8	„	12	4,8	„	25	2,0	„	32	3,8	0,40	80
4,8	„	10	6,9	„	20	2,7	„	30	5,9	0,40	80
5,9	„	14	8,0	„	15	3,8	„	30	8,0	0,40	80
6,9	„	10	10,1	0,75	—	4,8	„	30	—	—	—
8,0	„	15	starkes Pendeln			5,9	„	35	—	—	—

Uebereinstimmung besteht weiter auch zwischen den Versuchen mit der Kupferscheibe und denen mit den schlecht leitenden Scheiben bei den kleineren Drucken, zwischen 5 und 0,1 mm ungefähr, soweit die Genauigkeit der Beobachtungen reicht, die bei den hier nur schwachen Bewegungen nicht sehr gross ist. Sowohl die constanten, einem stationären Zustande im gleich bleibenden Felde entsprechenden Ausschläge, wie auch die Geschwindigkeit, mit der die neue Ruhelage erreicht wird (d. h. die Werthe von τ) sind, wie die Tabellen 6 und 9 zeigen, in beiden Fällen von ungefähr gleicher Grösse. Das zeigt, dass in beiden Fällen die Scheiben nur als Indicator für die Bewegung der umgebenden Luft dienen (vgl. unten Abschnitt 19).

Tabelle 9.

Kupfer.

$p = 4$ mm, $t = 18{,}0^\circ$			$p = 1$ mm, $t = 18{,}0^\circ$			$p = 0{,}25$ mm, $t = 18{,}0^\circ$			$p = 0{,}116$ mm, $t = 21^\circ$		
F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ
0,57	0,25	250	0,40	0,25	180	0,40	0,25	240	0,20	0,08	600
0,83	0,12	300	0,77	0,25	240	0,83	0,25	200	0,42	0,25	250
1,1	<0,12	>300	1,3	0,25	240	1,3	0,37	200	0,80	0,12	500
2,7	0,25	160	2,7	<0,12	>300	2,7	0,50	160	1,20	0,08	700
4,8	0,25	180	4,8	0,25	200	4,8	0,37	200	2,0	0,20	300
6,9	0,37	240	6,9	0,25	240	6,9	<0,1	>500	2,8	0,25	250
9,0	<0,12	>300	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Völlig abweichend sind dagegen bei kleinen Drucken unter 0,1 mm die Versuche mit der Kupferscheibe gegenüber denen mit den isolirenden Scheiben. Die hier auftretenden, so charakteristischen und starken Rotationen im constanten ruhenden Felde sind dort nie zu beobachten, auch nicht nach monatelangem Evacuiren. Die Bewegung der Scheibe bleibt hier immer verhältnissmässig klein und unbestimmt, ihre Amplitude erreicht selten eine Umdrehung, nur tritt in stärkeren Feldern regelmässig ein starkes Pendeln der Scheibe auf, wobei diese häufig an die Glaswand anstösst und dadurch in stärkere Bewegung geräth. Man darf daraus schliessen, dass die Kräfte, welche die Rotation der schlecht leitenden Scheiben bewirken,

in der Oberfläche derselben ihren Sitz haben und davon herrühren, dass die umgebende verdünnte Luft ein grösseres Leitvermögen besitzt, als sie selbst.

Da diese Beobachtungen an der Kupferscheibe ein geringeres Interesse haben, so gebe ich in Tab. 10 nur wenige der zahlreichen Versuchsreihen wieder.

Tabelle 10.

Kupfer.

$p = 0{,}031$ mm, $t = 20{,}5°$			$p = 0{,}0026$ mm, $t = 18{,}0°$			$p = 0{,}00032$ mm, $t = 18{,}0°$		
F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ	F	$\frac{\omega_1}{\pi}$	τ
0,17	0,08	> 500	0,40	0,25	180	0,47	0,25	280
0,33	0,25	240	0,83	0,75	120	0,77	0,25	120
0,50	0,30	160	1,1	0,75	110	1,0	1,0	90
1,0	0,06	> 500	1,3	0,75	80	1,3	1,0	150
1,3	0,18	480	2,7	1,0	20	2,7	1,0	30
2,7	0,11	480	3,8	0,37	30	3,8	1,5	17
—	—	—	4,8	0,75	25	4,8	0,75	starkes
—	—	—	7,0	1,0	30	7,0	0,75	Pendeln

VI. Deutung der Versuche und die Leitfähigkeit der Luft.

13. Ich will nun versuchen, die vorstehenden Beobachtungen an der Hand der eingangs erwähnten Theorie zu behandeln. Ich muss gleich betonen, dass mir eine quantitative Durchführung der Rechnung nur in einigen Fällen gelungen ist und auch hier nur unter nicht unbeträchtlichen Vernachlässigungen.

Ich beginne mit den Versuchen, bei denen die Verhältnisse am einfachsten liegen, nämlich den auf die rotirende Kupferscheibe bei ruhendem Condensator bezüglichen. Vernachlässigt man die Wirkung der an der äusseren Begrenzung des Glasgehäuses auftretenden Ladungen auf die innere Luftmasse, so kommen hier wesentlich nur die an der Grenze zwischen dem Glascylinder und der eingeschlossenen Luft in Betracht, da, wie schon erwähnt, wegen der grossen Leitfähigkeit des Kupfers an diesem merkliche Kräfte nicht auftreten; die Bewegung der Kupferscheibe kann also nur von der Be-

wegung der umgebenden Luft herrühren, die sich durch Reibung auf sie überträgt.

Ich nehme das elektrische Feld zwischen den Condensatorplatten in ihrer ganzen Ausdehnung als homogen an, und behandle den eingeschlossenen Luftcylinder als Rotationsellipsoid mit den Halbaxen a und b; es tritt dann in der von Schweidler'schen Gleichung (1) für das Drehungsmoment $a^2 b$ an Stelle von R^3 und τ an Stelle von $^2/_3\,\tau$, sodass dieselbe wird:

(1a) $$D = a^2\, b\, F^2 \frac{\tau\,(\lambda_a - \lambda_i)}{1 + \tau^2\,(2\,\lambda_a + \lambda_i)^2},$$

worin D das auf den rotirenden Luftcylinder wirkende Drehungsmoment bei der Feldstärke F und der Umlaufszeit τ, λ_a die Leitfähigkeit des Glases, und λ_i diejenige der eingeschlossenen Luft ist. Es ist klar, dass treibende Kräfte, also eine Bewegung des Luftcylinders bei ruhendem Condensator, nur möglich sind, wenn $\lambda_a > \lambda_i$.

14. Es sei zunächst die Möglichkeit der Verstärkung einer kleinen vorhandenen Anfangsbewegung der Luft gegen die Glaswand erörtert und angenommen, dass diese Anfangsbewegungen infolge der Reibung so klein sind, dass $4\,\tau^2\,\lambda_a^2$ gross ist gegen 1; dann erhält man

(1b) $$D = \frac{a^2\, b\, F^2\,(\lambda_a - \lambda_i)}{\tau\,(2\,\lambda_a + \lambda_i)^2},$$

oder, wenn an Stelle von τ die Winkelgeschwindigkeit $d\omega/dt$ eingeführt wird:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d\omega}{dt},$$

$$D = \frac{a^2\, b\, F^2}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_a - \lambda_i}{(2\,\lambda_a + \lambda_i)^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} = D_1\,\frac{d\omega}{dt}.$$

Bezeichnen ferner T das Trägheitsmoment des rotirenden Luftcylinders und $R_1\,(d\omega/dt)$ den Reibungswiderstand, den er erfährt, so erhält man für die Winkelbeschleunigung die Gleichung:

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{D_1 - R_1}{T}\,\frac{d\omega}{dt}.$$

Eine Verstärkung der Bewegung kann also nur eintreten, wenn $D_1 > R_1$.

15. Der Reibungscoefficient R_1 setzt sich aus mehreren Theilen zusammen; zunächst und bei höheren Drucken aus-

schliesslich kommt die Reibung zwischen Luft und Glas an der Mantelfläche des Cylinders in Betracht, und zwar kann es sich hier nur um gleitende Reibung handeln, da die elektrischen Kräfte ja die Luftschichten am Glase gegen dieses zu verschieben suchen; dazu kommt die Reibung an den Grundflächen des Cylinders und, solange nicht ein stationärer Zustand erreicht ist, bei welchem die Kupferscheibe die gleiche Rotationsgeschwindigkeit wie die Luft besitzt, die Reibung an dieser; für letztere beiden Theile ist, abgesehen von grossen Verdünnungen, die innere Reibung der Luft die maassgebende Grösse.

Bezeichnet man mit ε den Coefficienten der gleitenden Reibung, so ergiebt sich der erste Theil der Reibung als das Product der Reibungsfläche und Gleitgeschwindigkeit mit ε zu

$$\varepsilon\, 2\pi a b a \frac{d\omega}{dt} = 2\pi a^2 b \varepsilon \frac{d\omega}{dt}.$$

Die Reibung an der Kupferscheibe kann man unter Vernachlässigung des sehr kleinen am äusseren Umfange, dem Rande, wirkenden Theiles mit ziemlicher Annäherung gleich setzen dem Drehungsmoment, das auf ein Rotationsellipsoid in einer unendlichen Flüssigkeit wirken muss, um es in constanter Rotation zu erhalten. Für dieses hat man nach G. Kirchhoff[1]) die Grösse

$$\frac{16}{3}\pi\eta\frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{1}{\int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)^2\sqrt{b_1^2+\lambda}}} = \frac{32}{3}\eta\frac{d\omega}{dt}a_1^3\left(\frac{a_1^2-b_1^2}{a_1^2}\right)^{3/2},$$

worin η den Reibungscoefficienten der Flüssigkeit, und a_1 und b_1 die beiden Halbaxen des Rotationsellipsoides bedeuten.

Ist, wie im vorliegenden Fall, b_1^2 zu vernachlässigen gegen a_1^2, so erhält man einfach

$$\frac{32}{3}\eta a_1^3\frac{d\omega}{dt}.$$

Für die Reibung an den Grundflächen des Luftcylinders kann man annähernd den gleichen Ausdruck setzen, wenn man

1) G. Kirchhoff, Mechanik p. 379. Leipzig 1876.

darin den Radius a_1 der Scheibe durch den des Luftcylinders a ersetzt, also

$$\frac{32}{3} \eta a^3 \frac{d\omega}{dt}.$$

Die gesammte Reibung wird also

$$\left\{2 \pi a^2 b \varepsilon + \frac{32}{3} \eta (a^3 + a_1^3)\right\} \frac{d\omega}{dt}$$

und der Factor von $d\omega/dt$ ist das oben eingeführte R_1.

16. Es ergiebt sich also als Bedingung für den Eintritt einer Beschleunigung der vorhandenen Bewegung die Ungleichung:

$$\frac{a^2 b F^2}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_a - \lambda_i}{(2\lambda_a + \lambda_i)^2} > 2 a^2 b \left(\pi \varepsilon + \frac{32}{3} \eta \frac{a}{b} \left(1 + \frac{a_1^3}{a^3}\right)\right),$$

oder

$$\frac{\lambda_a - \lambda_i}{(2\lambda_a + \lambda_i)^2} > \frac{4\pi}{F^2} \left(\pi \varepsilon + \frac{32}{3} \eta \frac{a}{b} \left(1 + \frac{a_1^3}{a^3}\right)\right),$$

und für den Fall, dass λ_i gegen λ_a zu vernachlässigen

$$\lambda_a < \frac{F^2}{16\pi} \cdot \frac{1}{\pi \varepsilon + \frac{32}{3} \eta \frac{a}{b} \left(1 + \frac{a_1^3}{a^3}\right)}.$$

Für die numerische Berechnung setze ich:

$$\eta = 1{,}80 . 10^{-4} \text{ [C.G.S] bei } 18^0 \text{[1]},$$

$$\varepsilon = \frac{\eta}{10^{-5}} \cdot \frac{p}{760} \text{ [C.G.S.]},$$

wenn p den Luftdruck[2]) im Innern des Glascylinders in Millimetern Quecksilber bedeutet, den Radius des Glascylinders $a = 3{,}5$ cm, den Radius der Kupferscheibe $a_1 = 3$ cm und die halbe Höhe b des Cylinders, soweit er im elektrischen Felde liegt, gleich dem Radius der Condensatorplatten, also $b = 7$ cm.

Daraus folgt

$$\lambda_a < \frac{F^2}{9{,}05\,(413\,p + 8{,}7)\,10^{-3}} \text{ [C.G.S. el.-stat.]}.$$

---

1) Vgl. O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase, 2. Aufl. p. 190 und p. 221. Breslau 1899.

2) l. c. p. 211.

Nun ergab sich bei $p = 580$ schon eine merkliche Verstärkung der Bewegung für $F = 0,63$ (vgl. Tab. 8), mithin muss

$$\lambda_a < \frac{1}{5460} \quad \text{oder} \quad \lambda_a < 1,8 \cdot 10^{-4}$$

sein. Das ist in Uebereinstimmung mit weiter folgenden Berechnungen, welche die elektrostatisch gemessene Leitfähigkeit des Glascylinders von der Grössenordnung 10^{-4} ergeben (Abschnitt 19).

17. Die in Abschnitt 14 eingeführte Bedingung: $4\tau^2\lambda_a^2$ gross gegen 1, setzt voraus, dass jedenfalls $\tau > 3000$ sec, damit die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{D_1 - R_1}{T}\frac{d\omega}{dt}$$

noch gültig sei.

Das Integral derselben ist

$$\frac{d\omega}{dt} = A_1 \frac{D_1 - R_1}{T} e^{\frac{D_1 - R_1}{T} t},$$

wo A_1 eine Integrationsconstante, die durch die Anfangsgeschwindigkeit bestimmt ist.

Aus den obigen Angaben ergiebt sich

$$D_1 = 3,41\, F^2 \cdot \frac{\lambda_a - \lambda_i}{\left(\lambda_a + \frac{\lambda_i}{2}\right)^2},$$

also für $\lambda_a = 10^{-4}$ und $\lambda_i = 0$: $\qquad D_1 = 3,41 . 10^4\, F^2$,

$$R_1 = 0,031\,(413\,p + 8,7),$$

also für $p = 760$: $\qquad R_1 = 9,7 . 10^3$,

$$T = 0,00332 . p,$$

also für $p = 760$: $\qquad T = 4$.

Es wird also für Werthe von $F > {}^3/_4$ etwa $(D_1 - R_1)/T$ mindestens von der Grössenordnung 10^4, sodass mithin minimale Anfangsbewegungen rapid verstärkt werden, und τ in kleinsten Bruchtheilen einer Secunde von sehr grossen Werthen auf Werthe sinken muss, für die $4\tau^2\lambda_a^2$ nicht gross gegen 1 ist. Die im Vorstehenden behandelten Kräfte werden daher in dieser Weise immer nur sehr kurze Zeit impulsiv wirken.

18. Wir wollen weiter den Fall ins Auge fassen, dass
a durch eine solche impulsive Wirkung τ Werthe erlangt
ıe, für welche $4\tau^2\lambda_a^2$ klein ist gegen 1.

Es wird dann das Drehungsmoment der elektrischen Kräfte

$$) \; D = a^2 b F^2 (\lambda_a - \lambda_i) \,.\, \tau = 2\pi a^2 b F^2 (\lambda_a - \lambda_i) \frac{1}{\frac{d\omega}{dt}} = D_2 \cdot \frac{1}{\frac{d\omega}{dt}}$$

l an Stelle der obigen Differentialgleichung für die Be-
ʒung des Luftcylinders tritt die andere

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{D_2}{T} \frac{1}{\frac{d\omega}{dt}} - \frac{R_1}{T} \frac{d\omega}{dt},$$

ɔn Integral

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = A_2 e^{-\frac{2R_1}{T} t} + \frac{D_2}{R_1}$$

worin wiederum A_2 eine durch den Werth von $d\omega/dt$
$t = 0$ zu bestimmende Integrationsconstante ist. In diesem
. nähert sich also die Bewegung mehr oder weniger schnell
m stationären Endzustand, für den die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{2\pi}{\tau} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_\infty = \sqrt{\frac{D_2}{R_1}}$$

l.

Die Geschwindigkeit, mit der dieser stationäre Endzustand
ɔicht wird, hängt von dem Verhältniss R_1/T ab und ist
Drucken bis zu 0,1 mm hinunter, bei denen die gleitende
bung an der Mantelfläche des Cylinders die übrigen Theile
Reibung beträchtlich überwiegt, nahe unabhängig vom
ftdruck und sehr gross, da bei Vernachlässigung von 8,7
;en $413p$ nach obigem

$$\frac{2R_1}{T} = 7710$$

Ferner ist

$$D_2 = 2\pi a^2 b F^2 (\lambda_a - \lambda_i),$$

ːr

$$D_2 = 5{,}4 \,.\, 10^2 F^2 (\lambda_a - \lambda_i);$$

folgt daraus

$$\frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{D_2}{R_1}} = \frac{132 F \sqrt{\lambda_a - \lambda_i}}{\sqrt{413p + 8{,}7}},$$

ːr

$$\tau = \frac{4{,}77 \,.\, 10^{-2} \sqrt{413p + 8{,}7}}{F \sqrt{\lambda_a - \lambda_i}}.$$

Für $\lambda_a = 10^{-4}$, $\lambda_i = 0$ ergiebt das:

$$\tau = \frac{4,8}{F} \sqrt{413\,p + 8,7}.$$

Mithin für $F = 1$ und

$p =$	580	240	65	16
$\tau =$	2400	1500	800	400 sec

ungefähr, d. h. die zu Stande kommenden stationären Bewegungen sind unter diesen Verhältnissen kaum merklich, sie werden es erst bei kleineren Drucken oder grösseren Feldstärken.

Dagegen wird in den obigen Fällen folgendes eintreten. Bei jedem Erregen des elektrischen Feldes erfahren die an der Glaswand liegenden Luftschichten bei ganz minimalen vorhandenen Bewegungen kräftige impulsive Anstösse, die zwar fast augenblicklich, wie wir sahen, stark gedämpft werden, sich aber doch auf die nächstliegenden inneren Luftdichten übertragen werden. Bei diesen wird die Bewegung nun nicht mehr durch die gleitende Reibung an der Wand, sondern durch die bei höheren Drucken weit kleinere innere Reibung der Luft gedämpft. Indem man nun die Impulsivstösse durch periodisches Erregen und Vernichten des elektrischen Feldes in geeigneten Zwischenräumen wiederholt, wird man allmählich die ganze Luftmasse in beträchtliche Bewegung versetzen können, die sich auch auf die Kupferscheibe überträgt. Das entspricht aber vollständig den bei höheren Drucken mit der Kupferscheibe ebenso, wie mit den übrigen Scheiben gemachten Erfahrungen (vgl. Abschnitt 9—12). Freilich müsste man nach den obigen Entwickelungen bei hinreichend gesteigerter Feldstärke immer auch eine merkliche stationäre Bewegung erhalten können; dass dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist, deutet darauf hin, dass mit wachsender Feldstärke die Leitfähigkeit der Luft bis zu Werthen steigt, die mit der des Glases vergleichbar werden, sodass in dem Nenner des letzten Ausdruckes für τ mit dem Wachsen des einen Factors F eine Abnahme des anderen $\sqrt{\lambda_a - \lambda_i}$ verbunden ist. Wir werden weiterhin diese Vermuthung für kleinere Drucke bestätigt finden.

19. Eine stationäre Rotation der ganzen Luftmasse mit merklicher Geschwindigkeit kommt erst zu Stande, wenn mit

abnehmendem Luftdruck auch die gleitende Reibung soweit gesunken ist, dass der Zähler in dem vorstehenden Ausdruck für τ von mässiger Grösse ist.

Es erfährt dann die Kupferscheibe eine constante Drehung aus der Gleichgewichtslage, die in einem angebbaren Zusammenhang mit der Drehungsgeschwindigkeit der umgebenden Luft, der Reibung und der Richtkraft der Aufhängung steht. Denn es ist, wie oben (p. 550) erwähnt, nach G. Kirchhoff das Drehungsmoment das auf die Scheibe wirken muss um sie in constanter Rotation in der Luft zu erhalten:

$$\frac{32}{2}\eta\, a_1^3\, \frac{d\omega}{dt}.$$

Wird nicht die Scheibe, sondern die Luft bewegt, so bleibt erstere in Ruhe, wenn dieses Drehungsmoment gleich ist der Richtkraft der Aufhängung; also wenn Θ die letztere für den Drehungswinkel 1, so wird:

$$\Theta \,.\, \omega = \frac{32}{3}\eta\, a_1^3\, \frac{d\omega}{dt},$$

oder wenn wieder τ die Umlaufszeit, also $d\omega/dt = 2\pi/\tau$

$$\omega = \frac{64\,\pi\,\eta\, a_1^3}{3\,\tau\,\Theta} = \frac{41{,}5\,\pi}{\tau},$$

da $\eta = 1{,}8 \,.\, 10^{-4}$ und für die Kupferscheibe $\Theta = 2{,}5 \,.\, 10^{-3}$ ist. Diese Gleichung kann dazu dienen, ω aus τ oder umgekehrt zu berechnen; ich habe das erstere vorgezogen, da die Beobachtungen die τ mit etwas grösserer Genauigkeit ergaben als die ω. Vorausgesetzt ist allerdings, dass bei langsamer Bewegung die Scheibe der Rotation der Luft in ungefähr gleichem Tempo folgt, was bei grösserem Trägheitsmoment der Scheibe nicht mehr der Fall sein wird. Die ziemliche Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den aus τ berechneten ω-Werthen (vgl. Tab. 11) spricht für die annähernde Richtigkeit dieser Annahme bei der Kupferscheibe. Dies vorausgesetzt lässt sich dann aus den an der Scheibe beobachteten Werthen von τ die Differenz $\lambda_a - \lambda_i$ nach der oben abgeleiteten Gleichung

$$\lambda_a - \lambda_i = \frac{2{,}27 \,.\, 10^{-3}(413\,p + 8{,}7)}{\tau^2 F^2}$$

berechnen.

Indessen ist diese Formel nur in einem begrenzten Intervall anwendbar, da bei höheren Drucken der Luft eine merk-

liche stationäre Bewegung, wie erwähnt, nicht zu Stande kommt und bei niederen Drucken über die innere und äussere Reibung der Luft, die in jene Formel eintreten, zu wenig sicheres bekannt ist.

Ich habe sie daher nur zwischen $p = 4$ mm und 0,1 mm Hg zur Berechnung verwerthet nnd dieselbe in der folgenden Tab. 11 zusammengestellt.

Tabelle 11.

Kupfer.

F	τ	$\frac{\omega_1}{\pi}$ beob.	$\frac{\omega_1}{\pi}$ ber.	$\lambda_a - \lambda_i$	F	τ	$\frac{\omega_1}{\pi}$ beob.	$\frac{\omega_1}{\pi}$ ber.	$\lambda_a - \lambda_i$
		$p = 4$ mm					$p = 1$ mm		
0,57	250	0,25	0,17	18,6 $.10^{-5}$	0,40	180	0,25	0,28	18,1 $.10^{-5}$
0,83	300	0,12	0,14	6,1 $.10^{-5}$	0,77	240	0,25	0,17	2,7 $.10^{-5}$
1,1	> 300	< 0,12	< 0,14	< 3,4 10^{-5}	1,3	240	0,25	0,17	0,96 $.10^{-5}$
2,7	160	0,25	0,26	2,0 $.10^{-5}$	2,7	> 300	< 0,12	< 0,14	< 0,14 $.10^{-5}$
4,8	180	0,25	0,23	0,50 $.10^{-5}$	4,8	200	0,25	0,21	0,10 $.10^{-5}$
6,9	240	0,37	0,17	0,14 $.10^{-5}$	6,9	240	0,25	0,17	0,03 $.10^{-5}$
9,0	300	< 0,12	< 0,14	< 0,05 $.10^{-5}$					
		$p = 0,25$ mm					$p = 0,116$ mm		
0,40	240	0,25	0,17	2,8 $.10^{-5}$	0,20	600	0,08	0,07	0,94 $.10^{-5}$
0,83	200	0,25	0,21	0,92 $.10^{-5}$	0,42	250	0,25	0,17	1,20 $.10^{-5}$
1,3	200	0,37	0,21	0,38 $.10^{-5}$	0,80	500	0,12	0,08	0,08 $.10^{-5}$
2,7	160	0,50	0,26	0,14 $.10^{-5}$	1,20	700	0,08	0,06	0,02 $.10^{-5}$
4,8	200	0,37	0,21	0,03 $.10^{-5}$	2,0	300	0,20	0,14	0,04 $.10^{-5}$
6,9	> 500	< 0,1	< 0,08	< 0,002 $.10^{-5}$	2,8	250	0,25	0,17	0,03 $.10^{-5}$

Es geht daraus hervor, dass $\lambda_a - \lambda_i$ sowohl mit wachsender Feldstärke bei gleichem Luftdruck, wie mit abnehmender Dichte der Luft bei gleicher Feldstärke abnimmt. Da in letzterem Falle λ_a, die Leitfähigkeit des Glases, constant bleibt, so muss die Leitfähigkeit der Luft mit abnehmendem Druck zwischen 4 und 0,1 mm wachsen. Ob die Leitfähigkeit des Glases von der Feldstärke unabhängig ist, lässt sich nicht mit Sicherheit sagen, vielmehr lässt sich vermuthen, dass sie mit wachsender Feldstärke, wie auch bei anderen schlechten

Leitern, etwas zunimmt[1]), sodass jedenfalls λ_i die Leitfähigkeit der Luft mit wachsender Feldstärke erheblich zunimmt und die Leitfähigkeit des Glases nicht nur erreichen, sondern auch übertreffen wird. Hierfür spricht die Abnahme der treibenden Kräfte mit wachsender Feldstärke und ihr Uebergang in hemmende, wie die Versuche mit rotirendem Condensator lehren. Die grössten berechneten Werthe für $\lambda_a - \lambda_i$ sind etwa $1,8 . 10^{-4}$ in den obigen Versuchsreihen bei $p > 1$ mm, $F < 0,6$ und fallen somit nahe zusammen mit dem oben (p. 552) als obere Grenze für die Leitfähigkeit des Glases gefundenen Werthe ($1,8 . 10^{-4}$). Es scheint also, dass bei diesen Drucken und Feldstärken die Leitfähigkeit λ_i der Luft noch erheblich unter diesem Werthe liegt, aber dann mit wachsender Feldstärke schnell und beträchtlich ansteigt.

20. Bestätigt wird dieses Verhalten durch die Versuche mit rotirendem Condensator und Kupferscheibe (Abschnitt 8, Tab. 4). Bei diesen tritt der Uebergang von treibenden zu hemmenden Kräften auf die innere Luftmasse bei wachsender Feldstärke deutlich hervor. Eine genauere quantitative Berechnung ist in diesem Falle freilich nicht mehr möglich, abgesehen davon, dass die Theorie dadurch verwickelter wird, dass hier die *beiden* aneinander grenzenden Medien eine relative Bewegung zum elektrischen Felde mit verschiedener Geschwindigkeit besitzen, kommt hierdurch auch — im Gegensatz zum vorigen Fall — die dielektrische Hysteresis des Glases zur Wirkung und überdeckt die von der Leitfähigkeit herrührenden Kräfte. Diese Wirkung der Hysteresis ist derart, dass die Leitfähigkeit des Glases eine scheinbare Vergrösserung erfährt, und es entspricht daher der Uebergang von treibenden zu hemmenden Kräften nicht dem Falle $\lambda_i - \lambda_a$, wie es ohne Hysteresis wäre, sondern bereits einem Ueberwiegen der Leitfähigkeit der Luft über die des Glases.

Man hat dann zu erwarten, dass im ruhenden Felde bei den entsprechenden und höheren Spannungen keine Bewegung der eingeschlossenen Luft mehr auftritt. Wenn trotzdem nach Ausweis der Tab. 11 noch solche — übrigens sehr schwache — Bewegungen beobachtet wurden, so liegt das wohl daran, dass

1) Vgl. z. B. W. Leick, Wied. Ann. **66**. p. 1107. 1898.

die Beobachtungen mit abwechselnden Ladungen und Entladungen angestellt wurden, und hierbei auch die niedrigeren Spannungswerthe durchlaufen werden, bei denen, wegen $\lambda_i < \lambda_a$ noch treibende Kräfte auftreten.

Aus der vorstehenden Tab. 11, der weiter folgenden mit der Ebonitscheibe und anderen nicht mitgetheilten schliesse ich, dass die Luft etwa bei den folgenden zusammengehörigen Werthen des Druckes p und der Feldstärke F die Leitfähigkeit des Glases ($2 . 10^{-4}$ el.-stat.) erreicht:

$p = 4$	2	1	0,5	0,25	0,12	mm Hg
$F = 7$	4,5	3	2	1,5	1	C.G.S.-Einh. el.-stat.

21. Ich gehe über zu den *Versuchen mit der Ebonitscheibe*, zunächst denen bei grösseren Drucken bis etwa 5 mm hinunter (Tab. 5). Dieselben zeigen nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ grosse Uebereinstimmung mit den entsprechenden Beobachtungen an der Kupferscheibe. Wir haben dieselben ruckweisen und schnell gedämpften Bewegungen, die nur durch abwechselndes Laden und Entladen zu verstärken sind und die auf starke impulsive Anstösse hinweisen.

Auch erfolgt das Auftreten stärkerer Bewegung und von Rotation unter sonst gleichen Umständen bei annähernd denselben Feldstärken. Unterschiede, die hier auftreten, finden sich auch bei verschiedenen Beobachtungen mit derselben Scheibe und sind auf mehrfache Umstände, z. B. verschieden gute Entfernung absorbirter Schichten von der Glaswand, zurückzuführen.

Alles in Allem lassen die Versuche keinen Zweifel, dass wir es hier bei der Ebonitscheibe mit Kräften der gleichen Art, wie bei der Kupferscheibe, zu thun haben, die ihren Sitz in der Grenze zwischen Glas und Luft haben. Dass bei den höheren Drucken die Kräfte an der Grenze zwischen Luft und Ebonit nicht zur Geltung kommen, liegt an der Grösse der äusseren Reibung, die das Zustandekommen einer merklichen Verschiebung der Lnftschichten gegen die fast ebenso leicht bewegliche Ebonitscheibe verhindert, auch wenn eine solche an der feststehenden Glaswand noch möglich ist.

22. Auch bei Drucken zwischen 5 mm und $^1/_{10}$ mm zeigen die Versuchsreihen mit Ebonit- und Kupferscheibe (Tab. 6

und 9) im Ganzen noch ziemliche Uebereinstimmung, soweit das bei der geringen Genauigkeit in der Bestimmung der hier auftretenden schwachen Bewegungen zu erwarten ist. Die Erscheinung hat in beiden Fällen denselben Charakter, an Stelle der impulsiven Anstösse bei alternirenden Ladungen tritt der stationäre Zustand, der eine Ablenkung der Scheibe aus der Gleichgewichtslage auch bei constanter Ladung des Condensators ergiebt. Man kann daher die Versuchsreihen mit der Ebonitscheibe innerhalb der obigen Druckgrenzen einer gleichen Berechnung unterziehen, wie die mit der Kupferscheibe (Abschnitt 19), die nachstehende Tab. 12 enthält das Ergebniss dieser Berechnung.

Tabelle 12.

Ebonit.

F	τ	$\frac{\omega_1}{\pi}$		$\lambda_a - \lambda_i$	F	τ	$\frac{\omega_1}{\pi}$		$\lambda_a - \lambda_i$
		beob.	ber.				beob.	ber.	
		$p = 1,7$ mm					$p = 1,3$ mm		
0,33	300	0,12	0,14	16,5 .10^{-5}	0,40	200	0,25	0,21	19,4 .10^{-5}
0,67	120	0,25	0,34	25,2 .10^{-5}	0,70	150	0,25	0,28	11,2 .10^{-5}
1,0	120	0,25	0,34	11,2 .10^{-5}	1,0	150	0,25	0,28	5,5 .10^{-5}
1,2	300	0,12	0,14	1,27.10^{-5}	1,2	300	0,12	0.14	0,96.10^{-5}
2,7	300	0,12	0,14	0,25.10^{-5}	1,9	300	0,12	0,14	0,38.10^{-5}
5,8	300	0,12	0,14	0,05.15^{-5}	2,7	300	0,12	0,14	0,19.10^{-5}
					7,3	300	0,12	0,14	0,03.10^{-5}
		$p = 0,50$ mm					$p = 0,136$ mm		
0,23	300	0,12	0,14	10,3 .10^{-5}	0,73	200	0,12	0,21	0,67 .10^{-5}
0,43	300	0,12	0,14	2,9 .10^{-5}	1,0	180	0,12	0,23	0,44 .10^{-5}
0,70	300	0,12	0,14	1,1 .10^{-5}	1,9	180	0,12	0,23	0,12 .10^{-5}
1,2	160	0,25	0,26	1,3 .10^{-5}	2,5	>300	$<0,12$	$<0,14$	$<0,02$ .10^{-5}
1,9	200	0,12	0,21	0,34.10^{-5}	7,0	>300	$<0,12$	$<0,14$	$<0,003$.10^{-5}
2,5	>300	$<0,12$	$<0,14$	$<$ 0,09.10^{-5}					
7,0	>300	$<0,12$	$<0,14$	$<$ 0,01.10^{-5}					

23. Wesentlich andere Erscheinungen, als die Kupferscheibe, weist die Ebonitscheibe erst bei sehr kleinen Drucken der umgebenden Luft unterhalb $^1/_{20}$ mm auf, ein Beweis, dass jetzt bei hinreichender Abnahme der äusseren Reibung die

Kräfte an der Grenze von Luft und Ebonit zur Wirkung kommen, und zwar erst dann, nachdem durch mehrtägiges Evacuiren und Verbindung mit dem scharf getrockneten Raum der Luftpumpe die letzten Spuren adsorbirter Feuchtigkeitsschichten von der Ebonitscheibe entfernt sind.

Es treten dann bei genügender Stärke des ruhenden Feldes treibende Kräfte auf, die zunächst eine schwache Bewegung, dann mit wachsender Feldstärke eine ziemlich gleichmässige Rotation der Scheibe hervorrufen, die bei einem gewissen Werth der Feldstärke in eine stark beschleunigte Rotation übergeht.

Die Theorie giebt von diesen Erscheinungen Rechenschaft, wenn wir annehmen, dass erstens das Leitvermögen der Luft bei diesen Verdünnungsgraden und Feldstärken das der gut getrockneten Ebonitscheibe übertrifft, und dass es zweitens, wie auch bei höheren Drucken (vgl. Abschn. 19), mit wachsender Feldstärke stark ansteigt.

Unter Benutzung der früheren Bezeichnungen (p. 549 ff.) erhalten wir nämlich als Differentialgleichung für die Bewegung der Ebonitscheibe in diesem Falle eine Gleichung von der Form:

$$(4) \qquad \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{D_3}{T}\,\frac{\frac{d\omega}{dt}}{1 + c\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} - \frac{R_2}{T}\,\frac{d\omega}{dt} - \frac{\Theta}{T}\,\omega\,,$$

worin D_3, c und R_2 gewisse Constanten sind, von denen die letztere durch die äussere Reibung der verdünnten Luft an der Ebonitscheibe bestimmt ist. Die vollständige rechnerische Verwerthung dieser Gleichung scheitert, abgesehen von Integrationsschwierigkeiten, an unserer Unkenntniss bezüglich der Gasreibung bei so niederen Drucken. Indessen lässt sie sich doch zu einigen Schlussfolgerungen verwenden.

Zunächst ergiebt sich, dass eine nahezu stationäre Bewegung (gleichmässige Rotation) möglich ist, wenn das dritte Glied der rechten Seite klein ist, also für eine geringe Richtkraft und nicht zu grosse Torsion der Aufhängung. Bei Vernachlässigung dieses Gliedes wird $d^2\omega/dt^2 = 0$ für

$$\frac{d\omega}{dt}\left(\frac{D_3}{T}\,\frac{1}{1 + c\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} - \frac{R_2}{T}\right) = 0\,.$$

Da treibende Kräfte nur auftreten, wenn $d\omega/dt \neq 0$, so folgt daraus

$$(5) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{D_3 - R_2}{c R_2}}.$$

Dieser nahe stationäre Zustand kann beständig sein, er kann aber auch gewissermaassen labil werden, insofern jede kleine Abweichung sich selbstthätig vergrössert.

So lange $c(d\omega/dt)^2$ gross ist gegen 1 entspricht nämlich einer Zunahme von $d\omega/dt$ eine Abnahme von $d^2\omega/dt^2$, da das erste positive Glied in dem Ausdruck für diese Grösse abnimmt, das zweite negative zunimmt; von dem stationären Zustand aus wird also jede Zunahme von $d\omega/dt$ eine negative Beschleunigung und ebenso einer Abnahme von $d\omega/dt$ eine positive Beschleunigung entsprechen.

In der That zeigen die Beobachtungen unter Umständen eine nahezu gleichförmige Winkelgeschwindigkeit, so lange nicht ω beträchtliche Werthe (ein grösseres Vielfaches von π) erreicht hat. Der entsprechende Werth für die Winkelgeschwindigkeit ist von der Leitfähigkeit der Luft abhängig, aber die Beziehung ist keine ganz einfache. Für den stationären Zustand ergiebt sich nämlich nach früheren Entwickelungen:

$$(6) \qquad D_3 = \frac{a_1^2 b_1 F^2}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_a - \lambda_i}{(2\lambda_a + \lambda_i)^2},$$

$$(7) \qquad \frac{1}{c} = 4\pi^2 (2\lambda_a + \lambda_i)^2,$$

worin jetzt λ_a die Leitfähigkeit der Luft, λ_i die der Ebonitscheibe, a_1 und b_1 Halbmesser und halbe Dicke der letzteren. Nur wenn R_2 klein ist gegen D_3, wird das constante $d\omega/dt$ annähernd proportional $\sqrt{\lambda_a - \lambda_i}$; die Beobachtungen lassen aber erkennen, dass das unter den gegebenen Umständen nicht der Fall ist.

Das erste Glied in dem Ausdruck (4) für die Winkelbeschleunigung $d^2\omega/dt^2$ hat nun aber ein Maximum für

$$(8) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{c}} = 2\pi(2\lambda_a + \lambda_i).$$

Ist dieser Werth für den durch Gleichung (5) gegebenen stationären Zustand noch nicht erreicht, so kann nach Gleichung (4) einem wachsenden $d\omega/dt$ eine positive Winkel-

beschleunigung entsprechen, da das erste Glied in dem Ausdruck (4) stärker wachsen kann, als das zweite und dritte zusammen. Dann ist der durch (5) charakterisirte Zustand ein labiler, der bei der kleinsten Vermehrung der Winkelgeschwindigkeit in eine stark beschleunigte Bewegung übergehen muss.

Augenscheinlich entspricht dieser Fall dem in fast sämmtlichen Beobachtungsreihen (Tab. 7) verzeichneten ziemlich plötzlichen Uebergang von einer nahe gleichmässigen in eine stark beschleunigte Rotation bei steigender Feldstärke.

Dieser Umstand giebt wieder ein Mittel, die Grössenordnung für die Leitfähigkeit λ_a der Luft bei den Verdünnungsgraden und Feldstärken, die diesem Uebergang entsprechen, und die nachstehend in Tab. 13 zusammengestellt sind, zu bestimmen.

Tabelle 13.

F Feldstärke C.G.S.-Einh. (el.-stat.), *p* Luftdruck in mm Hg für den Uebergang aus gleichmässiger zu beschleunigter Rotation der Ebonitscheibe.

F	> 5,0	3,3	2,5	2,0	2,5	3,0	3,3	3,7
p	0,03	0,013	0,010	0,005	0,003	0,001	0,0004	0,0001

Es muss nämlich für diese Werthe von F und p nach dem Vorgesagten

$$\frac{d\omega}{dt} < 2\pi(2\lambda_a + \lambda_i)$$

oder

$$\lambda_a > \frac{1}{4\pi}\frac{d\omega}{dt} - \frac{\lambda_i}{2}$$

sein.

Nun ist aber der Werth der Winkelgeschwindigkeit, mit dem die beschleunigte Rotation einsetzt, im Durchschnitt etwa

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2\pi}{10}\sec^{-1}$$

und ferner ist nach Ayrton und Perry[1]) λ_i die Leitfähigkeit des Ebonits in elektrostatischem Maasse etwa von der Grössenordnung 10^{-5}, also hier zu vernachlässigen, mithin

$$\lambda_a > \frac{1}{20},$$

1) W. E. Ayrton u. J. Perry, Proc. Roy. Soc. 27. p. 219. 1878.

während bei kleineren Feldstärken, bei denen die Bewegung noch gleichmässig ist, also

$$c\left(\frac{d\,\omega}{d\,t}\right)^2 > 1\,,$$

λ_a kleiner sein muss, da mehrfach $d\,\omega/d\,t$ mit wachsender Feldstärke gegen die Grenze der gleichmässigen Rotation hin ansteigt oder constant bleibt. Man darf also annehmen, dass auch bei den stärkeren Verdünnungen ebenso, wie bei den mittleren das Leitvermögen der Luft mit zunehmender Feldstärke wächst.

Vergleichen wir das jetzt erhaltene Resultat mit dem früheren bei grösseren Dichten, wo die Leitfähigkeit der Luft von der Grössenordnung 10^{-4} und darüber je nach der Feldstärke gefunden wurde (Abschnitt 19, 20, 22) und überblicken wir die vorstehende Tab. 13, so erkennen wir, dass bei gleichbleibender Feldstärke die Leitfähigkeit der Luft mit steigender Verdünnung wächst bis zu einem Maximum, das für meine Versuchsbedingungen bei etwa $p = 0{,}005$ mm Quecksilber liegt, um dann wieder bis zu dem äussersten erreichten Vacuum abzunehmen.

Vergleichen wir ferner die Grössenordnung 10^{-1} C.G.S. (elektrostatisch) $= 10^{-22}$ C.G.S. (el.-magn.), die beim Druck $p = 0{,}005$ mm Hg bei einer Feldstärke 2 C.G.S. (el.-stat.) oder 600 Volt/cm etwa erreicht wird, mit anderen Leitvermögen, so finden wir, dass die Luft auch bei diesen Verdünnungsgraden und Feldstärken für normale Temperatur noch ein sehr schlechter Leiter ist, etwa von der Leitfähigkeit des Benzols, und selbst wenn wir annehmen, dass das Leitvermögen für die höchsten für uns erreichbaren Feldstärken eine Million mal grösser wäre, würde es noch immer hinter dem eines guten in Luft destillirten Wassers zurückbleiben, und die von Edlund herrührende, von Hrn. Trowbridge neuerdings wieder aufgenommene Hypothese, dass das Vacuum ein guter Leiter sei, scheint mir mit meinen Versuchen unvereinbar.

Ich sehe dabei natürlich ab von dem sehr grossen Einfluss, den Temperatur und Bestrahlung mit ultraviolettem Licht oder Röntgenstrahlen auf das Leitvermögen besitzen. Dass z. B. Funkenstrecken nur einen verhältnissmässig kleinen

Widerstand besitzen, habe ich an anderer Stelle gezeigt[1]); seitdem ist man von verschiedenen Seiten zu demselben Schluss gelangt.[2]) Aber hier kommen neben der bedeutend gesteigerten Temperatur auch viel höhere Feldstärken in Betracht, als bei den vorliegenden Versuchen.

Die Versuche mit Paraffin- nnd Glimmerscheibe lehren nichts neues. Sie stimmen in den wesentlichen Zügen mit den vorstehend besprochenen Versuchen an der Ebonitscheibe überein. Wo in quantitativer Hinsicht Abweichungen auftreten, lassen sie sich auf die Verschiedenheit der Trägheitsmomente und der Aufhängungsrichtkräfte zurückführen.

Nicht unerwähnt lassen will ich, dass ich auch einige Versuche über die Einwirkung der Belichtung mit Röntgenstrahlen auf die besprochenen Erscheinungen angestellt habe; dieselbe war derart, wie sie nach den vorhergehenden Erörterungen bei einer durch die Bestrahlung vermehrten Leitfähigkeit der Luft zu erwarten war. Indessen bedarf die fragliche Erscheinung noch einer eingehenderen Untersuchung, daher ich hier auf eine ausführlichere Besprechung verzichte.

VII. Die Hypothese der elektrolytischen Leitfähigkeit der Luft.

24. Die vorstehend besprochenen Thatsachen und Schlussfolgerungen lassen sich, wie ich glaube, leicht verstehen an der Hand der Hypothese der Ionenleitung der Luft, die wir Hrn. Giese verdanken, und die mehr und mehr an Boden gewonnen hat, wenn wir dazu folgende Annahmen machen:

1. die Leitfähigkeit der Luft ist, wie die der flüssigen Elektrolyte bedingt a) durch die Ionenbeweglichkeit, b) durch die Zahl der Ionen in der Volumeneinheit;

2. der Dissociationsgrad ist abhängig von der elektrischen Feldstärke und wächst in hohem Maasse mit dieser;

3. bei constanter Feldstärke nimmt die elektrolytische Dissociation der Luft mit wachsender Verdünnung zu.

Wir haben danach die Leitfähigkeit der Luft zu setzen

$$\lambda = \frac{2\,n\,.\,\gamma\,.\,v}{\varepsilon},$$

1) A. Heydweiller, Wied. Ann. **43.** p. 340. 1891.

2) W. Biernacki, Journ. de phys. (3) **4.** p. 474. 1895; V. Bjerknes, Bih. Sv. Vet. Ak. Handl. (1) **20.** Nr. 5. 1895; Fortschr. **51.** (2). p. 500. 1895.

wenn n die Zahl der Grammäquivalente in der Volumeneinheit, γ der Dissociationsgrad, ε das elektrochemische Aequivalent und v die Ionengeschwindigkeit für die Feldstärke 1, die hier wohl für Anion und Kation als gleich angenommen werden darf. Bezeichnet wieder p den Druck in mm Hg, so ist

$$n = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{28,9} \cdot \frac{p}{760} \text{ pro cm}^3,$$

oder

$$n = 5,46 \cdot 10^{-8} p \text{ pro cm}^3.$$

Wendet man ferner mit Hrn. Arrhenius[1]) eine von Hrn. Nernst[2]) aufgestellte Beziehung zwischen den Diffusionsgeschwindigkeiten von Elektrolyten in wässeriger Lösung und den Ionenbeweglichkeiten auf den gasförmigen Aggregatzustand an und nimmt mithin an, dass die Ionengeschwindigkeiten in Lösungen und in Gasen sich wie die Diffusionsgeschwindigkeiten verhalten, so findet man, dass die Ionengeschwindigkeiten in normaler Luft rund etwa 10^4 mal so gross sind, als in wässeriger Lösung; setzt man die Geschwindigkeit der „Luftionen" in wässeriger Lösung etwa gleich der der OH-Ionen, also in runder Zahl:

$$v = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \text{ pro } \frac{\text{Volt}}{\text{cm}},$$

oder

$$v = 2 \cdot 10^{-11} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \text{ pro C.G.S.-Einh. (el.-magn.) der Feldstärke,}$$

so wird für normale Luft zu setzen sein:

$$v = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \text{ pro C.G.S.-Einh. (el.-magn.) der Feldstärke.}$$

Da nach obigem die Ionengeschwindigkeiten, wie die Diffusionsgeschwindigkeiten der Gase der Dichte umgekehrt proportional anzunehmen sind, so hat man für den Druck p Millimeter Hg innerhalb der Gültigkeitsgrenzen des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes bei normaler Temperatur:

$$v = \frac{2 \cdot 760 \cdot 10^{-7}}{p} = \frac{1,5}{p} \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \text{ pro C.G.S.-Einh. (el.-magn.)}$$

der Feldstärke.

---

1) S. Arrhenius, Wied. Ann. **42.** p. 55. 1891.

2) W. Nernst, Zeitschr. f. phys. Chem. **2.** p. 613. 1888; Theoret. Chem. 2. Aufl. p. 357. 1898.

Da ferner das elektrochemische Aequivalent

$$\varepsilon = 1{,}036 \,.\, 10^{-4}\ \text{C.G.S.-Einh. (el.-magn.)},$$

so folgt die Leitfähigkeit der Luft

$$\lambda = 1{,}6 \,.\, 10^{-7}\,\gamma\ \text{C.G.S.-Einh. (el.-magn.)},$$

oder

$$\lambda = 1{,}4 \,.\, 10^{14}\,\gamma\ \text{C.G.S.-Einh. (el.-stat.)}.$$

Für Leitvermögen, die, wie die oben für verdünnte Luft gefundenen, kleiner sind, als 1 el.-stat. C.G.S.-Einheit, wäre also der Dissociationsgrad $< 10^{-14}$, also äusserst gering und würde selbst bei 10 000 facher Steigerung mit wachsender Feldstärke noch nicht den für reines Wasser, der bei 18° $1{,}4 \,.\, 10^{-9}$ beträgt [1]), erreichen. Bei so kleinen Werthen der Dissociation würde diese für binäre Verbindungen nach dem Massenwirkungsgesetz umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Concentration oder für Gase, soweit das Boyle'sche Gesetz gilt, umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Druck sein, und dasselbe würde mithin auch für die Leitfähigkeit gelten.

25. Indessen ist hierbei noch zweierlei zu beachten. Einmal scheint es fraglich, ob hier, wo die elektrische Feldstärke ein wesentlich mitbestimmender Factor für die Dissociation ist, das Massenwirkungsgesetz ohne weiteres anwendbar ist, und aus meinen Beobachtungen scheint mir eher bei grösseren Drucken eine stärkere Zunahme des Leitvermögens mit abnehmender Dichte zu ergeben, als aus vorstehendem folgen würde. Sodann kann diese Zunahme des Leitvermögens nur bis zu einer gewissen Grenze gehen, da sie voraussetzt, dass die Ionenbeweglichkeit dem Drucke umgekehrt proportional sei. Das ist aber offenbar nicht mehr der Fall, sobald erstens die Beweglichkeit der Lufttheilchen in erheblichem Maasse beeinflusst wird durch fremde Beimengungen, insbesondere den Quecksilberdampf, dessen Druck mit dem Mac Leod-Manometer nicht mitgemessen wird und nach Hertz bei 18° etwa 10^{-3} mm Hg beträgt und sobald zweitens die mittlere freie Weglänge der Lufttheilchen von derselben Grössenordnung wird, wie die zur Verfügung stehenden Wegstrecken.

1) F. Kohlrausch u. A. Heydweiller, Wied. Ann. 53. p. 209. 1894.

Nun beträgt der Abstand zwischen Scheibenrand und rlashülle bei meinen Versuchen $^1/_2$ cm, der Durchmesser der etzteren 7 cm und die Druckwerthe, bei denen die mittlere reie Weglänge der Molecüle diese Beträge erreicht, sind etwa ,015 bez. 0,001 mm Hg. Zwischen diesen beiden Werthen, ämlich bei 0,005 mm Hg, liegt nun nach Ausweis der Taelle 13 das Maximum des Leitvermögens mit abnehmendem)ruck. Nehmen wir an, dass von diesem Werthe abwärts die leweglichkeit der Ionen unabhängig vom Druck ist, so würde ei Gültigkeit des Massenwirkungsgesetzes nach der vortehenden Darstellung für weiter abnehmende Drucke die ,eitfähigkeit der Quadratwurzel aus der Dichte direct proortional sein, vielleicht aber auch weniger stark mit abnehnendem Drucke wachsen. Eine Zunahme des Leitvermögens ei den kleinsten abnehmenden Drucken ergeben nun die Bebachtungen in der That. Zu einer genaueren quantitativen 'eststellung der Beziehung fehlt es noch an der Kenntniss der bhängigkeit der Dissociation von der Feldstärke.

Nach obigem muss der Druck, für den das Leitvermögen in Maximum wird, von den Dimensionen des Gefässes abängen, das die verdünnte Luft enthält. Bekanntlich ergeben a auch Entladungsversuche in Vacuumröhren ein Minimum er Entladungsspannung mit abnehmendem Druck, dessen Lage on den Dimensionen der Entladungsröhre abhängt.[1]

VII. Aeltere Versuche.

26. Aehnliche Beobachtungen, wie sie vorstehend für die chlecht leitenden Platten in verdünnter Luft beschrieben wurden, at Hr. Quincke in Flüssigkeiten von geringem Leitvermögen emacht.[2] Er sucht die Ursache auf das Vorhandensein einer ünnen Luftschicht zwischen rotirendem festem Körper und 'lüssigkeit zurückzuführen und stützt diese Anschauung hauptächlich durch Versuche folgender Art. „Kugeln aus Crownlas, Flintglas, Quarz und Kalkspath, welche nach elektrischer lotation in Rapsöl, Abwaschen und *längerer Berührung* mit chwefelkohlenstoff die Fähigkeit verloren haben, unter dem

1) Vgl. G. Wiedemann, Elektricität 4. (2). p. 471. 1885.
2) G. Quincke, Wied. Ann. 59. p. 417. 1896

Einfluss elektrischer Kräfte zu rotiren, drehen sich wieder, nachdem sie genügend lange Zeit in Luft unter einer Glasglocke gehangen haben." Diese Versuche erklären sich nach meiner Auffassung aus den Thatsachen, dass es ausserordentlich schwierig ist, Oelschichten von der Oberfläche fester Körper durch Abwaschen *vollständig* zu entfernen, und dass ein Gemisch zweier verschiedener Flüssigkeiten (Rapsöl und Schwefelkohlenstoff) ein bedeutend höheres Leitvermögen besitzt, als jede der Flüssigkeiten für sich. Wird also die zuerst in Rapsöl befindliche Kugel in Schwefelkohlenstoff eingeführt, so bilden sich durch Auflösen der kleinen Oelreste Grenzschichten von weit höherer Leitfähigkeit, als die des reinen Schwefelkohlenstoffs, die das Auftreten merklicher elektrischer Kräfte verhindern ($\lambda \tau$ sehr gross); wird die Kugel herausgenommen, in Luft getrocknet und wieder in Schwefelkohlenstoff eingeführt, so bilden sich diese Grenzschichten infolge der verminderten Oelschicht nur langsam und in geringerem Maasse wieder; eine anfängliche nur allmählich abnehmende Rotation, wie sie Hr. Quincke beobachtete, ist die Folge. Zur Controle meiner Auffassung habe ich folgenden Versuch angestellt. Zwischen zwei kreisförmige Platinplatten von 2 cm Durchmesser in 0,05 cm Abstand wurde Ricinusöl gebracht und dieselben mit einem empfindlichen Galvanometer in den Stromkreis eines Daniell eingeschaltet. Der Ausschlag betrug 0,1—0,2 Scalentheile. Das Ricinusöl wurde entfernt, die Platten so gut wie möglich abgewischt und Schwefelkohlenstoff eingeführt; der Ausschlag stieg bis zu 500 *p*, um nach mehrmaligem Auswaschen mit CS_2 wieder auf 50 *p* zu sinken. Es folgt daraus, dass die dünnen Schichten an den Platinblechen, wo sich die Mischung von Oel und Schwefelkohlenstoff bildet, ein Leitvermögen von einer vielfach höheren Grössenordnung besitzen müssen, wie die reinen Flüssigkeiten.

Hr. Quincke scheint aber selbst nicht mehr an seiner Auffassung festzuhalten, da er auf die von Hrn. Boltzmann und von mir aufgeworfene Frage nach der Energiequelle für die von ihm beobachteten Bewegungen mit dem Hinweis auf die elektrische Strömung in der Flüssigkeit antwortet[1],

1) G. Quincke, Wied. Ann. 62. p. 12. 1897.

die bei seiner Deutung der Versuche gar keine Rolle spielt, während sie die wesentliche Grundlage der meinigen bildet.

27. Interessante Rotationserscheinungen im rotirenden elektrischen Felde in Luft haben ferner die Herren Arnò und Threlfall[1]) beobachtet. Beide suchen die Ursache dieser Erscheinungen lediglich in dielektrischer Hysteresis; mir scheint aber, dass bei demselben auch die Leitfähigkeit eine wesentliche Rolle spielt, und es sich um eine Uebereinanderlagerung beider Wirkungen handelt und zwar aus folgenden Gründen.

Die beiden Herren finden, dass die dielektrische Hysteresis nicht, wie zu erwarten ist, dem Quadrat der Feldstärke proportional ist, sondern dass die Beziehung zwischen beiden Grössen eine viel verwickeltere ist. Dieser Befund ist im Widerspruch mit Versuchen der Herren Steinmetz[2]) und Schaufelberger[1]), von denen der erstere mit alternirenden Ladungen eines ruhenden Condensators, der letztere mit schwingenden Rotationsellipsoiden im ruhenden Felde arbeitete. Letzterer findet übrigens auch nur bei Paraffin Proportionalität zwischen dielektrischer Hysteresis und Quadrat der Feldstärke, nicht aber bei Hartgummi, was ebenfalls auf die grössere Leitfähigkeit des letzteren zurückzuführen ist.

Rührt nämlich ein Theil der beobachteten Wirkung von der Leitfähigkeit her, so muss eine Abweichung von der einfachen Gesetzmässigkeit deswegen stattfinden, weil die Leitfähigkeit der schlechten Leiter selbst eine Function der Feldstärke ist.

Der Einfluss der Leitfähigkeit verschwindet, wenn das Product $\lambda \tau$ entweder sehr klein oder sehr gross ist; das erstere würde bei Hrn. Schaufelberger's Versuchen an Paraffin, das letztere bei Hrn. Steinmetz' Versuchen ($\tau = \infty$) zutreffen und ferner auch bei gewissen Versuchen von Hrn. Threlfall, bei denen die Leitfähigkeit des Dielektricums durch Zusatz leitender Substanz (Graphitpulver) vermehrt wurde (λ sehr gross), wobei sich eine zunehmende Annäherung an die erwähnte einfache Gesetzmässigkeit ergab.

---

1) Vgl. die Citate auf p. 532.

2) C. P. Steinmetz, Elektrotechn. Zeitschr. **13.** p. 227. 1892.

Zu betonen ist, dass bei vielen der obigen Versuche, insbesondere bei denen von Arnò nicht die Leitung der isolirenden Substanz, sondern die absorbirten Oberflächenschichten (Feuchtigkeit) die maassgebende Grösse ist, wie aus den Versuchen von Hrn. Schaufelberger und vielen meiner Beobachtungen (vgl. p. 538 und 544—545) hervorgeht.

Hr. Arnò hat auch Rotation der Luft in einem Vacuumgefäss im rotirenden Felde beobachtet, aber nur hemmende Kräfte gefunden, die er ebenfalls nur auf dielektrische Hysteresis zurückführt. Aus den obigen Darlegungen und meinen Versuchen ergiebt sich, dass auch hier der Leitfähigkeit eine wesentliche Rolle zufällt.

28. Weiter hat Hr. Borel[1]) hierher gehörige Beobachtungen gemacht. Scheiben aus Glimmer etc. rotirten im alternirenden elektrischen Feld, wenn ihnen zur Seite ein isolirender Stab (Glas) aufgestellt war. Auch diese Erscheinung kann nicht auf dielektrischer Hysteresis beruhen, da, wie schon bemerkt, durch Hysteresis freie Energie nicht erzeugt, sondern nur vernichtet werden kann. Sie muss vielmehr, wie auch Hr. Borel annimmt, auf Leitfähigkeit zurückgeführt werden und dürfte von derselben Art und ebenso zu erklären sein, wie meine in den Abschnitten 18 und 21 besprochenen Beobachtungen.

Zum Schluss möchte ich noch Beobachtungen von Hrn. O. Lehmann[2]) anführen, der kreiselnde Bewegungen von schlecht leitenden Theilchen, die in eben solchen Flüssigkeiten suspendirt sind, im elektrischen Felde beschreibt. Ich vermuthe, dass auch diese auf Kräfte von der in der vorliegenden Abhandlung besprochenen Art zurückzuführen sind.

Die Beobachtung treibender Kräfte im rotirenden Felde an einem Radiometer von Hrn. O. E. Meyer[3]) habe ich schon in meiner früheren Mittheilung[4]) erwähnt, wo auch einige anschliessende Versuche angeführt sind.

---

1) Ch. Borel, Compt. rend. **116.** p. 1192. 1893; Arch. de Genève (3) **29.** p. 317. 1893.

2) O. Lehmann, Zeitschr. f. phys. Chem. **14.** p. 305. 1894.

3) O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase p. 156. Anm. 3. Breslau 1877.

4) A. Heydweiller, Verhandl. d. Physikal. Gesellsch. zu Berlin **16.** p. 32. 1897.

VIII. Anwendung auf kosmische Erscheinungen.

29. Man kann die Frage aufwerfen, ob die in den vorstehenden Abschnitten besprochenen Kräfte nicht auch auf die Bewegung der Himmelskörper einen Einfluss haben. Zweifellos hat man der Erde, wahrscheinlich der Sonne und wohl auch anderen Himmelskörpern beträchtliche elektrische Ladungen zuzuschreiben und die Bewegungen der Planeten und Trabanten finden mithin im elektrischen Felde statt.

Wir wollen hier nur die Frage erörtern, ob die Umdrehungszeiten der Erde und des Mondes um ihre Axe durch Kräfte der besagten Art merklich beeinflusst werden können. Wir dürfen bei den geringen hier in Frage kommenden Feldstärken die Annahme machen, dass die Leitfähigkeit λ_a in der Umgebung der Weltkörper gegen die ihrer Oberflächenschichten λ_i zu vernachlässigen sei, die auftretenden Kräfte also hemmende sind, und ferner wollen wir voraussetzen, dass $(^2/_3\, \lambda_i\, \tau)^2$ gross sei gegen 1, was mit der Wirklichkeit übereinstimmen dürfte. Es ergiebt sich dann folgende Differentialgleichung für die Winkelgeschwindigkeit der Axendrehung der beiden Weltkörper, $d\omega/dt$:

$$T \frac{d^2 \omega}{d t^2} = D_3 \frac{d \omega}{d t},$$

wenn die Beschleunigung so klein ist, dass die Bewegung vom stationären Zustand nicht weit entfernt ist, was auch den thatsächlichen Verhältnissen entspricht; hierin ist T das Trägheitsmoment des Weltkörpers in Bezug auf seine Axe, also wenn r sein Halbmesser und d seine Dichte:

$$T = \frac{8}{15} \pi r^5 d,$$

sowie

$$D_3 = -\frac{3 r^3 F^2}{4 \lambda_i \pi}.$$

Die Feldstärke F möge herrühren von der Ladung des Centralkörpers vom Radius R, dem Potential V im Abstande a, sodass

$$F = \frac{V R}{4 \pi a^2}.$$

Es ist dann

$$\frac{D_2}{T} = -\frac{45}{32} \cdot \frac{F^2}{\pi^2 r^2 \lambda_i d} = -\frac{45}{128} \cdot \frac{V^2 R^2}{\pi^3 r^2 a^2 \lambda_i d},$$

und das Integral der obigen Differentialgleichung giebt

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0 e^{\frac{D_2}{T} t}.$$

Nimmt man als Leitfähigkeit der Erdoberfläche diejenige einer 3 proc. Kochsalzlösung, des Meerwassers, so ergiebt die Einsetzung der bekannten Grössen, dass auch bei unwahrscheinlich hohen Annahmen über die Grösse des Sonnenpotentiales eine merkliche Verkürzung des Tages auch in Millionen, ja Billionen von Jahren durch diese Kräfte nicht bedingt wird.

Anders verhält es sich mit dem Monde, dessen Oberfläche bei völliger Trockenheit jedenfalls ein weit geringeres Leitvermögen besitzt, das wir in elektrostatischem Maasse wohl zwischen 10^{-2} und 10^{-5} annehmen dürfen; ich setze $\lambda_i = 10^{-4}$. Das elektrische Potential der Erde, auf das es hier ankommt, ist von Hrn. F. Exner zu $3 . 10^7$ elektrostatischen Einheiten berechnet worden[1]; die Grundlage dieser Rechnung, das Potentialgefälle über der Erdoberfläche ist nach den neueren Messungen im Luftballon wohl nicht ganz zuverlässig, auch dürfte in früheren Zeiten das Potential erheblich höher gewesen sein, als heute, da eine allmähliche Zerstreuung der elektrischen Energie wohl sicher anzunehmen ist. Das höchste Potential, das die Erde gegenwärtig haben könnte, ohne dass disruptive Entladung durch die Atmosphäre einträte, ist nach Berechnungen, die ich früher anstellte[2], etwa $200\, R = 1{,}26 . 10^{11}$ elektrostatische Einheiten.

Nehmen wir an, dass das Erdpotential einmal diesem Werthe nahe gekommen sei, etwa 10^{10} betragen habe, so ergiebt sich, dass in einigen 100 Billionen Jahren eine mässige Rotationsgeschwindigkeit des Mondes um seine Axe, oder auch eine starke nach der Erstarrung noch vorhandene Libration relativ zu den Kraftlinien des erdelektrischen Feldes auf nicht mehr

1) F. Exner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (2) **96.** p. 418. 1887.

2) A. Heydweiller, Wied. Ann. **40.** p. 464. 1890.

nachweisbare Werthe herabgesunken sein muss. Es scheint also nicht unmöglich, dass die fast unveränderliche Lage des Mondes gegen seinen Radiusvector zum Erdmittelpunkt zum Theil in diesen Kräften ihre Ursache hat.

Bei diesen Berechnungen ist sowohl die Abweichung der Mondgestalt von der Kugel, wie auch die nach den Herren Ekholm und Arrhenius[1]) sehr bedeutende Eigenladung des Mondes und deren Einfluss auf die Stärke des erdelektrischen Feldes ausser Ansatz geblieben. Die Berücksichtigung beider Umstände würde vielleicht noch eine erhebliche Vergrösserung der berechneten Kraft ergeben. Indessen ist die genaue Berechnung schwierig und die Grundlagen sind zu unsicher. Ausserdem können sehr wohl auch die dielektrischen Eigenschaften des Mondes eine weitere Verstärkung der hemmenden Kraft bedingen.

IX. Zusammenfassung.

Zum Schlusse seien die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit noch einmal, wie folgt, zusammengestellt.

Es sind die aus der erweiterten Hertz'schen Theorie (Abschnitt 1) folgenden Kräfte untersucht worden, welche an der Grenze schlecht leitender, im elektrischen Felde bewegter Körper in einer Umgebung von verschiedenem, ebenfalls geringem Leitvermögen entstehen, Kräfte, die auf die Bewegung entweder hemmend oder beschleunigend einwirken.

Es wurde eine Reihe von Beobachtungen beschrieben, die sich auf diese Kräfte zurückführen lassen und zwar:

1. Im Innern eines Glasgefässes erfährt Luft von 760 bis zu einigen Millimetern Quecksilberdruck beim Erregen eines elektrischen Feldes eine beträchtliche impulsive Verstärkung minimaler vorhandener Bewegungen, die durch periodisches Herstellen und Vernichten des Feldes bedeutend gesteigert werden kann, sodass eine in der Luft aufgehängte Scheibe aus gut oder schlecht leitendem Material (Kupfer, Ebonit) je nach der Feldstärke in lebhafte Schwingungen oder in Rotation versetzt wird (Abschnitt 10—12, Tab. 5 u. 8).

---

1) N. Ekholm u. S. Arrhenius, Svenska Vet. Akad. Handl. **19**. (1) Nr. 8. 1894.

2. Bei geringerer Dichte der Luft (zwischen 5 und 0,1 mm Quecksilberdruck) wird die Luft auch im constanten ruhenden Felde in Verstärkung kleiner Bewegungen in dauernde Rotation versetzt und hierdurch den darin aufgehängten Scheiben eine constante, von der Richtkraft der Aufhängung abhängige Ablenkung aus der Gleichgewichtslage bei ruhender Luft ertheilt (Abschnitt 10—12, Tab. 6 u. 9).

3. In stärker verdünnter Luft (unter 0,1 mm Quecksilberdruck) erfahren gut getrocknete und von den adsorbirten Gasschichten befreite Scheiben aus schlecht leitendem Material (Ebonit, Glimmer, Paraffin) bei kleinen Bewegungen im constanten ruhenden Felde ein Drehungsmoment, das je nach der Feldstärke zu einem Schwingen um die Gleichgewichtslage, zu einer nahezu gleichförmigen oder zu einer stark beschleunigten Rotation führt (Abschnitt 10 u. 11, Tab. 7).

4. Im rotirenden elektrischen Felde findet eine Uebereinanderlagerung verschiedener Kräfte statt, von denen die einen, die vorerwähnten, auf den leitenden, die anderen auf den dielektrischen Eigenschaften der Medien beruhen; während die ersteren hemmende oder beschleunigende sein können, sind die letzteren stets hemmende (Abschnitt 2, 6—8 u. 27).

Die Theorie gestattet aus den vorliegenden Beobachtungen einige Schlüsse bezüglich des Leitvermögens des Glases und der Luft bei Zimmertemperatur zu ziehen. Es sind die folgenden:

1. Das Leitvermögen des benutzten Glases ist etwa von der Grössenordnung:

$$2 \, . \, 10^{-4} \text{ C.G.S.-Einh. elektrostatisch}$$

oder

$$2 \, . \, 10^{-26} \text{ C.G.S-Einh. elektromagnetisch}$$

(Abschnitt 16, 19 u. 22).

2. Die Leitfähigkeit der Luft ist in hohem Grade abhängig von der Feldstärke einerseits und ihrer Dichte andererseits, und zwar wächst sie mit zunehmender Feldstärke und mit abnehmender Dichte, mit letzterer aber nur bis zu einem Maximum, von dem aus sie wieder abnimmt. Dieses Maximum liegt unter den vorliegenden Versuchsbedingungen etwa bei 0,005 mm Quecksilberdruck, ist aber wahrscheinlich abhängig von den Dimensionen des Vacuumgefässes (Abschnitt 23 u. 25).

3. Bei höheren Drucken (über 5 mm Hg) und nicht zu ossen Feldstärken (etwa bis 5 C.G.S.-Einh. elektrostatisch) , die Leitfähigkeit der Luft kleiner als die oben angegebene s Glases (Abschnitt 10, 12 u. 18).

4. Bei kleineren Drucken (zwischen 5 und 0,1 mm Hg) er- icht die Leitfähigkeit der Luft die des Glases schon bei eineren Feldstärken (unter 5 C.G.S.-Einh.) und zwar bei um geringeren, je niedriger der Druck ist (Abschnitt 19, u. 20, ıb. 11 u. 12).

5. Bei noch weiterer Verdünnung der Luft erreicht ihr ›itvermögen bei mässigen Feldstärken (unter 5 C.G.S.-Einh.) e Grössenordnung

10^{-1} C.G.S.-Einh. elektrostatisch

er

10^{-23} C.G.S.-Einh. elektromagnetisch

bschnitt 23, Tab. 13).

Die vorstehenden Beobachtungen und Schlussfolgerungen ıd in guter Uebereinstimmung mit der Hypothese von der ektrolytischen Leitfähigkeit der Luft; der elektrolytische ssociationsgrad der letzteren ist unter den Versuchsbedin- ıngen äusserst gering anzunehmen (Abschnitt 24 u. 25).

Auch eine Anzahl früher von anderen Forschern beob- hteter Erscheinungen dürfte auf die hier behandelten Kräfte ırückzuführen sein (Abschnitt 26—28).

Es ist möglich, dass durch dieselben die Bewegungen ancher Himmelskörper, insbesondere des Mondes, beeinflusst ›rden sind (Abschnitt 29).

Breslau, August 1899.

(Eingegangen 17. August 1899.)

---

2. *Ueber die Reststrahlen des Flussspathes;*
von H. Rubens.

Nach Versuchen, welche ich im Jahre 1897 in Gemeinschaft mit Hrn. E. Nichols angestellt habe[1]), besitzt der Flussspath im Ultrarothen ein Gebiet metallischer Reflexion, welches leicht dadurch nachgewiesen werden kann, dass man die Strahlung einer beliebigen Wärmequelle mehrfach an Flussspathflächen reflectiren lässt. Die dann noch vorhandenen Strahlen (Reststrahlen) gehören nahezu ausschliesslich demjenigen Spectralgebiet an, in welchem die metallische Reflexion stattfindet. Ihre Wellenlänge ist daher nur wenig abhängig von der Temperatur und Beschaffenheit der benutzten Wärmequelle. Bei zwei verschiedenen Versuchsreihen, von denen die eine bei Anwendung eines mit Flussspathpulver überzogenen glühenden Platinbleches, dreier Flussspathflächen und eines Bolometers, die andere mit Benutzung von einem Zirkonbrenner, vier Flussspathflächen und einem Radiometer angestellt war, ergab sich die Wellenlänge des Energiemaximums im Gitterspectrum der Reststrahlen bei 24,4 μ bez. bei 23,7 μ. Dabei erwies sich die Form der Energiecurve in beiden Fällen als unsymmetrisch und zwar derart, dass der Anstieg zum Maximum von Seiten der kürzeren Wellen ein wesentlich steilerer war als von Seiten der längeren. Auch zeigte sich in beiden Fällen auf diesem letzteren Theile der Curve eine schwache Ausbuchtung, welche schon damals zu der Vermuthung Anlass gab, dass das beobachtete Energiemaximum möglicherweise aus zwei getrennten Erhebungen bestehen könne.[2]) Die damals benutzte Spectralanordnung in Verbindung mit den zur Strahlungsmessung dienenden Apparaten schien jedoch nicht ausreichend, um die vorstehende Frage zu entscheiden.

Nachdem nun im Laufe der Zeit sowohl die Spectralanordnung wesentlich verbessert als auch die Empfindlichkeit

---

1) H. Rubens u. E. F. Nichols, Wied. Ann. **60.** p. 418. 1897.
2) Vgl. l. c. p. 439.

und Genauigkeit der Strahlungsmessung durch Anwendung der Thermosäule[1]) an Stelle des Bolometers bez. Radiometers beträchtlich erhöht worden ist, habe ich von neuem die Reststrahlen des Flussspath einer eingehenden Untersuchung unterzogen.

Die Versuchsanordnung entsprach vollkommen derjenigen, welche früher zur Beobachtung der Reststrahlen von Steinsalz und Sylvin gedient hatte[2]) und welche in Fig. 1 nochmals schematisch angedeutet ist. Die Abmessungen der einzelnen Theile des Spiegelspectrometers s_1, e_1, e_2, s_2 waren mit Rücksicht auf die Erzeugung eines möglichst intensiven Spectrums gewählt. Als Wärmequelle kam stets ein Auerbrenner A ohne Zugglas zur Anwendung. Die Spalten s_1 und s_2 waren bei den im Folgenden beschriebenen Versuchsreihen 40 mm hoch und 3 mm breit. Zur Erzeugung des Spectrums diente das oft benutzte Beugungsgitter g aus Silberdraht[3]) mit der Gitterconstanten 0,3716 mm. Ein Theil der reflectirenden Flussspathflächen P_1 bis P_n, ein Concentrationsspiegel S und die Thermosäule T befanden sich im Inneren eines gegen Luftströmung und fremde Strahlung schützenden Pappkastens. Bei den Spectralbeobachtungen wurde der Collimator s_1, e_1 nebst der hiermit starr verbundenen Wärmequelle A um gegebene Winkel φ gedreht und der beim Aufziehen des Klappschirmes K entstehende Ausschlag gemessen.

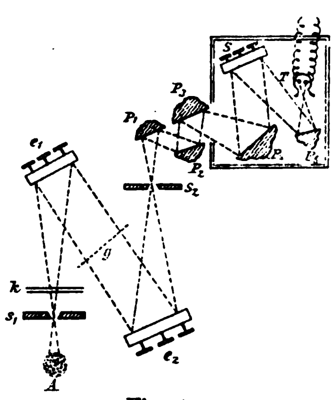


Fig. 1.

Mit Hülfe dieser Anordnung wurden fünf verschiedene Versuchsreihen ausgeführt, um die Energievertheilung der Reststrahlen in den Beugungsspectren erster Ordnung festzustellen und zwar betrug die Zahl der Flussspathreflexionen bei der mit I bezeichneten Versuchsreihe zwei, bei Versuchsreihe II drei etc., sodass bei der V. Versuchsreihe sechs Reflexionen in An-

1) H. Rubens, Zeitschr. f. Instrumentenk. 18. p. 65. 1898.

2) H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. 65. p. 255. 1898.

3) Vgl. l. c. p. 425.

wendung kamen. Im übrigen wurden sämmtliche Beobachtungen unter gleichen Bedingungen ausgeführt.

Die Ergebnisse dieser fünf Reihen sind in der folgenden Fig. 2 graphisch dargestellt. Als Abscissen sind die Ablenkungswinkel, als Ordinaten die beobachteten Ausschläge eingetragen. Um ein Urtheil über den Grad der Unreinheit der Spectra zu ermöglichen, ist für die Reihe III auch das Centralbild mit auf die Hälfte verkleinerten Ordinaten eingezeichnet worden. Die Breite desselben beträgt ca. 1° 20′, dennoch

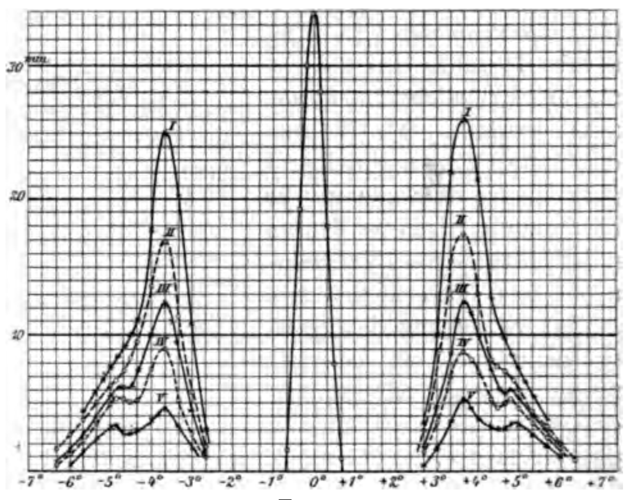


Fig. 2.

kommt die dispergirende Wirkung des Gitters in den Beugungsspectren genügend zum Ausdruck, um die oben gestellte Frage entscheiden zu können.

Man erkennt aus den Curven der Fig. 2 ohne weiteres, dass bei zwei und auch noch bei drei Flussspathreflexionen die Curven auf dem absteigenden Ast lediglich die bereits früher beobachtete Ausbuchtung zeigen, während bei Anwendung von 4, 5 und 6 reflectirenden Flächen an Stelle dieser Ausbuchtung sich ein zweites Maximum entwickelt, dessen Deutlichkeit mit der Zahl der Reflexionen rasch zunimmt. Dieser letztere Umstand deutet darauf hin, dass dieses zweite, bei $\lambda = 31{,}6\ \mu$ gelegene Energiemaximum nicht einer Eigenthümlichkeit der angewandten Strahlungsquelle seine Entstehung verdankt,

sondern durch selective Reflexion der Flussspathflächen hervorgebracht wird. Bildet man in jeder der Curven I bis V das Verhältniss α der Ordinaten p bei $\lambda_1 = 24{,}0\ \mu$ und q bei $\lambda_2 = 31{,}6\ \mu$, bei welchen Wellenlängen die beobachteten Maxima bez. Ausbuchtungen liegen, so gelangt man zu einer Reihe von Zahlen (α), von denen jede folgende, in die vorhergehenden dividirt, nahezu den gleichen Quotienten (β) ergiebt, wie dies aus der nachstehenden Tabelle zu ersehen ist.

Tabelle I.

Nr. der Versuchsreihe n	p_n	q_n	$\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$	$\beta = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$
I	25,5	8,5	3,00	1,19
II	17,1	6,8	2,52	1,25
III	12,3	6,1	2,02	1.20
IV	9,8	5,3	1,68	1,18
V	4,8	3,4	1,42	—
			Mittel:	1,21

Es ist leicht einzusehen, dass dieser Quotient β das Verhältniss der Reflexionsvermögen angiebt, welche eine Flussspathfläche bei den Wellenlängen $\lambda_2 = 31{,}6\ \mu$ und $\lambda_1 = 24{,}0\ \mu$ besitzt. Es seien nämlich u und v zwei Grössen, welche der Energie der Strahlungsquelle bei den Wellenlängen λ_1 und λ_2 proportional sind. Bezeichnen wir ferner die Reflexionsvermögen der Flussspathfläche für die beiden Wellenlängen mit ϱ_1 und ϱ_2, so sind die beobachteten Galvanometerausschläge bei der mit n bezeichneten Versuchsreihe, bei welcher nach dem vorstehenden die Zahl der reflectirenden Flussspathflächen $n+1$ beträgt, für die Wellenlängen λ_1 und λ_2 proportional mit $u \cdot \varrho_1^{n+1}$ bez. mit $v\,\varrho_2^{n+1}$ und ihr Verhältniss

$$\alpha_n = \frac{u}{v} \cdot \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{n+1}.$$

Die entsprechende Grösse der Versuchsreihe $n+1$ ist

$$\alpha_{n+1} = \frac{u}{v} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{n+2}$$

und das Verhältniss beider ergiebt sich, wie oben behauptet,

$$\beta = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Hiernach ist also das Reflexionsvermögen des Flussspath bei $\lambda_2 = 31,6\ \mu$ etwa 1,21 mal so gross, wie bei $\lambda_1 = 24,0\ \mu$. Dass trotzdem in sämmtlichen Curven das kurzwelligere Maximum bei weitem das stärkere ist, liegt lediglich an der Energievertheilung im Spectrum der Lichtquelle, welche die kürzeren Wellen in sehr viel höherem Maasse aussendet. Bei der hier benutzten Strahlungsquelle würde eine mindestens achtmalige Reflexion an Flussspathflächen erforderlich sein, um ein Ueberwiegen des langwelligen Maximums herbeizuführen.

Wären die sämmtlichen in Fig. 2 dargestellten Versuchsreihen bei genau gleicher Empfindlichkeit angestellt, und vor allen Dingen darauf Rücksicht genommen, dass bei Vermehrung der reflectirenden Flächen von n auf $n+1$ kein Theil des Strahlenkegels verloren geht, so könnte man die absoluten Werthe des Reflexionsvermögens ϱ_1 und ϱ_2 für die Wellenlängen λ_1 und λ_2 ohne weiteres den Zahlen der Tab. I entnehmen, indem man

$$\varrho_1 = \frac{p_n}{p_{n+1}} \quad \text{und} \quad \varrho_2 = \frac{q_n}{q_{n+1}}$$

setzt. Die letztere dieser beiden Bedingungen ist jedoch keineswegs erfüllt. Auch wachsen die Schwierigkeiten der Justirung wesentlich mit der Zahl der angewandten reflectirenden Flächen, sodass die Ausschläge schon aus diesem Grunde bei den letzten Reihen (insbesondere bei Reihe V) im Vergleich mit den ersten Reihen zu klein ausfallen.

Um dennoch eine exacte Bestimmung der Grössen ϱ_1 und ϱ_2 vorzunehmen, wäre es erforderlich, die Reflexionsmessungen in dem Gitterspectrum selbst anzustellen. Da indessen die in den Beugungsspectren vorhandene Energie zu genaueren Messungen nicht ausreicht, habe ich mich darauf beschränkt, das Reflexionsvermögen einer Flussspathfläche für die gesammten, unzerlegten Reststrahlen zu ermitteln. Dasselbe nimmt begreiflicherweise mit der Zahl der zur Erzeugung der Reststrahlen angewandten reflectirenden Flussspathflächen zu. Für einen Incidenzwinkel von angenähert 30° ergab sich das Reflexionsvermögen bei zweimaliger Reflexion zu 69,2 Proc. bei viermaliger Reflexion zu 74,9 Proc.[1]), bei sechsmaliger

1) In der zu Anfang citirten Abhandlung ist das Reflexionsvermögen einer Fluoritfläche für die durch viermalige Reflexion erzeugten Rest-

Reflexion zu 79,5 Proc. Man ist hiernach zu der Annahme berechtigt, dass das Reflexionsvermögen ϱ_1 bei $\lambda_1 = 24,0\ \mu$ und ϱ_2 bei $\lambda_2 = 31,6\ \mu$ höchst wahrscheinlich die Werthe 75 Proc. bez. 90 Proc. übersteigt.

Die Curven der Fig. 2 lassen wegen der Unreinheit der Spectren die Frage unbeantwortet, ob man es hier mit zwei völlig getrennten Streifen zu thun hat, oder ob das Reflexionsvermögen auch in dem Spectralgebiet zwischen den Wellenlängen $\lambda_1 = 24,0\ \mu$ und $\lambda_2 = 31,6\ \mu$ hohe Werthe besitzt. Um eine Entscheidung herbeizuführen, wurden die Versuchsreihen III und IV mit engeren Spalten wiederholt und zwar betrugen die Breiten von s_1 und s_2 hierbei nur 1,8 mm. Die so erhaltenen Energiecurven zeigten indessen vollkommen gleichen Charakter wie die früher beobachteten. Eine wesentlich deutlichere Trennung der beiden Maxima war auf diesem Wege nicht zu erzielen. Es ist hiernach anzunehmen, dass die Aenderung des Reflexionsvermögens in dem betrachteten Spectralgebiet continuirlich verläuft und zwar derart, dass auch zwischen den Wellenlängen λ_1 und λ_2 hohes Reflexionsvermögen vorhanden ist.

Es ist nach dem Vorstehenden leicht zu übersehen, weshalb bei den früheren, in Gemeinschaft mit Hrn. E. Nichols angestellten Versuchen das zweite Maximum in dem Gitterspectrum der Reststrahlen des Flussspath als solches nicht beobachtet werden konnte. Bei den bolometrischen Messungen wurde nur Reflexion an drei Fluoritflächen angewandt und hierbei tritt, wie oben festgestellt wurde, das zweite Maximum noch nicht hervor. Dagegen hätte sich dasselbe bei den radiometrischen Beobachtungen, bei welchen vier reflectirende Flussspathflächen zur Verwendung gelangten, bereits bemerkbar machen können. Der Grund, weshalb dies nicht geschah, liegt in der starken Absorption, welche die Strahlen von grösserer Wellenlänge in der als Radiometerfenster dienenden Chlor-

strahlen zu 71,5 Proc. angegeben. Es ist hierbei zu bemerken, dass diese Messung mit Hülfe des Radiometers vorgenommen wurde, dessen Fenster aus einer Chlorsilberplatte bestand und gerade diejenigen Strahlen vorzugsweise absorbirte, welche von Fluorit besonders stark reflectirt werden.

silberplatte erfahren und welche jenseits 30 μ nahezu vollständig ist. Durch Einschalten einer solchen Chlorsilberplatte in den Strahlengang werden daher die Reststrahlen des Flussspath auf einen ziemlich homogenen Strahlencomplex beschränkt, dessen Maximum bei Benutzung unserer Chlorsilberplatte bei $\lambda = 23,7\ \mu$ liegt.[1]) Die Folgerungen aus unseren früheren Beobachtungen, insbesondere unsere Untersuchungen über die Reflexion der Reststrahlen an Resonatorenplatten, bleiben daher durch die Auffindung des zweiten Maximums gänzlich unberührt.

Dagegen ist es von Interesse, hervorzuheben, dass nunmehr die Uebereinstimmung zwischen der beobachteten und der theoretisch, aus der Ketteler-Helmholtz'schen Dispersionsformel berechneten Lage des Gebietes metallischer Reflexion für Flussspath eine erheblich bessere geworden ist. Nach Hrn. Paschen's Dispersionsmessungen[2]) berechnet sich die Constante der genannten Formel, welche angenähert die Mitte des metallischen Absorptionsstreifens angeben soll, zu ca. 30 μ. Diese Grösse liegt zwischen den Wellenlängen λ_1 und λ_2 der beiden in dem Beugungsspectrum der Reststrahlen beobachteten Maxima und zwar erheblich näher an λ_2, wo auch die stärkere metallische Reflexion stattfindet.

Ferner ist es nothwendig, auf die kürzlich von Hrn. H. Beckmann[3]) veröffentlichte Dissertation etwas näher einzugehen. Dieselbe beschäftigt sich mit der Abhängigkeit der Intensität der von einem „schwarzen Körper" ausgesandten Reststrahlen von der Temperatur. Ein Theil der Gesammtstrahlung eines nach den Angaben der Herren Lummer und Wien[4]) hergestellten „schwarzen Körpers" wurde einer vierfachen Reflexion an Flussspathflächen unterworfen und dann mit Hülfe eines vorderseitig versilberten Hohlspiegels auf den temperaturempfindlichen Contactstellen einer Thermosäule vereinigt. Hr. Beckmann beobachtete auf diese Weise die Abhängigkeit der Reststrahlung von der Temperatur in dem Intervall von 193 bis 873° der absoluten Scala. An der Hand der hierbei er-

1) Vgl. l. c. p. 438.
2) F. Paschen, Wied. Ann. 53. p. 301. 1894.
3) H. Beckmann, Inaug.-Diss., Tübingen 1898.
4) O. Lummer u. W. Wien, Wied. Ann. 56. p. 451. 1896.

haltenen Resultate versuchte derselbe eine Prüfung des Wien'schen Gesetzes[1]) unter der Annahme, dass den erzeugten Reststrahlen eine mittlere Wellenlänge von 24,4 μ zukomme, indem er zugleich nachwies, dass eine selbst erhebliche Inhomogenität der Strahlung auf das Resultat nur von geringem Einfluss sein könne. Das Ergebniss der Prüfung lässt sich in die beiden Sätze zusammenfassen:

1. Das Wien'sche Gesetz, bez. die hieraus abgeleitete isochromatische Curve ist zur Darstellung der gewonnenen Beobachtungsresultate vollkommen geeignet.

2. Die Constante c_2 des Wien'schen Gesetzes muss, wenn den Beobachtungen genügt werden soll, gleich 24250 gesetzt werden, im Gegensatz zu den Resultaten der Untersuchungen des Hrn. Paschen[2]) sowie der Herren Lummer und Pringsheim[3]), welche, allerdings für erheblich kürzere Wellen, die Constante $c_2 = 14500$ ergeben.

Nach den in dem ersten Theil dieser Arbeit mitgetheilten und in Fig. 2 dargestellten Beobachtungen erscheint allerdings die Annahme, dass die nach viermaliger Reflexion an Flussspathflächen noch vorhandene Reststrahlung, insbesondere bei tiefen Temperaturen der Strahlungsquelle, eine mittlere Wellenlänge von 24,4 μ besitzt, keineswegs gerechtfertigt und es muss eine neue Berechnung vorgenommen werden, um eine Prüfung des Wien'schen Gesetzes mit Hülfe der Beckmann'schen Beobachtungen zu ermöglichen. Ich habe eine solche unter der Annahme durchgeführt, dass der Flussspath an zwei getrennten Stellen, nämlich bei den Wellenlängen $\lambda_1 = 24\,\mu$ und $\lambda_2 = 32\,\mu$, metallische Reflexion besitzt und dass bei der Wellenlänge λ_2 das Reflexionsvermögen ϱ_2 1,2 mal so gross ist wie dasjenige bei λ_1 (ϱ_1).[4]) Es ist dann die Intensität der Reststrahlen für den zweiten Streifen gegenüber derjenigen des ersten Streifens bei viermaliger Reflexion im Verhältniss $1:1,2^4$, das ist nahezu im Verhältniss 1:2, bevorzugt.

1) W. Wien, Wied. Ann. 58. p. 662. 1896.

2) F. Paschen, Wied. Ann. 58. p. 450. 1896; Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 22. p. 405. 1899.

3) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch 1. 1899. In dieser Arbeit zeigt sich bereits eine Vermehrung der Grösse c_2 mit wachsender Wellenlänge.

4) Vgl. p. 580.

Setzt man in der Wien'schen Gleichung

$$\Phi = \frac{c_1}{\lambda^5}\left[e^{-\frac{c_2}{\lambda \vartheta_1}} - e^{-\frac{c_2}{\lambda \vartheta_2}}\right],$$

worin Φ den bei den Temperaturen ϑ_1 des „schwarzen Körpers" und ϑ_2 der Thermosäule für die Wellenlänge λ beobachteten Ausschlag bedeutet, $c_1 = 3085.10^6$, $c_2 = 26000$, so erhält man für die Wellenlängen λ_1 und λ_2 und die in der ersten Verticalreihe der nachfolgenden Tabelle aufgeführten Temperaturen ϑ_1 des schwarzen Körpers die in der zweiten und dritten Columne wiedergegebenen Φ_1 und Φ_2. Die Temperatur der Thermosäule (ϑ_2) ist hierbei constant gleich 291° absolut angenommen, wie dies bei den Beckmann'schen Beobachtungen der Fall war. In der vierten Columne ist die Summe der Grössen $\Phi_1 + 2\,\Phi_2$ gebildet, welche nach der obigen Annahme mit dem Ausschlag Φ_0 gleich sein soll, welcher von Hrn. Beckmann für die betreffenden Temperaturen des „schwarzen Körpers" und der Thermosäule beobachtet wurde. Die fünfte Columne enthält diese Φ_0, die sechste endlich giebt die Differenzen δ zwischen den beobachteten und berechneten Grössen.

Tabelle II.

ϑ_1	Φ_1	Φ_2	$\Phi_1 + 2\,\Phi_2$	Φ_0	δ
193	− 8,0	− 4,3	− 16,6	− 17,0	−0,4
291	—	—	—	—	0
373	+ 11,9	+ 4,8	+ 21,5	+ 21,5	—
573	+ 49,2	+16,7	+ 82,6	+ 82,0	−0,6
773	+ 86,0	+26,5	+139,0	+139,0	—
873	+102,6	+30,7	+164,0	+164,0	—

Bei der Beurtheilung dieser Uebereinstimmung ist zu berücksichtigen, dass die Gleichheit der Zahlen für die Temperaturen $\vartheta_1 = 291°$ und $\vartheta_1 = 773°$ eine erzwungene ist; aber auch für die übrigen ϑ_1 liegen die δ innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler. Ferner sind die Abweichungen, insbesondere für die tiefen Temperaturen, hier erheblich kleiner, als sie sich unter der von Hrn. Beckmann gemachten Voraussetzung ergaben, wie dies nach dem Vorausgehenden zu erwarten war. Dagegen ist es vollkommen unmöglich, den Verlauf der Beobachtungen durch die Wien'sche Formel auch

nur angenähert darzustellen, wenn man der Constanten c_2 den Werth 14500 beilegt, welchen sie für kurze Wellen besitzt. Setzt man die Constante $c_1 = 2230.10^6$, $c_2 = 14500$, so werden wiederum für die beiden Temperaturen $\vartheta_1 = 291^0$ und $\vartheta_1 = 773^0$ die beobachteten und berechneten Werthe zur Uebereinstimmung gebracht, dagegen liegen die Differenzen δ für alle anderen ϑ_1 weit ausserhalb der Fehlergrenze und betragen in einem Falle mehr als 100 Proc., wie dies aus Tab. III ersichtlich ist. Dieselbe ist vollständig nach dem Muster der Tab. II eingerichtet.

Tabelle III.

ϑ_1	Φ_1	Φ_2	$\Phi_1 + 2\,\Phi_2$	Φ_0	δ
193	− 22,9	− 7,7	− 38,3	− 17,0	+21,3
291	0	0	—	—	—
373	+ 20,4	+ 5,7	+ 31,8	+ 21,5	−10,3
573	+ 62,5	+16,1	+ 94,7	+ 82,0	−12,7
773	+ 93,2	+22,9	+139,0	+139,0	—
873	+105,0	+25,6	+156,2	+164,0	+ 7,8

Wie bereits oben festgestellt wurde, wird man nicht annehmen dürfen, dass lediglich in der unmittelbaren Umgebung von $\lambda_1 = 24{,}0\,\mu$ und $\lambda_2 = 31{,}6\,\mu$ metallische Reflexion stattfindet, sondern es ist im höchsten Grade wahrscheinlich, dass auch in dem dazwischen liegenden Spectralgebiet hohe Werthe des Reflexionsvermögens vorkommen. Es sind somit die der Rechnung zu Grunde liegenden Voraussetzungen auch hier nicht genau zutreffend und man könnte vermuthen, dass diese Thatsache auf die berechneten Werthe, insbesondere aber auf die Grösse der Constanten c_2, von erheblichem Einfluss wäre. Es ist dies jedoch keineswegs der Fall, wovon man sich durch Rechnung leicht überzeugen kann. Nimmt man z. B. an, dass das Reflexionsvermögen einer Flussspathfläche von $\lambda_1 = 24{,}0\,\mu$ bis $\lambda_2 = 31{,}6\mu$ continuirlich bis auf den 1,2 fachen Werth anwächst, und berechnet unter dieser Voraussetzung die Abhängigkeit der von dem „schwarzen Körper“ ausgesandten Reststrahlen von der Temperatur mit Hülfe des Wien'schen Gesetzes, so lässt sich, unter Beibehaltung der Constanten $c_2 = 26000$, den Beckmann'schen Beobachtungen ebenso vollkommen genügen, wie dies unter der Annahme zweier getrennter Streifen der Fall ist. Wählt man dagegen $c_2 = 14500$,

so ist auch in diesem Falle eine Darstellung der Beobachtungen durch die Wien'sche Formel völlig ausgeschlossen.

Die Erklärung für die Thatsache, dass die Art der Energievertheilung zwischen den Wellenlängen λ_1 und λ_2 so geringen Einfluss auf die Abhängigkeit der Emission dieser Reststrahlen von der Temperatur des „schwarzen Körpers" ausübt, liegt in dem bereits von Hrn. Beckmann betonten Satz, dass die isochromatischen Curven für sehr grosse Wellenlängen, welche von der dem Maximum der Energiecurve zugehörigen Wellenlänge weit entfernt sind, sich ihrer Form nach wenig voneinander unterscheiden und innerhalb kleinerer Spectralgebiete mit genügender Annäherung als ähnliche Curven behandelt werden dürfen.

Aus der Thatsache, dass die Beckmann'schen Beobachtungen für die Grösse c_2 der Wien'schen Isochromatic einen Werth von 26000 erfordern, während zweifellos der Werth $c_2 = 14500$ in dem kurzwelligeren Theil des Spectrums der richtige ist, könnte man versucht sein, den Schluss zu ziehen, dass das Wien'sche Vertheilungsgesetz unter der Annahme $c_2 = 14500$ im äussersten Ultraroth zu vollkommen falschen Ergebnissen führen müsste. Bei einer nähern Betrachtung der Wien'schen Formel ergiebt sich indessen, dass dieselbe auch dann noch Werthe liefert, welche sich von den richtigen nicht sehr unterscheiden. Differentiirt man nämlich den Ausdruck

$$J = \frac{1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda \vartheta}}$$

nach c_2 und dividirt gleichzeitig durch J, so folgt

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{1}{\lambda \vartheta} d c_2 ,$$

d. h. die relative Aenderung von J ist bei einer absoluten Aenderung von c_2 um so kleiner, je grösser die Wellenlänge und je höher die Temperatur ist. So würde z. B. bei einer Vergrösserung der Constanten c_2 von 14500 auf 26000 für $\vartheta = 1000^0$ die Ordinate für $1\,\mu$ auf ca. $^1/_{12}$ ihres früheren Betrages reducirt werden, während bei $\lambda = 32^\mu$ nur eine Verringerung der Intensität um 36 Proc. eintritt. Bedenkt man ferner, dass die Intensität mit wachsender Wellenlänge jenseits des Energiemaximums sehr rasch abnimmt, so ist ersichtlich,

dass ein allmähliches Anwachsen der Grösse c_2 mit λ bei Beobachtung der Energievertheilung eines schwarzen Körpers von hoher Temperatur sich wenig bemerkbar machen wird. Auf einer Zeichnung, welche J als Function von λ für einen schwarzen Körper von 2000° darstellt, und deren Maximalordinate 1 m hoch ist, würde ein Anwachsen der Grösse c_2 von 14 500 auf 26 000, welches in dem Spectralgebiet zwischen $\lambda = 6\,\mu$ und $\lambda = 25\,\mu$ allmählich erfolgt, an keiner Stelle eine Verschiebung der Curve um mehr als 1 mm zur Folge haben. Bei $25\,\mu$ würde die durch Aenderung der Grösse c_2 von 14 500 auf 26 000 herbeigeführte Verminderung der Ordinate 23 Proc. betragen. Dies würde aber in dem von uns gewählten Maassstab weniger als 0,02 mm bedeuten.

Ich möchte zum Schluss noch eine eigenthümliche Beobachtung erwähnen, welche allerdings mit dem Inhalt der vorstehenden Untersuchung nur in sehr losem Zusammenhang steht. Es war schon früher beobachtet worden, dass sich der von dem Zugglas befreite Auer'sche Brenner als Strahlungsquelle für langwellige Wärmestrahlen sehr gut eignet.[1]) Ausser der beträchtlichen Grösse seiner strahlenden Fläche und der für die meisten Zwecke ausreichenden Constanz ist hierbei besonders seine verhältnissmässig geringe Gesammtemission, bez. sein relativ grosser Reichthum an Strahlen von sehr grosser Wellenlänge von Vortheil. Nach zweimaliger Reflexion der von dem Auerbrenner ausgehenden Gesammtstrahlung an Fluoritflächen erhält man bereits nahezu reine Reststrahlen, welchen nur noch etwa 4 Proc. kurzwellige Strahlung beigemischt ist.[2]) Nach dreimaliger Reflexion sind die Reststrahlen vollkommen rein und betragen ca. 1,7 Proc. der Gesammtstrahlung, während nach dem Wien'schen Gesetz für einen „schwarzen Körper“ von der Temperatur des Auer'schen Glühstrumpfes (etwa 2000° abs.) jenseits der Wellenlänge $22\,\mu$, bei welcher die Energie in den Beugungsbildern der Reststrahlen noch sehr gering ist, überhaupt nur noch 0,039 Proc., für die durch dreifache Reflexion erzeugten Rest-

1) H. Rubens u. E. Aschkinass, l. c. p. 243.

2) Diese Verunreinigung kann durch Benutzung eines Klappschirmes aus Flussspath praktisch unwirksam gemacht werden (vgl. Wied. Ann. **64.** p. 597. 1898).

strahlen sicher weniger als 0,015 Proc. der Gesammtstrahlung zu erwarten wären. Es kommt noch hinzu, dass von der Gesammtstrahlung des von mir benutzten Auer'schen Brenners nur 32 Proc. von dem Glühstrumpf selbst, dagegen 68 Proc. von der Flamme und der zur Stütze des Glühkörpers dienenden, heissen Halterstange herrührten, andererseits aber gingen über 80 Proc. der beobachteten Reststrahlen von dem Glühstrumpf selbst und weniger als 20 Proc. von den übrigen strahlenden Massen aus. Hiernach sendet der Auer'sche Glühstrumpf im Verhältniss zu seiner Gesammtemission von den Reststrahlen des Flussspath über 280 mal mehr aus, als dies von einem schwarzen Körper von gleicher Temperatur nach dem Wien'schen Gesetze zu erwarten wäre. Hierbei ist die Constante c_2 der Wien'schen Formel = 14500 angenommen. Setzt man für das jenseits $22\,\mu$ gelegene Spectralgebiet $c_2 = 26000$, so wird die Diskrepanz noch um 25 Proc. grösser.

Um mich davon zu überzeugen, dass man es hier mit einer Eigenthümlichkeit der Strahlungsquelle und nicht mit einem Versagen der Wien'schen Gleichung zu thun hat, habe ich das Verhältniss der Reststrahlung zur Gesammtstrahlung auch für einen „schwarzen Körper" bestimmt. Derselbe wurde mir von den Herren Prof. Lummer und Prof. Kurlbaum freundlichst zur Verfügung gestellt und ich ergreife gern die Gelegenheit, beiden Herren, insbesondere aber auch dem Hrn. Präsidenten Kohlrausch, für das mir stets bewiesene Entgegenkommen meinen besten Dank auszusprechen. — Das beobachtete Verhältniss der Intensitäten der Gesammtstrahlung und der durch dreimalige Reflexion erzeugten Reststrahlung ergab sich bei einer Temperatur des „schwarzen Körpers" von $\vartheta_1 = 1035^0$ abs. zu $\sigma = 610$. Nach der Wien'schen Formel berechnet sich das Intensitätsverhältniss der Gesammtemission und des jenseits der Wellenlänge $\lambda = 22\,\mu$ gelegenen Theiles derselben zu angenähert 240, was mit dem Resultat der Beobachtung jedenfalls der Grössenordnung nach übereinstimmt. Eine genauere Prüfung des Wien'schen Gesetzes kann allerdings an der Hand dieser Zahlen nicht vorgenommen werden.

Charlottenburg, Physikal. Inst. d. Techn. Hochschule, August 1899.

(Eingegangen 1. September 1899.)

---

3. *Ueber das Verhältniss der elektrischen Ladung zur Masse der Kathodenstrahlen*[1]; *von S. Simon.*

Einleitung.

Bei den Untersuchungen über Kathodenstrahlen haben sich bei den verschiedenen Forschern erheblich abweichende Resultate für die Grösse des Verhältnisses ε / μ, d. h. der elektrischen Ladung pro Grammmasse, ergeben. Diese Verschiedenheit kann ihre Erklärung sowohl in Ungenauigkeiten der Versuchsmethoden, als auch in dem Umstande finden, dass die einzelnen Forscher von verschiedenen theoretischen Voraussetzungen ausgegangen sind. Wie dem auch sei, jedenfalls ist es angezeigt, nach einer bestimmten Versuchsmethode eine *möglichst genaue* Bestimmung der Grösse von ε / μ durchzuführen. Das ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, und zwar geschieht die Untersuchung auf Grund der von W. Kaufmann in seinen Arbeiten über Kathodenstrahlen[2]) gemachten Voraussetzungen.

§ 1. Theoretisches.

In den citirten Arbeiten gelangt Kaufmann zu der Formel:

(1) $$\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{2 z^2 V_0}{J^2 \left[\int\limits_0^{x_0} d x \int\limits_0^{x} H_0 \, d x \right]^2} .$$

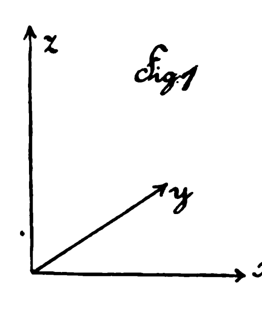
V_0 ist in dieser Gleichung die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden, J der Spulenstrom, H_0 die Feldstärke für die Einheit der Stromintensität. Hier ist die Annahme gemacht, dass die ablenkende Kraft in Richtung der z-Axe wirkt, wenn die Kraftlinien mit der Richtung der y-Axe zusammenfallen,

1) Auszug aus der gleichnamigen Berliner Inaug.-Diss.

2) W. Kaufmann, Wied. Ann. **61**. p. 544—552; **62**. p. 596—598. 1897.

und der unabgelenkte Strahl in der x-Axe verläuft (Fig. 1). Die Bahn des abgelenkten Strahles liegt dann in der x-z-Ebene. z bedeutet in der Gleichung die abgelesene Ablenkung.

Die Gleichung (1) ist nur angenähert richtig für sehr kleine Ablenkungen. Deshalb giebt Kaufmann für grössere Ablenkungen eine Correctionsformel an, in welcher jedoch das Correctionsglied unter der Annahme eines homogenen Feldes bez. einer kreisförmigen Bahn des Strahles berechnet wird. Die auf diese Weise ermittelte Correction ist, wie aus den nachfolgenden Betrachtungen leicht ersichtlich ist, zu klein. Es soll deshalb im Folgenden eine genauere Berechnung für den Zusammenhang zwischen ε/μ und der Ablenkung gegeben werden unter Zugrundelegung des thatsächlichen Feldverlaufes.



Die von den magnetischen Kräften in dem Kathodenstrahl hervorgebrachte Beschleunigung steht überall senkrecht auf der Bewegungsrichtung des Strahles und ist gleich v^2/ϱ, wenn v die Geschwindigkeit des Strahles und ϱ den Krümmungsradius der Bahn an dem betrachteten Punkte bedeutet. Dieselbe ist ferner gleich:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} H . v,$$

sodass man die Gleichung erhält:

(2) $$\frac{\varepsilon}{\mu} H = \frac{v}{\varrho}.$$

Setzt man für den Krümmungsradius seinen Werth ein, so ergiebt sich die Gleichung:

(3) $$\frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{H}{v} = \frac{\frac{d^2 z}{d x^2}}{\left[1 + \left(\frac{d z}{d x}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Da die Dimensionen des weiter unten zu beschreibenden Apparates so gewählt waren, dass jedenfalls $(dz/dx)^2$ klein gegen 1 ist, so genügt es, bei einer Reihenentwickelung der rechten Seite der Gleichung nur das 1. Glied zu berücksichtigen. Man kann daher schreiben:

(3a) $$\frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{H}{v} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{d z}{d x}\right)^2\right].$$

Für das in der Klammer stehende Correctionsglied $\frac{3}{2}(dz/dx)^2$ erhält man einen angenäherten Werth, indem man zunächst setzt:

$$(4) \qquad \frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{\varepsilon}{\mu . v} \cdot H$$

oder

$$(5) \qquad \frac{d z}{d x} = \frac{\varepsilon}{\mu . v} \int\limits_0^x H d x .$$

Daraus folgt:

$$(6) \qquad \frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{\varepsilon . H}{\mu . v} \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\mu^2 v^2} \left(\int\limits_0^x H d x \right)^2 \right]$$

und

$$(7) \qquad \frac{d z}{d x} = \frac{\varepsilon}{\mu . v} \int\limits_0^x H d x + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon^3}{\mu^3 v^3} \int\limits_0^x H \left(\int\limits_0^x H d x \right)^2 d x .$$

Das Doppelintegral im zweiten Gliede auf der rechten Seite lässt sich in ein einfaches Integral verwandeln. Es ist nämlich, wie leicht einzusehen ist:

$$(8) \qquad 3 \int H \left(\int H d x \right)^2 d x = \left(\int H d x \right)^3 .$$

Setzt man dies in (7) ein, so erhält man nach nochmaliger Integration für die Ablenkung des Bahnendpunktes:

$$(9) \qquad z_0 = \frac{\varepsilon}{\mu . v} \left[\int\limits_0^{x_0} d x \int\limits_0^x H d x + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\mu^2 v^2} \int\limits_0^{x_0} d x \left(\int\limits_0^x H d x \right)^3 \right] .$$

Folglich:

$$(10) \qquad \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{v . z_0}{\int\limits_0^{x_0} d x \int\limits_0^x H d x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\mu^2 v^2} \int\limits_0^{x_0} d x \left(\int\limits_0^x H d x \right)^3} .$$

Aus dem Correctionsgliede im Nenner kann man die Grösse $\varepsilon / \mu . v$ entfernen, indem man für dieselbe ihren angenäherten Werth einsetzt:

Folglich ist:

$$(10a)\qquad \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{v \cdot x_0}{\int\limits_0^{x_0} d\,x \int\limits_0^{x} H\,d\,x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x_0^2}{2} \cdot \frac{\int\limits_0^{x_0} d\,x \left(\int\limits_0^{x} H\,d\,x\right)^3}{\left[\int\limits_0^{x_0} d\,x \int\limits_0^{x} H\,d\,x\right]^3}}$$

oder unter Berücksichtigung, dass das zweite Glied im Nenner klein gegen 1 ist:

$$(11)\qquad \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{v \cdot x_0}{\int\limits_0^{x_0} d\,x \int\limits_0^{x} H\,d\,x} \left[1 - \frac{x_0^2}{2} \cdot \frac{\int\limits_0^{x_0} d\,x \left(\int\limits_0^{x} H\,d\,x\right)^3}{\left[\int\limits_0^{x_0} d\,x \int\limits_0^{x} H\,d\,x\right]^3}\right].$$

Es erübrigt noch, in diese Gleichung die direct beobachteten Grössen einzuführen: Es ist

$$v = \sqrt{2\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,V_0} \quad \text{und} \quad H = J \cdot H_0 .$$

Setzt man dieses ein, so erhält man:

$$(12)\qquad \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{2\,x_0^2\,V_0}{J^2 \left[\int\limits_0^{x_0} d\,x \int\limits_0^{x} H\,d\,x\right]^2} \left[1 - \frac{x_0^2}{2} \cdot \frac{\int\limits_0^{x_0} d\,x \left(\int\limits_0^{x} H\,d\,x\right)^3}{\left[\int\limits_0^{x_0} d\,x \int\limits_0^{x} H\,d\,x\right]^3}\right]^2$$

oder

$$(13)\qquad \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{2\,x_0^2\,V_0}{J^2 \left[\int\limits_0^{x_0} d\,x \int\limits_0^{x} H\,d\,x\right]^2} \left[1 - x_0^2 \cdot \frac{\int\limits_0^{x_0} d\,x \left(\int\limits_0^{x} H\,d\,x\right)^3}{\left[\int\limits_0^{x_0} d\,x \int\limits_0^{x} H\,d\,x\right]^3}\right].$$

Setzt man:

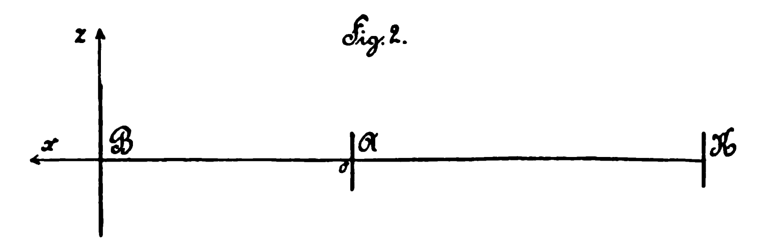
$$(14)\qquad x_0^2 \left[1 - x_0^2 \cdot \frac{\int\limits_0^{x_0} d\,x \left(\int\limits_0^{x} H\,d\,x\right)^3}{\left[\int\limits_0^{x_0} d\,x \int\limits_0^{x} H\,d\,x\right]^3}\right] = x_0'^2,$$

so wird

$$(15) \qquad \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{2\, x_0'^2 \, . \, V_0}{J^2 . \left[\int\limits_0^{x_0} d\,x \int\limits_0^{x} H\, d\,x\right]^2} .$$

Ein weiterer Punkt, der für die Anordnung der Ablenkungsversuche von Wichtigkeit ist, sei hier erörtert.

In Fig. 2 stellt K die Kathode, A die Anode dar, B den Endpunkt der Bahn. Die x-Axe ist die Richtung der unabgelenkten Strahlen. Bei den Ablenkungsversuchen ist die Anordnung so getroffen, dass das Potential zwischen A und B



constant ist, also auch v die Geschwindigkeit der Theilchen. Zwischen K und A ist das Potential variabel.

Beobachtet man die Ablenkung an dem Schatten eines bei A befindlichen Drahtes, so gelten die früher entwickelten Gleichungen nur, wenn auch bei Erregung des Magnetfeldes im Punkte A selbst die Richtung des Strahles unverändert bleibt, d. h. wenn für

$$x = 0 \frac{d\,z}{d\,x} = 0$$

ist. Diese Bedingung wäre erfüllt, wenn zwischen A und K die Feldintensität gleich Null wäre. Wenn dieses auch aus praktischen Gründen nicht zu verwirklichen ist, so kann man diese Forderung doch auf Grund folgender Betrachtungen realisiren.

Es ist:

$$(16) \qquad \frac{d^2 z}{d\,t^2} = \frac{\varepsilon}{\mu} v\, H\,^{1)},$$

1) Für die hier folgenden Betrachtungen genügen die angenäherten Formeln, da es sich nur um sehr schwache Felder und sehr kleine Ablenkungen handelt.

(17) $$\frac{dz}{dt} = \frac{\varepsilon}{\mu} \int H v \, dt.$$

Da nun $v\,dt = dx$, so ist:

(18) $$\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = \frac{\varepsilon}{\mu} \int_{-K}^{0} H \, dx,$$

(19) $$\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)_0}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_0} = \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)_0}{v_0} = \frac{\varepsilon}{\mu \cdot v_0} \int_{-K}^{0} H \, dx.$$

Man sieht, dass

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = 0$$

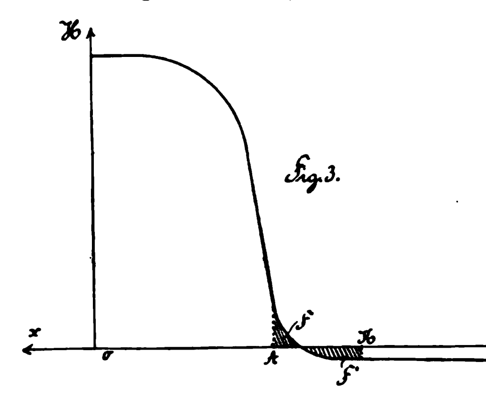
wird für den Fall, dass

$$\int_{-K}^{0} H \, dx = 0$$

ist. Bringt man also bei der Versuchsanordnung die Anode A an eine Stelle der x-Axe, für welche

$$\int_{-K}^{0} H \, dx$$

verschwindet, so verläuft an dieser Stalle die Bahn der Strahlen in Richtung der x-Axe, und man darf den Vorgang so ansehen, als ob die ablenkende Kraft erst an diesem Punkte in Wirkung treten würde.



In der nebenstehenden Fig. 3 ist der Verlauf des Feldes längs des Spulendurchmessers schematisch angegeben: o ist ein Punkt der Axe der Spulen. Es ist klar, dass zu jeder Stellung A der Anode eine conjugirte Stellung der Kathode K gehört, und dass es unendlich viele solcher Punktpaare giebt, für welche

$\int H\,d\,x$ verschwindet. Für diese Stellungen muss das von der Feldcurve und der x-Axe begrenzte Flächenstück F, welches oberhalb der x-Axe liegt, gleich sein demjenigen F', welches unterhalb dieser Axe liegt.

§ 2. Apparate.

Auf einer Grundplatte *a* waren zwei Gleitschienen *b* befestigt, zwischen denen sich der Schlitten *c* bewegen konnte. (Dimensionen vgl. Fig. 4 und 5 auf p. 596.) Dieser wurde durch starke Messingfedern an eine der Gleitflächen angedrückt, wodurch ein gleichmässiges Verschieben längs dieser Flächen ermöglicht wurde.

In der Mitte des eben beschriebenen Schlittens war rechtwinklig zu demselben auf dem beweglichen Theile *c* ein zweiter ganz ähnlicher Schlitten angebracht, dessen gleitender Theil *c'* jedoch aus zwei Stücken bestand, von denen jedes eine der beiden zur Erzeugung des Magnetfeldes dienenden Spulen trug.

Auf dem Schlitten *c* war noch ein hölzernes Auflager *g* für die Entladungsröhre angebracht. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass an dem Apparate keinerlei Eisentheile zur Verwendung kamen.

An den vier Ecken von *a* befanden sich vier starke Holzsäulen *d*; dieselben trugen ein Brett *e*, in dessen Mitte sich ein Schlitz befand, durch welchen das weiter unten zu beschreibende Magnetometer *f* in den Zwischenraum der beiden Spulen eingelassen wurde. Der ganze Apparat wurde auf dem Arbeitstisch festgeschraubt. Jede der beiden Spulen hatte folgende Dimensionen:

Der Zinkblechcylinder, welcher die Wickelung trug, hatte eine Wandstärke von 0,25 mm; sein innerer Durchmesser betrug 138,5 mm. Die Wickelung bestand aus isolirtem Kupferdraht von 1 mm Durchmesser; die Isolirung eingerechnet, betrug der Durchmesser 2,5 mm. Die Spule hatte also, von Mitte zu Mitte Draht gemessen, einen Durchmesser von 141,5 mm; ihre Länge betrug 398 mm, ebenfalls von Mitte zu Mitte Draht.

Die Ausmessung der Spulendimensionen wurde mit möglichster Sorgfalt mit Maassstab und Zirkel oder, wo dieses unthunlich war, mittels eines Diopters vorgenommen.

Die relative Lage der Entladungsröhre zum Felde wurde ebenfalls dioptrisch bestimmt.

Fig. 4

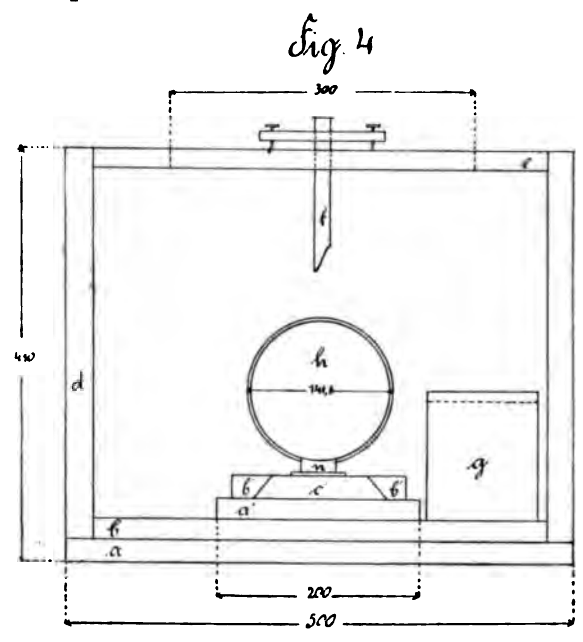
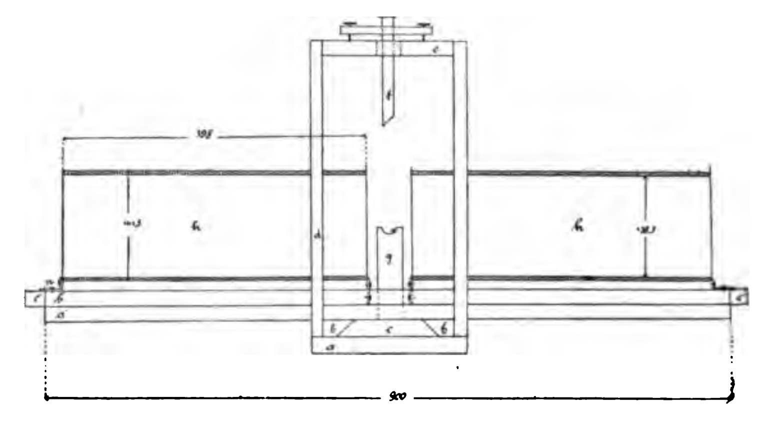


Fig. 5.

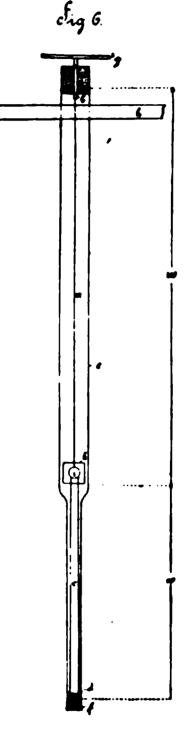


Die oben beschriebene Construction des Apparates gestattete es, bei der Feldmessung Verschiebungen der Spulen

echt zu ihrer Axe vorzunehmen, während das Magneto- seine Stellung unverrückbar beibehielt. Ferner war es möglich, jede Stellung der Spulen zu dem Magnetometer der Kathodenröhre, wenn dieselbe aus irgend welchem le geändert worden war, mit Hülfe von geeignet an- chten Marken, genau wiederherzustellen.

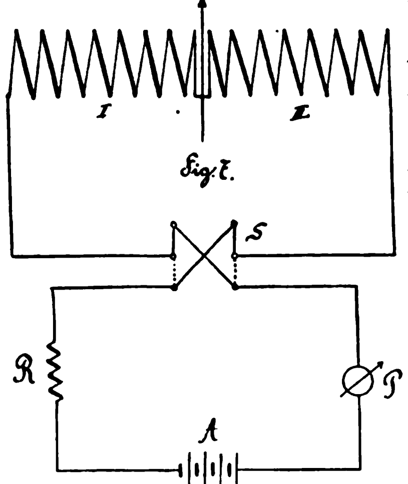
Magnetometer: Zur Ausmessung des Feldes der Spulen das folgende Instrument verwandt:

An einem dünnen Platinfaden *a* (vgl. Fig. 6), welcher an Kupferdraht *b* angelöthet war, hing ein schwerer Messing- von 117 mm Länge und $4^1/_2$ mm Durch- r. In dem unteren Ende von *c* war in ing des Durchmessers eine kleine Ver- g angebracht, in welcher der Magnet *d* halten wurde. Die Länge des kleinen eten betrug 5 mm, seine Höhe 1 mm eine Dicke 0,1 mm. Das Magnetometer in ein Glasrohr *e* eingeschlossen, dessen lt aus der Figur ersichtlich ist. Zur fung wurde die Röhre vollständig mit er gefüllt; ihr unteres Ende war durch Korkstopfen *f* verschlossen. Oben war Glasröhre durch ein Brettchen *h* ge- en, welches mittels dreier Schrauben ruhte (vgl. Fig. 5). Mit diesen drei uben konnte das System leicht justirt n. Die Orientirung des Magneten ge- durch den mit *b* fest verbundenen *g*. Durch den in dem Querstücke *e* lichen Schlitz (vgl. Figg. 4 und 5) wurde lasröhre in den Zwischenraum der bei- pulen eingelassen. Die Drehungen des eten wurden mittels Spiegelablesung be- tet. Zu diesem Zwecke war an dem oberen Ende des igstabes *c* ein Spiegel *i* befestigt. In gleicher Höhe mit em befand sich ein durch eine ebene Glasplatte ver- senes Fenster *k* in der Glasröhre.



§ 3. **Feldmessung.**

Nachdem die Nadel des Magnetometers genau in die richtige Lage gebracht war und durch Controlmessungen die Proportionalität zwischen Ausschlag und Feldstärke nachgewiesen war (ausführliche Beschreibung vgl. die Dissertation) wurde die Feldmessung folgendermaassen ausgeführt (die Schaltung ist in der Fig. 7 schematisch dargestellt):



Der Strom wurde der Accumulatorenbatterie *A* entnommen und durch den Widerstand *R* regulirt; durch den Stromwender *S* konnte seine Richtung gewechselt werden. Die Stromstärken wurden durch ein Präcisionsampèremeter *P* von Siemens und Halske gemessen, welches Ablesungen bis zur 3. Decimalen gestattete. Bei der Messung wurde der obere Schlitten, welcher die Spulen *I* und *II* trug, längs einer Millimetertheilung, welche auf dem unteren Schlitten angebracht war, in Richtung der x-Axe verschoben. Die Einstellungen erfolgten von 5 zu 5 mm. Bei jeder einzelnen Messung wurde der Strom commutirt. Die Entfernung der Scala vom Spiegel betrug 2600 mm.

In der folgenden Tabelle (vgl. p. 599) bedeutet a den Abstand von der Spulenaxe in Millimeter, n den Ausschlag in Scalentheilen (proportional den Feldstärken), i die Stromstärke in Ampère. In der letzten Verticalcolumne sind die Feldstärken in Procenten der maximalen, welche in der Axe statthat, ausgedrückt.

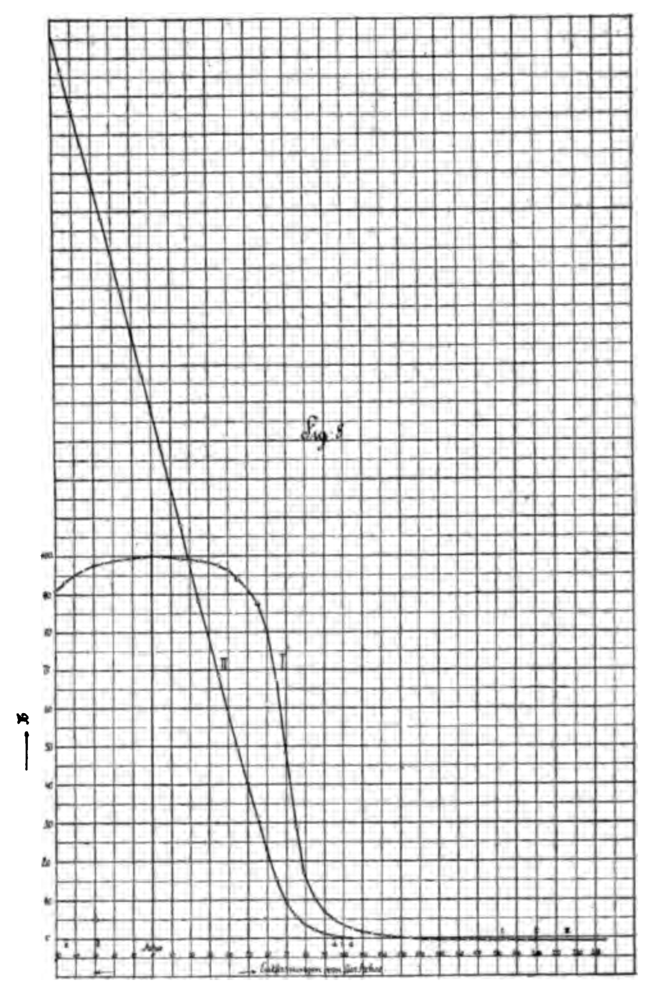
Das Resultat dieser Messung ist in der Fig. 8 graphisch dargestellt. Die Abstände von der Axe sind als Abscissen, die Feldstärken als Ordinaten aufgetragen (Curve I). Ein Blick auf die Curve zeigt, dass nur in der nächsten Umgebung der Axe das Feld mit einiger Annäherung als homogen angesehen

Tabelle.

a	n	i	$100\,\frac{H}{H_0}$	a	n	i	$100\,\frac{H}{H_0}$
−50	143,5	0,08	90,84	90	160,5	1,146	7,09
−45	147,0	0,08	93,04	95	181,0	1,90	4,8
−40	150,0	0,08	94,94	100	178,5	2,62	3,48
−35	152,0	0,08	96,20	105	124,0	2,61	2,39
−30	154,0	0,08	97,47	110	88,0	2,61	1,695
−25	155,0	0,08	98,10	115	60,0	2,61	1,16
−20	156,0	0,08	98,73	120	38,0	2,605	0,74
−15	156,5	0,08	99,04	125	21,5	2,60	0,47
−10	157,0	0,08	99,34	130	9,5	2,66	0,18
− 5	157,5	0,08	99,69	135	− 2,0	2,65	−0,038
± 0	188,0	0,0945	100	140	−11,0	2,665	−0,275
5	187,5	0,0945	99,75	145	−18,0	2,66	−0,34
10	187,0	0,0945	99,49	150	−23,5	2,66	−0,445
15	186,5	0,0945	99,25	155	−28,0	2,65	−0,531
20	185,5	0,094	99,19	160	−32	2,65	−0,607
25	185,0	0,094	98,89	165	−35	2,64	−0,667
30	184,0	0,094	98,44	170	−37,5	2,641	−0,715
35	182,5	0,094	97,64	175	−40,0	2,63	−0,765
40	180,0	0,094	96,28	180	−41,5	2,63	−0,793
45	176,5	0,0945	93,97	185	−42,5	2,62	−0,81
50	171,5	0,0945	91,25	190	−43,5	2,62	−0,835
55	164,0	0,094	87,7	195	−45,0	2,625	−0,863
60	151,0	0,0945	80,3	200	−45,5	2,61	−0,875
65	156,5	0,117	67,3	210	−47,5	2,615	−0,915
70	173,5	0,181	48,3	220	−47,0	2,605	−0,908
75	161,5	0,281	28,9	230	−47,5	2,60	−0,918
80	156,5	0,464	17,0	235	−47,0	2,60	−0,91
85	177,5	0,84	10,63				

werden darf. Schon in einer Entfernung von 6 cm von der Axe ist die Feldstärke um 20 Proc., in einer Entfernung von 7 cm sogar schon über 50 Proc. gesunken und nimmt weiter ab, bis die Curve etwa bei einem Axenabstande von 13,5 cm die x-Axe schneidet. Hier also ist die Feldstärke gleich Null; hier, wo die Kraftlinien sich ausserhalb der Spulen wieder schliessen, kehrt sie ihren Sinn um und verläuft dann in einer

Stärke von etwa 1 Proc. der maximalen Feldstärke weiter. Die Beobachtungen erstrecken sich bis zu einer Entfernung von 5 cm nach der einen und 23,5 cm nach der anderen Seite.



Der Messbereich konnte nicht weiter ausgedehnt werden, da hier durch die Dimensionen des Apparates eine Grenze gezogen war.

Es dürfte vielleicht auffallen, dass der Verlauf des Feldes zu beiden Seiten der Mittelstellung nicht ganz symmetrisch

ist. Abgesehen davon, dass diese Unterschiede sehr klein sind, sind sie auch für den vorliegenden Zweck gleichgültig, da es nur auf die Bestimmung des *thatsächlichen* Feldverlaufes ankommt. Die Ursache für diese Unsymmetrie dürfte wohl in der nicht ganz konaxialen Stellung der Spulen liegen. Mit Hülfe der auf diese Weise ermittelten Feldcurve wurden die in Gleichung (13—15) vorkommenden Doppelintegrale auf graphischem Wege bestimmt. (Das einfache Integral: $\int H\,d\,x$ ist in Fig. 8 durch die Curve II dargestellt.)

Aus den Dimensionen der Spule lässt sich die absolute Feldstärke für den Mittelpunkt der Axe berechnen nach der Formel[1]):

$$H = 0{,}4\,\pi\,n\,i\,\frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}\,.$$

n bedeutet die Windungszahl pro Centimeter, i die Stromstärke in Ampère, l die halbe Spulenlänge und a ihren Radius. Berechnet man einmal H_1, indem man eine fortlaufende Wickelung für beide Spulen annimmt, und dann die Feldstärke H_2 für eine Spule von der Länge, die der Breite des Zwischenraumes (18 mm, d. i. der Abstand der beiden innersten Windungen) entspricht, so ist $H_1 - H_2$ diejenige für die Mitte der Axe innerhalb des Spaltes ($H_{\max}$).

Die Rechnung ergab folgendes Resultat:

$$H_1 = 5{,}11 \quad \text{C.G.S.}$$
$$H_2 = 0{,}658 \ \text{C.G.S.}$$
$$H_{\max} = H_1 - H_2 = 4{,}452 \ \text{C.G.S. für den Strom } i = 1 \text{ Amp.}$$

Da Unregelmässigkeiten in der Bewickelung der Spulen, wie sie bei der Herstellung trotz aller Sorgfalt nicht ausgeschlossen werden konnten, einen wesentlichen Einfluss auf die Grösse der Feldstärke ausüben, so wurde noch eine absolute Feldmessung durch Vergleichung der Spulen mit einem einfachen Kreisstrom ausgeführt.[2])

Es ergab sich:

$$H_{\max} = 4{,}398.$$

1) F. Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik.

2) Ausführliche Beschreibung vgl. die Dissertation.

Dieser Werth unterscheidet sich von dem aus den Dimensionen der Spulen berechneten um 1,2 Proc. und soll allen weiteren Berechnungen zu Grunde gelegt werden.

§ 4. Ablenkung der Kathodenstrahlen.

a) Röhre und Anordnung.

Die bei den Versuchen über die magnetische Ablenkbarkeit benutzte Röhre hatte folgende Gestalt und Dimensionen:

An einen 9 cm langen Glascylinder *a* von 3 cm Durchmesser schloss sich eine engere Röhre *b* von 20 cm Länge und einem Durchmesser von 1,2 cm an. Ferner war an *b* ein Ansatzstück *c* angebracht, an welches noch ein rechtwinklig gebogenes Glasrohr *d* angeblasen war (vgl. Fig. 9). An den Enden von *b*, *c* und *d* befanden sich Glasschliffe. Die Röhre *b* diente zur Aufnahme der Kathode, welche aus einer kreisförmigen Kupferscheibe *e* bestand, deren Durchmesser 9 mm und Dicke 2,5 mm betrug. Sie war an einem Kupferdraht befestigt, der als Zuleitung diente und in die Röhre *f* eingekittet war.

Die Anode bestand aus einem 7,5 cm langen und 2,8 cm weiten Messingcylinder *g*. An seinem einen Ende war ein engeres 5,5 cm langes Messingrohr *h* angesetzt, welches in das Glasrohr *b* hineinragte. Vor der Endöffnung von *h* war ein dünner Draht *i* ausgespannt, dessen Schattenbild beobachtet wurde (vgl. Fig. 10). Die Zuleitung zur Anode geschah durch den Kupferdraht *k*, welcher in das Glasrohr *c* eingekittet war. Der Contact wurde durch ein Büschel dünner Drähte hergestellt, welche sich fest an das Messingrohr *h* anpressten.

Die Glasröhre *a* war durch eine starke, mit einer Millimetertheilung versehenen Platte verschlossen. Auf der der Röhre zugewandten Seite war die Platte mit einer dünnen Kreideschicht bestrichen, welche beim Auftreffen der Kathodenstrahlen roth aufleuchtet. Um die Theilung sichtbar zu machen, wurde die Kreide mit einer feinen Nadel aus den Theilstrichen entfernt, in der Erwartung, dass die so freigelegten Theilstriche sich von den fluorescirenden Kreidegrunde dunkel abheben würden. Ueberraschenderweise erschienen jedoch die Theil-

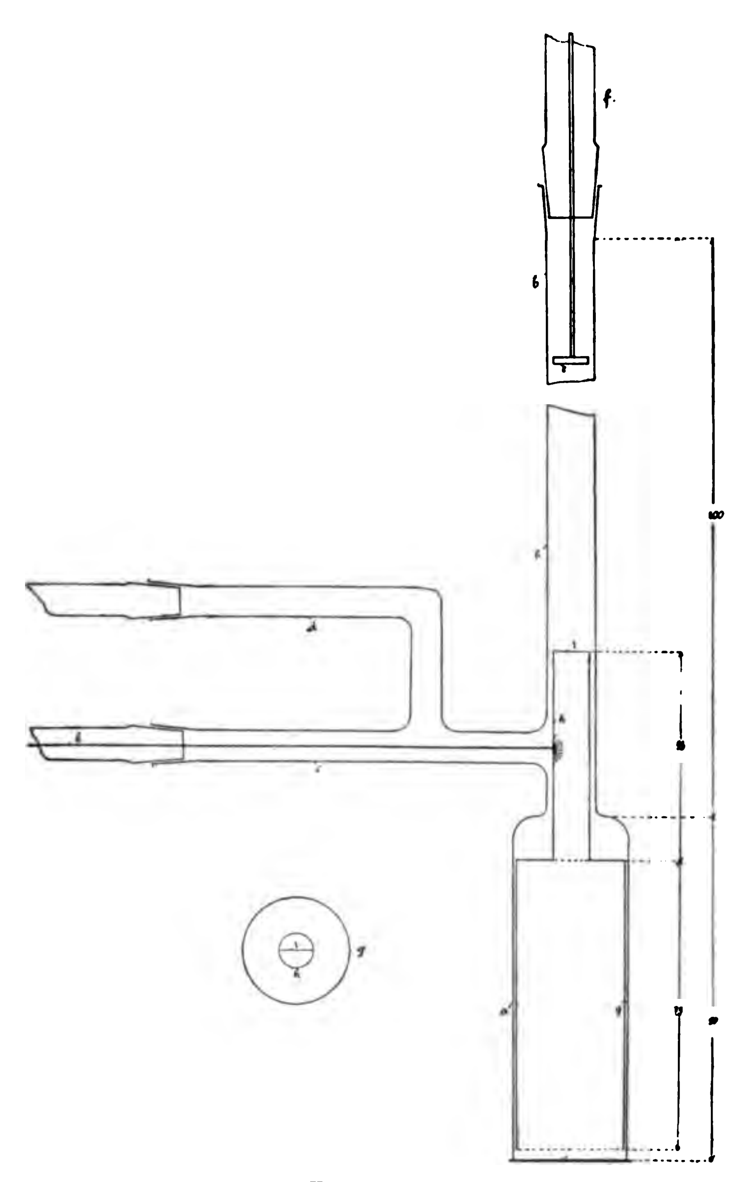


Fig. 9 u. 10.

triche hellroth leuchtend gegen den matter leuchtenden Kreide-
intergrund. Die Erscheinung beruhte wohl auf einem ganz

analogen Vorgang, wie die kürzlich durch Hrn. Martens[1]) wieder in die Praxis eingeführte Methode zur Beleuchtung von Scalenstrichen.

Wie schon eingangs (p. 589) erwähnt, lehnt sich die Versuchsanordnung an diejenige von Kaufmann an: Von dem negativen Pole einer Influenzmaschine *I*, welche durch einen Elektromotor angetrieben wurde, führte über eine Wippe *B* eine Leitung zu einem Braun'schen Elektrometer *E*, von hier zur Kathode.

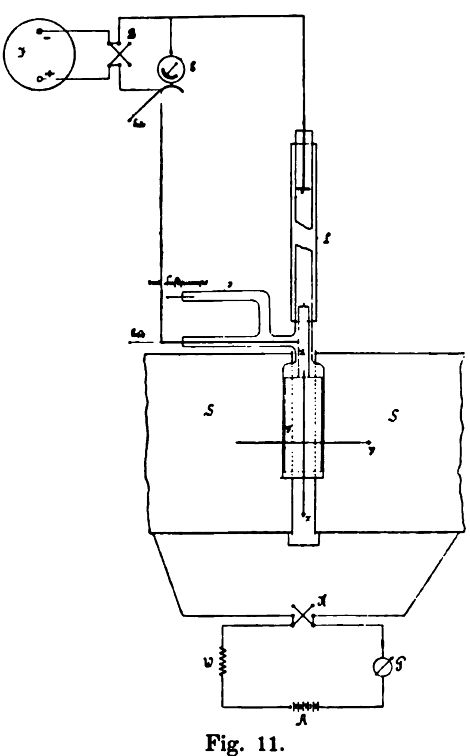


Fig. 11.

Der positive Pol der Maschine war durch die Wippe mit dem Gestell des Elektrometers und der Anode verbunden. Derselbe war zur Erde abgeleitet, sodass innerhalb des die Anode bildenden Cylinders das Potential Null vorhanden war.

Durch das Ansatzstück *d* war die Röhre mit einer automatisch wirkenden Quecksilberluftpumpe verbunden. Der Gasdruck — es wurde nur Luft verwandt — wurde nicht gemessen, da dies für die vorliegende Aufgabe ohne Belang war. Das Elektrometer wurde mit einer Hochspannungsbatterie bis 4300 Volt und für höhere Spannungen mittels einer elektrostatischen Waage geaicht. Für die Ausführung dieser Aichung bin ich Hrn. Dr. phil. A. Orgler[2]) zu grossem Danke verpflichtet. Die Lage der Röhre innerhalb

1) F. F. Martens, Wied. Ann. **62.** p. 206—208. 1897.

2) A. Orgler, Inaug.-Diss. Berlin 1899.

der Spulen, sowie die Gesammtanordnung ist aus der Zeichnung (Fig. 11) zu ersehen. Die Ablenkungen, welche die Kathodenstrahlen bei Erregung des Feldes (auch bei commutirtem Strom) erfahren, werden durch das Schattenbild des Anodendrahtes an der Theilung abgelesen; gleichzeitig wird Potential und Stromstärke bestimmt. Bei den Versuchen wurde darauf geachtet, dass die Ablenkungen im allgemeinen nicht grösser waren als 1 cm, da bei grösseren Ablenkungen die oben angeführten angenäherten Rechnungen ihre Gültigkeit verlieren.

b) Orientirung der Kathodenröhre.

Die richtige Lage der Röhre ist dadurch charakterisirt dass der Weg der unabgelenkten Strahlen mit der Richtung der x-Axe zusammenfällt und ausserdem senkrecht zur Richtung der Kraftlinien (y-Axe) verläuft. Da die Richtung der Kathodenstrahlen innerhalb der Röhre nicht von vornherein genau bestimmbar war, so wurde dieselbe durch einen Vorversuch festgestellt, und dann die Röhre in solcher Höhe zwischen den Spulen befestigt, dass die Verbindungslinie der Mitte der Kathode und des Schattenbildes des Anodendrahtes mit der x-Axe zusammenfiel. Die zweite Bedingung war durch die Anordnung der Spulen und des die Röhre tragenden hölzernen Auflagers ohne weiteres erfüllt.

Die Orientirung des Drahtes der Anode und der Kathode in dem Magnetfelde, deren Lage zu einander nach den p. 594 entwickelten Betrachtungen gegeben war, sowie die Bestimmung der Länge des von den Strahlen zurückgelegten Weges mussten mit der grössten Genauigkeit vorgenommen werden.

Kleine Unregelmässigkeiten bei diesen Bestimmungen, besonders bei derjenigen der Länge der durchlaufenen Bahn — die Ablenkung ändert sich ja ungefähr mit dem Quadrate der Weglänge — beeinflussen das Resultat schon recht erheblich. Die Bestimmungen geschahen dioptrisch und resultirten aus einer grossen Anzahl von Einzelmessungen.

c) Correctionsbetrachtung.

Bevor zur endgültigen Berechnung von ε/μ geschritten werden konnte, war es noch nöthig, die folgende Betrachtung

anzustellen, auf Grund deren eine Correction des Resultates von vornherein nicht ausgeschlossen war.

Stellt in der Fig. 12 die Strecke $a—b'$ den Verlauf des unabgelenkten, $a—b$ denjenigen des abgelenkten Strahles dar, so ist ersichtlich, dass in jedem Punkte von $a—b$ eine andere Feldstärke herrscht als in den Projectionen dieser Punkte auf die x-Axe, für welche ja das Feld bestimmt worden ist. Für den abgelenkten Strahl wird also der Feldverlauf ein anderer sein, als der nach der Feldmessung ermittelte, und es ist zu untersuchen, inwieweit dieser Umstand geeignet ist, eine Modification des Resultates herbeizuführen.

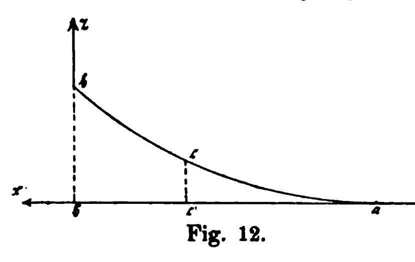


Fig. 12.

Die angenäherte Bahngleichung für den abgelenkten Strahl lautet:

$$z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2 \mu V_0}} \cdot \int_0^{x_0} d x \int_0^{x} H d x .$$

Für die in Tab. I (vgl. w. u.) mitgetheilten Ablenkungsversuche ergiebt sich als Mittelwerth der abgelesenen Ablenkungen: $z = 0{,}815$ cm. — Von diesem Werthe ausgehend, wurde Punkt für Punkt die angenäherte Bahn des abgelenkten Strahles construirt. Damit erhält man für jeden Punkt der Bahn die Grösse der Ablenkung, und es lässt sich dann die Feldstärke für jede einzelne Stelle bestimmen. Aus der Fig. 13 ist ersichtlich, auf welche Weise dies zu geschehen hat. Der Punkt o stellt den Mittelpunkt des Durchmessers der Spulen, also

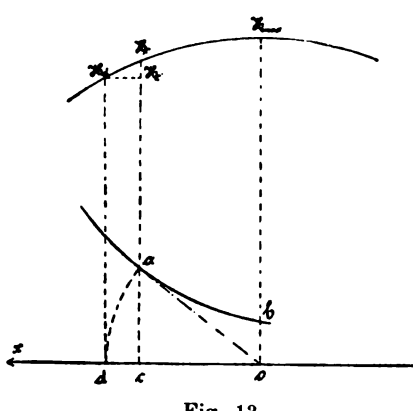


Fig. 13.

einen Punkt ihrer Axe dar, wo die maximale Feldstärke H_{max} herrscht, a—b ein Stück der abgelenkten Bahn. Beschreibt man um o als Mittelpunkt mit oa als Radius einen Kreis, so trifft derselbe die x-Axe in d. Die diesem Punkte entsprechende Ordinate H_d der Feldcurve giebt die Feldstärke an, welche im Punkte a der Bahn vorhanden ist. Für den Punkt a ergiebt sich also eine Feldstärke $H_{c'}$.

Auf diese Weise erhält man, punktweise construirbar, den corrigirten Feldverlauf. Führt man nun für die so erhaltene Feldcurve die Construction derjenigen von $\int H\,dx$ aus, so ergiebt sich, dass dieselbe von der anderen nur so wenig abweicht, dass dieser Unterschied vernachlässigt werden kann. Wählt man z. B. einen Punkt a der Bahn, für welchen $oc = 3$ cm, so ist die Ablenkung ca an diesem Punkte gleich 0,523 cm. Das ergiebt für cd eine Länge von 0,04 cm, woraus sich eine Correction des Feldwerthes von nur $-0{,}05$ Proc. ergiebt. In einer Entfernung von 7 cm von der Axe ist $ca = 0{,}229$ cm; dann erhält man für cd den Werth 0,004 cm und eine entsprechende Feldcorrection von etwa $-0{,}3$ Proc. Da jedoch die Correction diesen relativ hohen Werth nur im Anfange der Bahn besitzt, d. h. auf einer Strecke, welche zu dem nachher zu ermittelnden Integral $H\,dx$ nur einen sehr kleinen Bruchtheil beiträgt, so ergiebt sich mit Leichtigkeit, dass die Gesammtcorrection jedenfalls weniger als 0,1 Proc. beträgt. Dieses sehr günstige Ergebniss ist nicht etwa einem Zufall zu verdanken, sondern der besonderen Anordnung der Röhre. An den Stellen nämlich, wo das Feld sehr schnell veränderlich ist, sind die Ablenkungen des Strahles sehr klein, während gegen das Ende der Strahlenbahn hin, wo die Ablenkungen grösser sind, das Feld nahezu constant ist.

d) Messungen und Berechnung von e/μ.

In den Tabellen bedeutet z_0 den abgelesenen, z_0' den nach Gleichung (14) reducirten Werth der Ablenkung in Centimetern, J den Spulenstrom in Ampère, V_0 das Potential in Volt. In der vorletzten Columne sind die Werthe von $z_0'^2\,V_0/J^2$ zusammengestellt, und in der letzten die Abweichungen derselben von dem Mittelwerthe in Procenten (δ %).

Tabelle I.

Entfernung des Drahtes der Anode von der Spulenaxe: 104 mm (Punkt a in Fig. 8)[1]), Entfernung der Kathode von der Axe: 182 mm (Punkt I) ; Entfernung der Verschlussplatte von der Axe: 29 mm. Folglich Länge der Strahlenbahn zwischen Anodendraht und Schlussplatte (a—b) = 133 mm.

V_0	J	x_0	x_0^2	$x_0'^2$	$\frac{x_0'^2 V_0}{J^2}$	δ %[2])
5910	1,088	0,94	0,885	0,853	4250	−2,9
6260	1,054	0,90	0,810	0,783	4400	+0,5
6560	1,087	0,895	0,800	0,774	4280	−2,3
6840	1,05	0,86	0,74	0,717	4440	+1,4
6900	1,087	0,885	0,783	0,758	4420	+0,9
7170	1,058	0,84	0,706	0,684	4380	0
7300	1,076	0,845	0,714	0,693	4360	−0,4
7300	1,076	0,845	0,714	0,693	4360	−0,4
7650	1,06	0,815	0,664	0,645	4380	0
7710	1,06	0,805	0,648	0,631	4325	−1,2
7710	1,059	0,81	0,656	0,638	4375	0
7710	1,059	0,815	0,664	0,645	4430	+1,2
7710	1,058	0,81	0,656	0,638	4400	+0,5
7760	1,058	0,805	0,648	0,631	4375	0
7830	1,058	0,81	0,656	0,638	4460	+1,8
7830	1,056	0,805	0,648	0,631	4425	+1,0
7890	1,057	0,805	0,648	0,631	4450	+1,6
7950	1,072	0,8	0,64	0,623	4310	−1,6
8000	1,07	0,795	0,632	0,615	4290	−2,0
8000	1,053	0,79	0,624	0,609	4390	+0,3
8240	1,042	0,78	0,608	0,593	4470	+2
8300	1,11	0,825	0,68	0,661	4440	+1,4
8300	1,071	0,79	0,624	0,609	4400	+0,5
8530	1,036	0,75	0,56	0,547	4340	−0,9
8750	1,087	0,775	0,60	0,586	4330	−1,1
8850	1,078	0,765	0,586	0,572	4340	−0,9
8860	0,982	0,705	0,497	0,487	4460	+1,8
8930	0,972	0,685	0,469	0,46	4325	−1,2

1) Diese Stellung entspricht der p. 594 gegebenen Bedingung, dass das Integral $\int_a^I H\,dx = 0$ ist (vgl. Fig. 8).

2) Der etwas grössere Betrag der Abweichungen gegenüber der Kaufmann'schen Messungen folgt daraus, das obige Tabelle $x_0'^2 V_0/J^2$ enthält, während bei Kaufmann die Quadratwurzel dieser Grösse angegeben ist.

Als Mittelwerth für $z_0'^2 \, V_0/J^2$ erhält man: 4378,75.
Die Rechnung ergiebt dann:

$$\frac{e}{\mu} = 1{,}868 \, . \, 10^7 \text{ C.G.S.-Einheiten.}$$

Tabelle II.

Die Kathodenröhre hat dieselbe Lage, wie bei dem ersten Versuche. Die Anode wurde jedoch um 0,5 cm verschoben, sodass ihre Entfernung vom Spulenrande nur noch 99 mm betrug (Punkt *c* in der Zeichnung). Die entsprechende Stellung der Kathode ist in der Zeichnung durch die Zahl II markirt, und ihre Entfernung von der Spulenaxe betrug 200 mm; die Strahlenbahn *c*—*b* hat bei dieser Anordnung eine Länge von 128 mm.

V_0	J	z_0	z_0^2	$z_0'^2$	$\frac{z_0'^2 V_0}{J^2}$	δ %
6560	1,117	0,915	0,84	0,811	4260	−1,8
7830	1,117	0,85	0,72	0,698	4380	+0,9
8580	1,117	0,795	0,63	0,613	4220	−2,7
8860	1,117	0,78	0,61	0,594	4210	−3,0
9110	1,117	0,785	0,615	0,6	4370	+0,7
9180	1,117	0,78	0,61	0,594	4355	+0,4
9640	1,117	0,755	0,57	0,556	4290	−1,1
10290	1,119	0,725	0,525	0,514	4225	−2,6
10820	1,117	0,715	0,51	0,50	4330	−0,2
10820	1,117	0,71	0,505	0,494	4280	−1,4
11100	1,118	0,70	0,49	0,48	4260	−1,8
11180	1,113	0,705	0,496	0,486	4380	+0,9
11180	1,117	0,71	0,505	0,494	4420	+1,9
11320	1,113	0,70	0,49	0,48	4380	+0,9
11400	1,119	0,70	0,49	0,48	4370	+0,7
11400	1,118	0,705	0,496	0,486	4430	+2,1
11480	1,114	0,695	0,484	0,474	4380	+0,9
11480	1,12	0,695	0,484	0,474	4340	0
11480	1,118	0,70	0,49	0,48	4410	+1,6
11520	1,115	0,70	0,49	0,48	4440	+2,3
11520	1,117	0,69	0,475	0,466	4300	−0,9
11520	1,12	0,69	0,475	0,466	4270	−1,6
11520	1,12	0,70	0,49	0,48	4400	+1,4
11520	1,12	0,70	0,49	0,48	4400	+1,4
11520	1,119	0,695	0,484	0,474	4360	+0,5
11600	1,118	0,69	0,475	0,466	4320	−0,4
11600	1,117	0,695	0,484	0,474	4400	+1,4
11660	1,117	0,685	0,47	0,46	4300	−0,9

Aus dieser Beobachtungsreihe ergiebt sich als Mittelwerth von $z'^2_0 V_0/J^2$: 4338,6 und es wird:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = 1,866 \cdot 10^7 \text{ C.G.S.-Einheiten.}$$

Tabelle III.

Bei dem dritten Versuche schliesslich wurde sowohl die Röhre als auch die Anode verschoben. Der Draht der Anode befand sich diesmal in einer Entfernung von 95,5 mm von der Spulenaxe (Punkt *d* in der Figur). Dementsprechend war die Kathode 215,5 mm von der Axe entfernt (III). Die Entfernung der Verschlussplatte (*e*) von der Axe war in diesem Falle 45 mm. Folglich hatte der von den Strahlen zwischen Anodendraht und Verschlussplatte zurückgelegte Weg *d*—*e* eine Länge von 140,5 mm.

V_0	J	z_0	z_0^2	z'^2_0	$\frac{z'^2_0 V_0}{J^2}$	δ %
4860	0,860	1,09	1,190	1,148	7560	−2,6
4980	0,851	1,075	1,156	1,120	7730	−0,4
5660	0,855	1,01	1,02	0,99	7680	−1,0
5660	0,85	1,015	1,03	1,00	7850	+1,1
6090	0,85	0,96	0,922	0,897	7570	−2,5
6210	0,862	0,96	0,922	0,897	7500	−3,3
6560	0,84	0,93	0,865	0,843	7850	+1,1
6560	0,865	0,95	0,903	0,879	7700	−0,8
6560	0,861	0,95	0,903	0,879	7800	+0,5
7110	0,858	0,92	0,846	0,825	7990	+2,9
7700	0,845	0,855	0,732	0,717	7740	−0,3
8000	1,15	1,145	1,311	1,260	7630	−1,7
8180	0,838	0,83	0,69	0,676	7900	+1,8
8850	0,85	0,815	0,664	0,652	8000	+3,1
8850	0,85	0,81	0,656	0,644	7900	+1,8
8850	0,85	0,81	0,656	0,644	7900	+1,8
9240	1,14	1,045	1,092	1,057	7520	−3,1
10820	1,149	0,99	0,980	0,952	7820	+0,8
11530	1,172	0,99	0,980	0,952	8000	+3,1
11840	1,149	0,93	0,865	0,843	7570	−2,5

Der Mittelwerth von $z'^2_0 V_0/J^2$ ist 7760,5. Es ergiebt sich:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = 1,860 \cdot 10^7 \text{ C.G.S.-Einheiten.}$$

Die erste und dritte Messung haben die grösste Abweichung von 0,43 Proc., die erste und zweite nur eine solche von 0,1 Proc. Als Mittelwerth der drei Resultate erhält man:

$$\frac{e}{\mu} = 1{,}865 \,.\, 10^7 \text{ C.G.S.-Einheiten.}$$

Zum Schlusse spreche ich Hrn. Dr. Kaufmann, der mir die Anregung zu dieser Arbeit gab und mir bei der Ausführung derselben in der ausgiebigsten Weise mit Rath und That behülflich war, meinen besten Dank aus.

(Eingegangen 25. August 1899.)

4. *Zur Messung elektrischer Grössen bei periodisch veränderlichen Strömen; von C. Heinke.*

Neben dem stationären Gleichstrom und dem durch Dynamos erzeugten symmetrischen Wechselstrom, deren Ausgleicherscheinungen in allen wesentlichen Punkten als geklärt gelten können, nimmt gegenwärtig ein periodisch veränderlicher Ausgleichvorgang das Interesse in Anspruch, welcher aus gleichgespannten Stromquellen mit Hülfe von sogenannten Unterbrechern irgend welcher Art hervorgerufen wird. Diese zwar schon lange bei den Primärkreisen der Inductorien praktisch verwendete, aber noch nicht hinreichend messtechnisch untersuchte elektrische Ausgleichform tritt jetzt bei Gelegenheit der Untersuchungen über den sogenannten elektrolytischen Unterbrecher von Wehnelt und den daraus abgeleiteten Formen[1]) mehr in den Vordergrund und lässt eine Klärung der messtechnischen Seite um so dringender erscheinen, als vermuthlich nicht nur bei den hier auftretenden Gasentladungen, sondern auch bei den meisten übrigen mit Gasentladungen verbundenen elektrischen Ausgleichvorgängen die Hauptausgleichgrössen, d. i. Stromstärke und Spannung, sowohl bezüglich ihrer Einzelmessung, als auch hinsichtlich ihres Verhältnisses zu der in Frage kommenden elektrischen Energie bez. Leistung (Effect) analoge Verhältnisse aufweisen werden.

Als Beweis dafür, dass messtechnisch eine Klärung erforderlich ist, mag nur auf die verschiedenen Publicationen über den Wehneltunterbrecher verwiesen werden. Auf Grund des Verhaltens der Messinstrumente wird — allerdings ohne durchgreifende Begründung — von den meisten Autoren die Messung der Ausgleichgrössen (Spannung und Strom) nur durch quadratisch wirkende, d. h. effective Mittelwerthe anzeigende

---

1) H. Th. Simon, Wied. Ann. 68. p. 860. 1899.

Messinstrumente (dynamometrische, elektrometrische und Hitzdrahtinstrumente) für zulässig erklärt; demgegenüber misst Ruhmer[1]) in seiner werthvollen Arbeit „Ueber den Einfluss der Temperatur des Elektrolyten" die Stromstärke mit der Tangentenboussole, d. h. voltametrisch. An anderer Stelle[2]) erfolgt die Stromstärkemessung mittels Hitzdrahtinstrumentes effectiv, trotzdem wird die so gemessene mittlere Stromstärke zur Berechnung des zu erwartenden Gasvolumens nach dem Faraday'schen Gesetz benutzt, welches offenbar den voltametrischen (galvanometrischen) Mittelwerth verlangen würde etc.

Diese Unsicherheit ist jedenfalls darauf zurückzuführen, dass im vorliegenden Fall sowohl Gleichstrominstrumente als Wechselstrominstrumente Angaben machen, welche einen gewissen Sinn besitzen und ausserdem vielfach nicht sehr erheblich voneinander abweichen. Obwohl auch bei der Messung von symmetrischem Wechselstrom, d. h. Maschinenstrom, bei welchem Spannungscurven und Stromcurven trotz beliebiger Abweichung von der Sinuswelle doch symmetrisch zum Nullniveau liegen und bei Coordinatendarstellung die zwischen Curve und der das Nullniveau bezeichnenden Abscissenaxe eingeschlossenen Flächen positiv und negativ gleich gross sind, eine derartige Zweideutigkeit auch auftrat bez. noch auftritt, so wiesen doch hier die Messinstrumente in ihrem Verhalten deutlich auf die Lösung hin, insofern nur die technischen Weicheiseninstrumente, sowie bei Spannungsmessungen die stromverbrauchenden und ausserdem mit selbstinductionshaltigen Wickelungen versehenen Messinstrumente, noch keine eindeutigen, d. h. von der Wechselzahl unabhängigen Angaben lieferten, was sich bei Strommessungen durch die Hysteresiseigenschaften des Eisens, bei Spannungsmessungen durch die Selbstinduction ihrer Wickelung eventuell in Verbindung mit jenen magnetischen Erscheinungen erklärte. Alle übrigen Messinstrumente, d. h. die eisenfreien, sowie für Spannungsmessungen die praktisch hinreichend selbstinductionsfreien, waren aber entweder quadratisch wirkende Messinstrumente, d. h. sie wurden in jedem Moment von dem Quadrat des

1) E. Ruhmer, Elektrotechn. Zeitschr. **20.** p. 457. 1899.

2) A. Voller u. B. Walter, Wied. Ann. **68.** p. 532. 1899.

Momentanwerthes der Messgrösse angetrieben (Dynamometer, Elektrometer und Hitzdrahtinstrumente) und maassen infolge des mechanischen Trägheitsmomentes ihrer schwingenden Zeigermassen den sogenannten effectiven, d. h. für die elektrische Leistung in Frage kommenden oder wirksamen Mittelwerth der Spannung

$$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2\,dt},$$

bez. der Stromstärke

$$J = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt},$$

wenn e und i den momentanen Spannungs- bez. Stromwerth bezeichnet und T die Zeit einer Periode, oder es waren einfach wirkende Messinstrumente mit zwei contrastirenden Feldern, von denen der eine Feldfactor in der auf seine Feldaxe bezogenen Grösse constant blieb (Galvanometer, Tangentenboussole, Weston- und D'Arsonvalinstrumente), sodass die veränderlichen Momentanwerthe der Messgrösse den vom Instrument zur Anzeige gelangenden Mittelwerth

$$E' = \frac{1}{t}\int_0^t e\,dt \quad \text{bez.} \quad J' = \frac{1}{t}\int_0^t i\,dt$$

lieferten.

Bei symmetrischem Wechselstrom mit hinreichend kleiner Periode, wie dem technisch gebräuchlichen, führt dies auf den algebraischen Mittelwerth Null, d. h. Unbrauchbarkeit derartiger Messinstrumente, falls keine regelmässige Commutirung der einen Curvenhälfte erfolgt; im letzteren Falle wird der voltametrische (galvanometrische) Mittelwerth jedes Wechsels (Curvenhälfte) zu J' angezeigt (einfaches Flächenintegral, vgl. Fig. 1), während die quadratisch wirkenden Messinstrumente den obigen Mittelwerth $J = f \,.\, J'$ anzeigen, wenn f den Formfactor

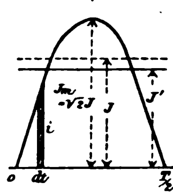


Fig. 1.

der Curve bezeichnet, der für Sinuswelle den Werth 1,11 annimmt.[1])

Sobald man es nun mit elektrischen Ausgleichgrössen zu thun hat, bei denen einerseits periodischer Verlauf, andererseits Fehlen der Symmetrie des Curvenverlaufes gegenüber dem Nullniveau vorliegt, so werden beide Arten Messinstrumente — die technischen Weicheiseninstrumente, sowie die übrigen in ihren Angaben von der secundlichen Periodenzahl n oder allgemein von dem aus der ersten Ableitung nach der Zeit $(di/dt) = J.p$ sich ergebenden Factor $p = c.n$, wenn

$$c = 4\frac{J_m}{J'} = 4f\frac{J_m}{J},$$

praktisch abhängigen Messinstrumente seien hier überhaupt nicht weiter berücksichtigt, — Angaben machen, welche einen bestimmten Sinn geben und ausserdem in energetischer (effectiver) Beziehung eine wichtige Zerlegung gestatten. Die bei graphischer (Coordinaten-) Darstellung den zeitlichen Verlauf der momentanen Spannungs- und Stromstärkenwerthe darstellenden Curven mögen sowohl in Form, als auch in ihrer Lage zur Abscissenaxe (Nullniveau) beliebig gestaltet sein, jedoch continuirlich und *periodisch* verlaufen. Die Angaben der Messinstrumente mit *effectiven* Mittelwerthen J_w bez. E_w werden alsdann stets grösser — im Grenzfall höchstens gleich gross — sein als die Angaben der Messinstrumente mit galvanometrischem Mittelwerth J_g bez. E_g, doch werden die letzteren im allgemeinen nicht Null, sondern einen ganz bestimmten Ausschlag

$$J_g = \frac{1}{T}\int_0^T i\,dt$$

zeigen — vorausgesetzt, dass die Periodenzahl in der Secunde nicht so klein ist, dass die Instrumente theilweise folgen, in welchem Fall der Mittelwerth, oder richtiger der Schwerpunktswerth zwischen den Grenzlagen des Zeigers einzusetzen wäre. — Jener Ausschlag von J_g bez. E_g kann als das Gleichstrom-

1) Näheres vgl. in des Verfassers bei S. Hirzel in Leipzig erschienenen „Wechselstrommessungen und magnetische Messungen“ §§ 6 und 7, dem auch Fig. 1 entnommen.

bez. Gleichspannungsniveau jener einseitig periodischen Ausgleichgrössen angesehen werden, dem ein Wechselglied aufgelagert ist, das im allgemeinen zwar nicht symmetrisch gestaltet sein wird, aber für die meisten, namentlich alle energetisch (effectiv) in Frage kommenden Zwecke durch einen äquivalenten effectiven Mittelwerth ausdrückbar ist. Dieses *periodische* Wechselglied im elektrischen Ausgleichvorgang kann, zwar nicht hinsichtlich der Maximalwerthe, aber sonst aller übrigen, letzterwähnten Zwecke durch eine äquivalente Wechselstrom- bez. Wechselspannungscomponente mit dem für analytische Behandlung zu Grunde gelegten Sinusverlauf ersetzt gedacht werden, wie die Messungen des Verfassers gezeigt haben.

Wegen der nach dieser Richtung zulässigen Auflösung jedes unsymmetrisch periodisch veränderlichen Ausgleichvorganges in ein Gleichstromniveau mit aufgelagertem Wechselstrom möchte ich[1]) für derartige elektrische Ausgleichvorgänge die Bezeichnung „Wellenstrom" vorschlagen, die auch hier der Küzre halber beibehalten sei. Die Wellenstromverhältnisse werden ähnlich wie hinsichtlich der Messgrössen auch in den erforderlichen Messinstrumenten gleichsam den allgemeinen Fall darstellen gegenüber Gleichstrom und symmetrischem Wechselstrom: während nämlich bei Gleichstrom beide Arten Messinstrumente, d. h. jederzeit die mit effectiven und die mit voltametrischen (galvanometrischen) Mittelwerthen, gleiche Angaben machen, mithin nur eines der einen *oder* der andern Art für jede Ausgleichgrösse (Stromstärke bez. Spannung) erforderlich ist, und bei Wechselstrom (d. h. technischem bez. symmetrischem)

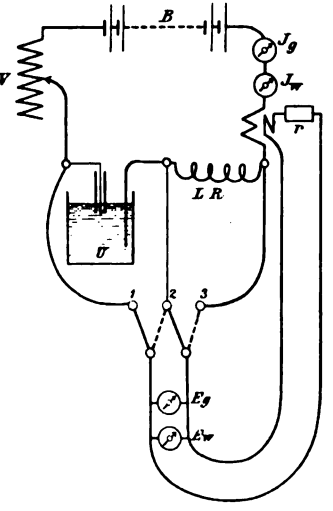


Fig. 2.[2])

1) C. Heinke, Elektrotechn. Zeitschr. 20. p. 511. 1899.
2) Vgl. C. Heinke, l. c. Fig. 11.

nur die effectiven Messinstrumente benutzbar sind, weil nur sie Angaben machen, werden bei Wellenstrom beide Arten Messinstrumente voneinander abweichende Angaben machen, welche jedoch beide nicht nur einen Sinn geben, sondern zu einer vollständigeren Charakterisirung des Ausgleichvorganges sogar erforderlich sind.

Die mit der in Fig. 2 angedeuteten Messanordnung bei Wellenstrom durchgeführten Messungen lieferten durch J_g das vorhandene Gleichstromniveau, durch J_w den effectiven Mittelwerth der Wellenstromstärke, woraus der auf J_g aufgelagerte *äquivalente* Wechselstrom $J_\sim$, gleichfalls effectiv gemessen, sich zu

$$J_\sim = \sqrt{(J_w)^2 - (J_g)^2}$$

ergab, denn da die momentane Wellenstromstärke i_w durch

$$i_w = J_g + (\sqrt{2}\, J_\sim) \sin \alpha$$

dargestellt ist, so zeigt das galvanometrische Instrument, wenn $T = 2\pi$ die Periodenzeit bezeichnet, den Werth

$$\frac{1}{T}\int_0^T i_w \,.\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (J_g + \sqrt{2}\, J_\sim \sin \alpha)\, d\alpha = J_g,$$

hingegen das effectiv messende Instrument mit quadratischen Momentanwirkungen, wie z. B. hier das Hitzdrahtinstrument

$$\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (i_w)^2 . \, dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (J_g + \sqrt{2}\, J_\sim \sin \alpha)^2\, d\alpha}$$

$$= \sqrt{(J_g)^2 + (J_\sim)^2} = J_w .$$

In analoger Weise liefern die Spannungsmesser E_w und E_g die zwischen zwei Punkten des Stromkreises bestehende effective Wellenspannung E_w und das zwischen denselben Punkten vorhandene Gleichspannungsniveau E_g, woraus die aufgelagerte *äquivalente effective* Wechselspannung sich zu

$$E_\sim = \sqrt{(E_w)^2 - (E_g)^2}$$

ergiebt.

Für die Messung von J_g, namentlich aber von E_g, wäre noch zu bemerken, dass für ein symmetrisch zu dem wahren

galvanometrischen Mittel (Gleichstromniveau) liegendes Wechselglied, gleichgültig ob die Curve dem Sinusgesetz folgt oder nicht, die etwaige Selbstinduction der benutzten galvanometrischen Messinstrumente ohne Belang für ihre Angaben ist. Sind jedoch die oberhalb und unterhalb des wahren Gleichstromniveaus liegenden Curventheile jeder Periode sehr stark unsymmetrisch, sodass bei

$$\frac{dJ}{dt} = J_{\sim}.p \quad \text{bez.} \quad \frac{dE}{dt} = E_{\sim}.p'$$

der Werth p bez. p' für die obere und untere Curvenhälfte des Wechselgliedes sehr verschiedene Werthe aufweist, so würde eine merkliche Selbstinduction des galvanometrischen Messinstrumentes veranlassen, dass der von ihm angezeigte Werth J_g bez. E_g nicht das wahre galvanometrische Mittel wäre, sondern etwas nach der Seite der Curvenhälfte mit dem kleineren Werth von p zu verschoben. Da bei dem im vorliegenden Fall zur Messung von E_g benutzten Präcisions-Westoninstrument von dem gesammten, über 12000 Ω-betragenden Widerstand mehr als 12000 Ω bifilar gewickelt sind und nur das bewegliche System mit etwa 60 Windungen und annähernd der gleichen Anzahl Ohm einen verhältnissmässig kleinen Selbstinductionscoefficienten besitzt, so können seine Angaben auch bei extremer Unsymmetrie des Wechselgliedes nicht merklich von dem wahren galvanometrischen Mittelwerth abweichen. Bei den mit Nebenschluss arbeitenden Ampèremetern ist eher eine kleine Abweichung in extremen Fällen zu befürchten, sodass dieselben bei kleiner secundlicher Periodenzahl beim Wehneltunterbrecher Angaben machen können, die ein wenig oberhalb des wahren Gleichstromniveaus liegen. Eine Controle bez. Berichtigung dieser vermuthlich auch nur geringen Abweichungen wäre durch gleichzeitige Messung von J_g mit einem die volle Stromstärke führenden galvanometrischen Messinstrument, z. B. Tangentenboussole, möglich. Eine derartige, allerdings an einer rotirenden Unterbrechervorrichtung vorgenommene Controlmessung lieferte keine die Messfehlergrenzen überschreitende Abweichung zwischen den Angaben beider.

Wichtig, ja für die Zulässigkeit und den praktischen

Nutzen der so gewonnenen Wechselcomponenten geradezu entscheidend, ist die Frage, ob dieselben mit den energetischen Messungen in Einklang stehen, sowie damit in Zusammenhang, ob ihre Verwerthung im Polardiagramm, wie es zur Darstellung der periodisch veränderlichen Grössen und ihrer gegenseitigen Beziehungen in der Wechselstromtechnik mit Vortheil benutzt zu werden pflegt, eine Probe liefert, die befriedigt. Dieses experimentum crucis fällt nun durchweg bestätigend aus, soweit man es mit Rücksicht auf die Messfehlergrenzen nur erwarten kann. Die Art des Vorgehens für die Auswerthung, sowie die Vornahme jener Probe möge in Verbindung mit den für Wellenstrom wichtigen energetischen Verhältnissen, namentlich der Messung von Wellenstromleistung, an einem Beispiel im einzelnen erläutert werden (bezüglich weiteren Zahlenmateriales aus den durchgeführten Messungen sei auf die Aufsätze an anderer Stelle:[1]) „Ueber Wellenströme", sowie auf einen später erscheinenden Aufsatz „Ueber Wellenstromerreger" verwiesen).

Wie die Skizze der Fig. 2 erkennen lässt, ist in dem Hauptstromkreise in Serie mit den Ampèremetern J_g und J_w die feste Spule eines Wattmeters eingeschaltet, während die bewegliche Spule nebst bifilarem Vorschaltwiderstand r mit den Voltmetern E_w und E_g parallel geschaltet ist und durch Umlegen zweier Bügel eines Quecksilberschalters bald an die Punkte 1 und 3 („Wehneltunterbrecher" und inductivem Widerstand, hier Transformator), bald an 1 und 2 (Wehneltunterbrecher allein), bald an 2 und 3 (Transformator, secundär offen oder belastet) angelegt wird und jedesmal die zwischen diesen Punkten zur Umsetzung gelangende elektrische Leistung (effective Wellenstromleistung P_w) in Watt misst.[2])

Die als Beispiel angeführten, sich auf Messung Nr. 105 beziehenden Zahlen wurden bei folgenden Versuchsbedingungen gewonnen: activer Querschnitt im Wellenstromerreger (Wehneltunterbrecher U) gebildet durch den mit positivem Pol einer

1) C. Heinke, Elektrotechn. Zeitschr. **20.** p. 511. 1899.

2) Näheres über Wattmetermessungen, sowie erforderliche Correctionen vgl. die oben erwähnten „Wechselstrommessungen" § 54 u. ff. Leipzig, S. Hirzel 1897.

Accumulatorenbatterie von 64 Volt verbundenen Platinstift von 1,2 mm Durchmesser und etwa 38 mm herausragender Länge, also etwa 143 qmm wirksamer Oberfläche; inductiver Widerstand, gebildet durch die Niederspannungswickelung eines Igeltransformators von Swinburne, mit etwa 0,06 Ω Widerstand, angenähert 0,020 Henry Selbstinductionscoefficient ohne secundäre Belastung, 200 Windungen mit etwa 17,5 qcm Eisenquerschnitt, Uebersetzungsverhältniss; 1 : 10 d. h. Hochspannungswickelung 2000 Windungen; letztere war an einen Hochspannungscondensator von Swinburne angeschlossen, dessen 5 eingeschaltete Abtheilungen mit technischem Wechselstrom die wirksame Capacität von etwa 2,40 Mikrof. besass; der bei vorliegendem Versuch mit Hitzdrahtampèremeter gemessene Ladestrom J_{II} betrug 0,44 Amp. bei etwa 440 Volt Secundärspannung.

Von den Tabellenwerthen beziehen sich die in Tab. 1 aufgeführten Zahlen auf die unmittelbar mit Messanordnung in Fig. 2 beobachteten Grössen, natürlich unter Anbringung der etwaigen Instrumentencorrectionen, während die in Tab. 2 aufgeführten Zahlen die abgeleiteten Grössen darstellen. Die Werthe jeder horizontalen Messreihe, die sich der Reihe nach auf die der Messung unterworfene Kreislaufstrecke zwischen den Punkten 1 und 3 (obere Reihe), 1 und 2 (mittlere Reihe), 2 und 3 (untere Reihe) beziehen, sind gleichzeitig beobachtet:

Tabelle 1.

E_g Volt	E_w Volt	J_g Amp.	J_w Amp.	P_w Watt
30,0	39	10,1	12,2	137
29,5	58	10,2	12,2	113
0,5	43,5	10,2	12,2	24

Tabelle 2.

$P_g = E_g \cdot J_g$	$P_\sim$ Watt	$J_\sim$ Amp.	$E_\sim$ Volt	$P_s = J_\sim \cdot E_\sim$	$\cos\varphi$	φ
304	−166	6,84	25,0	171	−0,97	−14°
300	−187	6,66	50,0	333	−0,562	−55 50′
5	+ 19	6,66	43,5	290	+0,065	+86 20

Der Vergleich der in den einzelnen Leiterstrecken wirklich zur Umsetzung gelangenden Nettowatt unter P_w (effective Wellenstromleistung) mit den scheinbar zugeführten Gleich-

ɔmwatt unter $P_g = E_g \,.\, J_g$ (scheinbar Gleichstromleistung) weist e eigenartige Energieverschiebung innerhalb jeder Periode ', die nur der aufgelagerte Wechselstrom mit seinen Facən $E_\sim$ und $J_\sim$ bewirken kann, die sich aber hierdurch auch lig befriedigend erklären lässt. Behält man für die analytische leitung zunächst die Darstellung des Wechselgliedes durch e äquivalente Sinuswelle bei, so wird nach obigem ein iebiger Momentanwerth der Wellenstromstärke

$$i_w = J_g + (\sqrt{2}\, J_\sim) \sin \alpha = J_g \pm i_\sim$$

gestellt, worin $(\sqrt{2} \,.\, J_\sim)$ der bei der Sinuswelle vorhandene ximalwerth und $\sin \alpha$ die jeweilige Phase des Wechselgliedes :eichnet, welche den Momentanwerth $i_\sim$ desselben bedingt

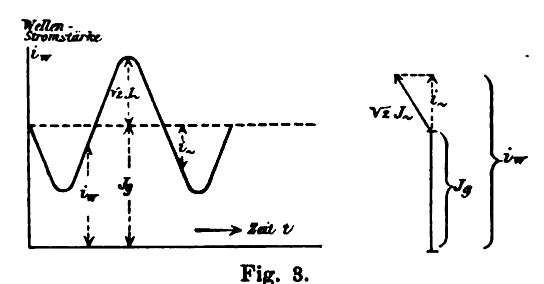


Fig. 3.

l. Fig. 3 mit der Darstellung in rechtwinkeligen und Polarɪrdinaten). Analog ergiebt sich für den Momentanwerth : Wellenspannung

$$e_w = E_g + (\sqrt{2} \,.\, E_\sim) \sin(\alpha + \varphi) = E_g \pm e_\sim,$$

nn die Phasenverschiebung, d. i. bei Sinuswellen der auf die riode bezogene zeitliche Abstand der Maximalwerthe, von annung $e_\sim$ und Stromstärke $i_\sim$ im Polardiagramm durch ı Winkel φ ausgedrückt wird. Bei Curven, welche von der ıusform abweichen, wird hier in der Wechselstromtechnik ıktisch schon stets eine äquivalente Phasenverschiebung geführt, welche an Stelle der Maximalwerthe den Abstand : hinsichtlich der Leistung in Frage kommenden Schwerien einerseits der Stromcurve, andererseits der Spannungsrve setzt und durch

$$\cos \varphi = \frac{P_\sim}{E_\sim \,.\, J_\sim}$$

geliefert wird, wenn $P_\sim$ hier die wirkliche, d. h. zur Umsetzung in andere Energieform gelangende Wechselstromleistung bezeichnet und $E_\sim$ bez. $J_\sim$ die für sich gemessenen effectiven Mittelwerthe der Spannung bez. Stromstärke. Diese äquivalente Phasenverschiebung soll auch hier bei den unsymmetrischen Wechselgliedern zur Anwendung gelangen. Zunächst erhält man jedoch als Momentanwerth der Wellenstromleistung

$$p_w = e_w \cdot i_w = [E_g + (\sqrt{2}\,E_\sim)\sin\alpha + \varphi]\,[J_g + (\sqrt{2}\,J_\sim)\sin\alpha]$$

und über die ganze Periode integrirt den durch das Wattmeter angezeigten mittleren (effectiven) Werth der Wellenstromleistung

$$P_w = E_g \,.\, J_g + E_\sim \,.\, J_\sim \,.\, \cos\varphi = P_g \pm P_\sim \,.$$

Bildet man aus den gemessenen Werthen

$$\pm P_\sim = P_w - P_g\,,$$

so ergeben sich die oben unter $P_\sim$ aufgeführten Werthe, sowie mit Hülfe der, wie oben angegeben, abgeleiteten äquivalenten effectiven Mittelwerthe für $J_\sim$ und $E_\sim$ und der scheinbaren Wechselstromleistung $P_s = J_\sim \,.\, E_\sim$ die Werthe von $\cos\varphi$, sowie daraus der Winkel φ der äquivalenten Phasenverschiebung für die Darstellung im Polardiagramm, wobei hier das Vorzeichen Minus den Winkelabstand der Spannungscomponente von der *Verlängerung* des Stromvectors $J_\sim$ über den Anfangspunkt hinaus ausdrücken soll, während Plus (+) sich auf den Stromvector selbst bezieht (vgl. Darstellung in Fig. 4).

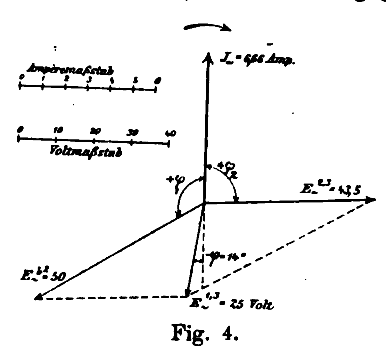


Fig. 4.

Die wie oben durchgeführten Messungen enthalten nun in mehrfacher Hinsicht eine Ueberbestimmung und gestatten die Probe auf die Zulässigkeit bez. Richtigkeit der abgeleiteten Werthe wie folgt:

Nach dem abgeleiteten Werth für $E_\sim^{1,2} = 50$ Volt und

$\cos\varphi_1 = -0{,}562$ folgt die arbeitleistende (auf $J_\sim$ reducirte) Componente zu

$$E^{1,2}_\sim \,.\, \cos\varphi_1 = \frac{P^{1,2}_\sim}{J_\sim} = -28{,}1 \text{ Volt},$$

denn

$$50\,.\,(-0{,}562) = -\frac{187}{6{,}66} = -28{,}1\,.$$

Ebenso folgt die arbeitleistende Componente der Spannung $E^{2,3}_\sim$ zu

$$E^{2,3}_\sim . \cos\varphi_2 = \frac{P^{2,3}_\sim}{J_\sim} = \frac{+19}{6{,}66} = +2{,}85 \text{ Volt}$$

oder die aus beiden resultirende Componente

$$E^{1,3}_\sim \,.\, \cos\varphi = E^{1,2}_\sim \cos\varphi_1 + E^{2,3}_\sim \,.\, \cos\varphi_2 = -25{,}2 \text{ Volt},$$

was durch das resultirende $\cos\varphi = -0{,}97$ dividirt den Werth $E^{1,3}_\sim = 26$ Volt ergäbe, d. h. mit Rücksicht auf die vielen benutzten Beobachtungen und als Restglied einer längeren Rechnung mit abgerundeten Werthen sehr nahe in Uebereinstimmung mit dem abgeleiteten Werth.

Unter Vermeidung der Benutzung aller abgeleiteten Werthe der ersten Reihe erhielt man rechnerisch genauer

$$E^{1,3}_\sim = \sqrt{(E^{1,2}_\sim)^2 + (E^{2,3}_\sim)^2 + 2\,.\,E^{1,2}_\sim\,.\,E^{2,3}_\sim\,.\,\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}$$
$$= 25{,}4 \text{ Volt}.$$

Nach der obigen Ableitung musste dies mit dem beobachteten $E^{1,3}_\sim = 30$ Volt zusammen eine effective Wellenspannung

$$E^{1,3}_w = \sqrt{(E^{1,3}_g)^2 + (E^{1,3}_\sim)^2} = 39{,}3 \text{ Volt}$$

geben.

Da mit dem Hitzdrahtvoltmeter $E^{1,3}_w = 39$ Volt beobachtet wurde, so ist das so gut in Uebereinstimmung, d. h. die Probe so befriedigend als man im vorliegenden Fall nur erwarten kann.

Das vorliegende Beispiel lässt schliesslich noch besonders deutlich erkennen, dass bei allen elektrischen Ausgleichvorgängen mit Wellenstromcharakter *trotz Entnahme der elektrischen Leistung aus einer Gleichstromquelle* die zur Umsetzung gelangende Leistung P_w auch nicht annähernd durch die gemessenen Einzelgrössen, d. i. Spannung E und Stromstärke J gegeben zu sein braucht, da weder das Product der voltametrisch gemessenen Mittelwerthe $P_g = E_g\,.\,J_g$, noch dasjenige der effectiven

Mittelwerthe $E_w . J_w$ die wirkliche elektrische Leistung liefern. Die letztere hängt vielmehr noch in hohem Grade von der äquivalenten Phasenverschiebung zwischen der aufgelagerten Wechselstromcomponente $J_\sim$ und der zwischen den Enden einer jeweils ins Auge gefassten Kreislaufstrecke vorhandenen Wechselspannungscomponente $E_\sim$ ab und kann nicht nur grösser, sondern vielfach auch bedeutend kleiner als P_g sein, wie z. B. stets innerhalb des Wellenstromerregers. Für die ganze Strecke zwischen den Punkten 1 und 3 ist im obigen Beispiel $E_\sim$ und $J_\sim$ in Phase nahezu entgegengesetzt und deshalb eine Minderleistung gegenüber P_g von fast dem vollen Betrag $E^{1,3}_\sim . J_\sim$ vorhanden.

Dass ein Mischproduct, z. B. $J_g . E_w$, aus galvanometrisch gemessener Stromstärke und effectiv gemessener Spannung, wie es zur Bestimmung der Leistung bei Gasentladungen zuweilen benutzt worden ist, dieselbe bei Wellenstromcharakter der Entladungen nicht zu liefern vermag, bedarf wohl kaum des besonderen Hinweises.

Gegenüber dieser sich auf Messung gründenden Auslegung der Wellenstromerscheinungen, welche sich den Thatsachen soweit anpasst, dass ihre Zulässigkeit bez. Richtigkeit kaum zu widerlegen sein dürfte, kommt die Frage nach der Entstehung der gemessenen Grössen im Zusammenhang mit den schon anderweitig bekannten Ausgleichgesetzen erst in zweiter Linie. Hier kann man auf Grund der vielseitigen Analogien mit den bei Wechselstrom auftretenden elektrischen Resonanzerscheinungen[1]) die bei Wellenstrom auftretenden Spannungssteigerungen der *effectiv* gemessenen Werthe auch einer durch das Wechselglied verursachten elektrischen Resonanz zuschreiben. Alsdann ist man genöthigt, im Wellenstromerreger, speciell den mit Elektrolyten arbeitenden Unterbrecher, eine Capacitätswirkung anzunehmen, etwa entsprechend derjenigen, wie sie aus den von H. von Helmholtz über Doppelschichten durchgeführten Ueberlegungen folgen würde; die Berechnung eines *äquivalenten* Capacitätswerthes im Wellenstromerreger wäre alsdann naheliegend. Andererseits kann man die Erklärung ohne Zuhülfenahme einer Resonanz sowie ohne Annahme eines

1) Vgl. Elektrotechn. Zeitschr. 18. p. 61. 1897.

Capacitätswerthes versuchen. In Physikerkreisen neigt man gegenwärtig mehr der letzteren Anschauung zu, doch sprechen nach meiner Ansicht verschiedene Messergebnisse zu Gunsten der ersten Auffassung, deren Stützung auf Grund des gewonnenen Zahlenmaterials in einem gesonderten Aufsatz versucht werden soll.

Resultat.

Bei elektrischen Ausgleichvorgängen mit Wellenstromcharakter lässt sich Spannung und Stromstärke durch gleichzeitige Messung mit galvanometrisch *und* mit effectiv anzeigenden Messinstrumenten in je zwei Componenten zerlegen, ein constantes Glied und ein aufgelagertes Wechselglied, wobei das letztere in energetischer (effectiver) Hinsicht den Ersatz durch eine äquivalente, symmetrische Sinuswelle gestattet.

Die Messung der wirklichen Wellenstromleistung kann, ähnlich wie bei Wechselstrom, nicht durch eine getrennte Strom- und Spannungsmessung erfolgen, sondern bedarf elektrisch einer besonderen Messvorrichtung, am besten eines zuverlässigen Wattmeters, oder muss, wo dies nicht ausführbar, indirect aus der während längerer Zeit umgesetzten Energiemenge bestimmt werden, indem man die gesammte elektrische Energie in Wärme überführt und diese calorimetrisch der Messung zugänglich macht.

(Eingegangen 11. August 1899.)

---

5. *Ueber die höchsten hörbaren und unhörbaren Töne von $c^5 = 4096$ Schwingungen ($ut_7 = 8192$ v s), bis über f^9 (fa_{11}), zu 90 000 Schwingungen (180 000 v s), nebst Bemerkungen über die Stosstöne ihrer Intervalle, und die durch sie erzeugten Kundt'schen Staubfiguren; von Rudolph Koenig.*

Die oft citirte Reihe sehr hoher Stimmgabeln, mit der Despretz im Jahre 1848 seine Untersuchungen über die Grenze der Hörbarkeit der höchsten Töne angestellt, war von Marloye angefertigt worden, welcher erklärt[1]), dieselbe von c^6 bis c^7 vermittelst der Schätzung ihrer musikalischen Intervalle mit dem Ohre gestimmt zu haben, und dass er darauf auch noch hätte das Intervall der höheren Octave dieses letzten Tones stimmen können, also c^8(ut_{10} = 65,536 *v s*), welcher Ton schon sehr beträchtlich über der mittleren Grenze der Hörbarkeit normal hörender Menschen liegt. Nun ist es allerdings möglich, dass es Menschen geben kann, deren Gehör die angeborene oder durch Uebung erlangte Fähigkeit besitzt, auch noch Töne zu vernehmen und ihre musikalischen Intervalle zu erkennen, die wegen ihrer Höhe für gewöhnliche Ohren nicht mehr existiren, aber leider ist es in solchen Fällen immer so gut wie unmöglich, sich mit Sicherheit davon zu überzeugen, ob diese Fähigkeit bei den betreffenden Personen denn auch wirklich existirt oder nur eingebildet ist. Mein schon aus diesem Grunde nur sehr geringer Glaube an die Richtigkeit der von Marloye hergestellten Töne schwand vollständig, als gleich in den ersten Jahren, nachdem ich 1858 angefangen hatte, mich mit der Anfertigung akustischer Apparate zu beschäftigen, ich mehrfach Gelegenheit hatte, an Musikern die Beobachtung zu machen, dass bei ihnen allen, trotz ihres oft sogar aussergewöhnlich gut ausgebildeten musikalischen Gehörs,

1) Marloye, Einleitung zu seinem Catalog von 1851, p. 7.

die Beurtheilung der musikalischen Intervalle immer schon in der oberen Hälfte der Octave von c^4 cis c^5 anfing, erst unsicher und dann vollständig fehlerhaft zu werden. Unter solchen Umständen schien es mir nöthig, dass Töne, welche über $c^5(ut_7)$ hinausliegen, nothwendig entweder durch eine ganz objective Methode hergestellt werden müssten, oder in Ermangelung einer solchen, wenigstens durch eine Methode, bei der das Ohr nichts zu verrichten hätte, was die Fähigkeiten des gewöhnlichen guten Gehörs überschritte, und dass in jedem Falle auch die Richtigkeit ihrer Stimmung sich durch eine dieser Methoden immer müsste mit Sicherheit prüfen lassen, wenn sie in der Wissenschaft wirklich verwerthbar sein sollten. Ich construirte also im Jahre 1874 eine Reihe von Stimmgabeln, welche ich so massiv als möglich wählte, um mit denselben recht starke Differenztöne zu erhalten, vermittelst deren Verwendung ich beim Stimmen bis zu $f^7(fa_9 = 43\,690{,}6\ v\,s)$ gelangte. Die Zinken dieser letzten Gabel hatten nur noch eine Länge von 14 mm, welche gleich ihrer grössten Dicke war, was denn natürlich zur Folge hatte, dass sie schon allein nur noch schwer in Schwingung versetzt werden konnte, und es noch schwieriger war, ihren Ton zugleich mit dem der nur wenig längeren ihr vorhergehenden Stimmgabel e^7 stark genug für die Erzeugung des Differenztones hervorzulocken. Gabeln mit dünneren Zinken für die gleichen Töne mussten natürlich leichter erregbar ausfallen, dafür wäre aber bei ihnen auch wieder der Ton schwächer geworden, und ich glaubte daher annehmen zu dürfen, dass man auch mit solchen Gabeln vermittelst der angewendeten Stimmmethode nicht viel weiter würde gelangen können. Jedenfalls liess ich es damals bei dieser ersten Stimmgabelreihe bewenden, es schien mir aber interessant, nun auch noch zu zeigen, welche Dimensionen die anderen Tonwerkzeug nach ihren Schwingungsgesetzen berechnet, annehmen müssen, um solch hohe Töne erzeugen zu können, und so stellte ich, ausser einer Reihe von transversalschwingenden Stahlstäben, wie ich eine solche schon 1867 auf der Ausstellung in Paris gezeigt hatte, auch noch Reihen von longitudinalschwingenden Stäben, von Platten und von Orgelpfeifen her, welche ich alle 1876 auf die Ausstellung in Philadelphia schickte, in der Absicht, nach dem Schlusse derselben

eine Beschreibung dieser Arbeit zu veröffentlichen. Da erfuhr ich dort in der Ausstellung selbst, dass Preyer kürzlich eine Arbeit[1]) hätte erscheinen lassen, in welcher er über eine Stimmgabelreihe spräche, die bis zum e^8 hinaufreichen sollte, und darauf las ich dann auch selbst in seiner Schrift, dass er über dieselbe sagt (p. 21): „Innerhalb der ganzen Reihe lassen sich sehr deutliche Differenztöne erzeugen, und dadurch wird die Richtigkeit der Tonhöhe der Gabeln bewiesen," und weiter (p. 22): „Da es aber in der grossen Höhe auf einige Schwingungen mehr oder weniger zuerst nicht ankam, so wurden die Differenztöne zum Stimmen benutzt." Hiernach musste man also nothwendig annehmen, dass seine Gabeln wirklich vermittelst der Differenztöne gestimmt waren und folglich nur ganz kleine Fehler haben konnten. Da jedoch diese Resultate Preyer's in vollkommenem Widerspruche mit meinen eigenen Beobachtungen standen, so würde ich nach meiner Heimkehr von Amerika der Sache sofort auf den Grund zu kommen gesucht haben, wenn es mir nicht unmöglich gewesen wäre, dieses zu thun, ohne dabei vor allen Dingen auch die von Preyer angewendete Gabelreihe, oder doch wenigstens eine solche Reihe gleichen Ursprunges einer Prüfung zu unterwerfen, über welche aber den Bericht zu erstatten mir dann voraussichtlich sehr schwer gewesen sein würde, ohne mich dabei, in meiner Eigenschaft als Verfertiger akustischer Apparate, dem Verdachte auszusetzen, vielleicht nicht allein im rein wissenschaftlichen Interesse in dieser Angelegenheit das Wort genommen zu haben. Ich beschloss also, mit allen Mittheilungen über die höchsten Töne zu warten, bis die besagten Stimmgabeln erst einmal von irgend einem anderen Gelehrten, ohne meine Betheiligung dabei, geprüft sein würden, und begleitete vorläufig nur die Anzeige meiner Stimmgabelreihe von c^6 bis f^7 in meinem Catalog von 1882 (Nr. 47) und in dem von 1889 (Nr. 50) mit einer kleinen Notiz, in welcher ich, nach der Beschreibung, wie man die Gabeln zu zweien auf dem Gestelle zu befestigen hätte, sagte: „Schon mit den drei letzten Stimmgabeln über c^7 wird die Hervorbringung und Beobachtung dieser Töne recht schwer,

---

1) W. Th. Preyer, Die Grenzen der Tonwahrnehmungen.

ich habe daher vorgezogen, die Reihe mit f^7 abzuschliessen, damit man mir nicht den Vorwurf machen könne, in das Reich der Einbildung zu gerathen. Für fast alle Ohren ist übrigens die Grenze der Hörbarkeit mit diesen letzten Tönen nicht nur erreicht, sondern sogar überschritten, und für bejahrte Leute sinkt diese Grenze gewöhnlich bis unter $c^7 =$ 16384 Schwingungen.“

Seitdem hat nun aber, wie bekannt, zuerst Melde 1894 nachgewiesen, dass in Stimmgabelreihen gleicher Art und gleichen Ursprunges, als der von Preyer angewendeten, schon c^6 um eine kleine Terz falsch war, bei einem c^7 aber der Fehler sogar eine volle Octave betrng, worauf dann 1897 Stumpf und Meyer in der von Preyer selbst benutzten Serie nicht nur Fehler gleicher Grösse vorfanden, sondern auch noch constatirten, dass die Gabeln in derselben nicht einmal „ununterbrochen in die Höhe gehen“, obgleich Preyer (S. 21) noch ganz besonders betont hatte, dass wenn sie von c^4 an der Reihe nach erklingen, er stets „vollkommen deutlich erkennt, dass sie bis zum e^8 immer höher werden“. Damit scheint mir der Grund also wohl nun fortgefallen zu sein, aus welchem ich früher Anstand nahm, meine persönlichen Bemerkungen, die ich bei der Beschäftigung mit den höchsten Tönen gemacht, zu veröffentlichen, und so will ich sie nun, aber auch jetzt noch mit Ausschluss jeder Beurtheilung oder Kritik fremder Arbeiten, in Folgendem zugleich mit meinen neuesten Untersuchungen über diesen Gegenstand zusammenstellen, was mir dann auch noch Gelegenheit geben wird, meine früheren Untersuchungen über Stösse und Stosstöne durch die Beobachtung der Stosstöne an Intervallen der höchsten Töne vervollständigen zu können.

I. Ueber die höchsten Töne, welche man durch directes Stimmen herstellen kann.

1. Stimmgabeln von c^5 bis fis^7, vermittelst der Stosstöne gestimmt.

Ehe ich nach der Herstellung der oben erwähnten Reihe sehr massiver Stimmgabeln zur Anfertigung neuer vermittelst der Stosstöne gestimmter Reihen schritt, machte ich zahlreiche Versuche mit Stimmgabeln von sehr verschiedener Masse und

auch von sehr verschiedener Form, bei denen sich herausstellte, dass die Gabeln für die höchsten Töne, welche am leichtesten in Schwingung versetzt werden konnten und mit denen sich auch am besten die Stosstöne mit genügender Deutlichkeit erzeugen liessen, bedeutend geringere Masse haben mussten, als die Gabeln der alten Reihe, so dass also z. B. die Gabel für f^7 jetzt nur noch Zinken hat, deren grösste Dicke unten etwa 6 mm und oben 4 mm, bei einer Länge von 12 mm, beträgt. Alle diese neuen Stimmgabelreihen umfassen aber auch wie die alte die Töne der diatonischen Tonleiter von $c^6(ut_7 = 8192\ vs)$ bis $f^7(fa_9 = 43690{,}6\ vs)$. Mit den tiefsten Stimmgabeln derselben bis etwa zum g^6 oder a^6 erhält man noch ohne jede Schwierigkeit ganz leicht zu beobachtende Stosstöne, indem man die betreffenden zwei Gabeln schnell hintereinander anschlägt; über a^6 hinaus klingen die Gabeln aber nicht mehr, nachdem man sie angeschlagen hat, lange genug nach, man ist daher gezwungen, sie durch einen Bogenstrich zu erregen und ihre Töne während desselben zu beobachten. Stosstöne können unter solchen Umständen dann natürlich nur entstehen, wenn zwei Gabeln zu gleicher Zeit angestrichen werden. Für ein solch gleichzeitiges Anstreichen zweier Gabeln bedient man sich am besten eines besonders zu diesem Zwecke hergerichteten schweren Ständers aus Gusseisen, welcher eine Art von doppelter Schraubenpresse trägt, wie Fig. 96 in meinem illustrirten Catalog von 1889 zeigt. Auf diesem Gestelle befestigt man die beiden Stimmgabeln mit ihren Flächen dicht nebeneinander und mit ihren Zinkenenden in gleicher Höhe, man fasst dann den Contrabassbogen mit beiden Händen am Frosch und am Kopfe und stellt dadurch aus ihm einen Doppelbogen her, dass man die beiden Zeigefinger durch die Mitte seines Bezuges steckt, wo man dann mit demselben Bogenstriche über die Enden der Gabeln beide zugleich zum Schwingen bringt. Soll der Bogen nur für diese Experimente dienen, so ist es zweckmässig, etwa ein Fünftel der Haare des Bezuges aus seiner Mitte für das bequemere Durchstecken der Finger herauszuschneiden. Ohne diese Vorsicht, den Bezug des Bogens in der angegebenen Weise in zwei Theile zu theilen, führt beim Anstreichen der Oberfläche der Zinken immer ein Theil der Haare zwischen

die beiden Gabeln und verhindert dabei die Entstehung ihrer Schwingungen.

Diese Experimente lassen sich ganz leicht bis etwa zum g^6 ausführen, über diese Grenze hinaus gelingen sie aber immer schwerer, und hat man erst c^7 von 16384 Schwingungen überschritten, so gehört schon eine sehr grosse Uebung und Sicherheit im Anstreichen dazu, noch Stosstöne mit den Gabeln bis f^7 hervorzubringen. Alle meine Versuche aber, auch noch das g^7 auf diese Weise zu erreichen, brachten mich trotz meiner grossen Uebung und auch Geduld nur noch bis in die Mitte zwischen f^7 und g^7, wo die Mühe und Anstrengung, den Stosston noch hervorzubringen, schliesslich so gross wurde, dass ich es aufgab, weiter zu gehen und es auch für $f\sharp^7$ bei der einen Gabel, mit der ich es erreicht, bewenden liess, und in der Folge die Reihe der Gabeln immer schon bei f^7 abbrach.

2. Bemerkungen über die Stosstöne beim Zusammenklange zweier Töne von c^5 bis *fis*^{7}.

Ich lasse nun hier die Tabelle folgen, welche sämmtliche Stosstöne enthält, die sich mit allen zwischen diesen Gabeln möglichen Intervallen hervorbringen und beobachten lassen, sodass sie füglich als eine Fortsetzung der von mir früher in meiner Abhandlung „Ueber den Zusammenklang zweier Töne“[1]) gegebenen angesehen werden kann, in welcher ich sämmtliche Stösse und Stosstöne zusammengestellt habe, die sich an Intervallen mit den Grundtönen von Contra F (fa_{-1}), Gr. C (ut_1), Kl. c, c^1, c^2, c^3, c^4 beobachten lassen. In folgender Tabelle (vgl. p. 632 u. 633) für die Intervalle mit den Grundtönen von c^5 bis f^7 habe ich nur eine etwas andere Anordnung gewählt, die mir hier angemessener schien. In dieser enthält die Verticalcolumne links die Grundtöne mit ihren Verhältnisszahlen und Schwingungen, die Horizontalreihe oben die höheren Töne mit ihren Verhältnisszahlen sämmtlicher Intervalle. Die oberen Stosstöne der Intervalle der ersten Periode von 1 : 1 bis 1 : 2 habe ich einfach, die unteren Stosstöne der Intervalle der zweiten Periode von 1 : 2 bis 1 : 3 doppelt in derselben unterstrichen.

---

1) R. Koenig, Pogg. Ann. 157. p. 203—215. 1875; Quelques Exp. p. 113—124.

Tabelle der direct beobachteten Stosstöne bei Intervallen mit den Grundtönen von c^5 bis f^7.

		27 $d^5 (ré^7)$	30 $e^5 (mi_7)$	32 $f^5 (fa_7)$	36 $g^5 (sol_7)$	40 $a^5 (la_7)$	45 $h^5 (si_7)$	48 $c^6 (ut_8)$	54 $d^6 (ré_8)$	60 $e^6 (mi_8)$	64 $f^6 (fa_8)$	
$24 = c^5 (ut_7) = 4006$	v d	8:9 $1 = c^2$	4:5 $1 = c^3$	3:4 $1 = f^3$	2:3 $1 = c^4$	3:5 $1 = f^3$	—	—	4:9 $1 = c^3$	—	—	—
$27 = d^5 (ré_7) = 4608$	v d	—	9:10 $1 = c^2$	27:32 $5 = a^2$	3:4 $1 = g^3$	27:40 13 = 2218,6 14 = 2389,3	3:5 $1 = g^3$	9:16 $2 = c^3$	—	9:20 $2 = c^3$	27:64 $10 = a^3$	—
$30 = e^5 (mi_7) = 5120$	v d	—	—	15:16 $1 = f^1$	5:6 $1 = c^3$	3:4 $1 = a^3$	2:3 $1 = e^4$	5:8 $2 = c^4$	5:9 $1 = c^3$	—	—	—
$32 = f^5 (fa_7) = 5461,3$	v d	—	—	—	8:9 $1 = f^2$	4:5 $1 = f^3$	32:45 13 = 2218,6	2:3 $1 = f^4$	16:27 $5 = a^3$	—	—	—
$36 = g^5 (sol_7) = 6144$	v d	—	—	—	—	9:10 $1 = f^2$	4:5 $1 = g^3$	3:4 $1 = c^4$	2:3 $1 = g^4$	—	—	—
$40 = a^5 (la_7) = 6826$	v d	—	—	—	—	—	8:9 $1 = a^2$	5:6 $1 = f^3$	20:27 7 = 2389,3	—	—	—
$45 = h^5 (si_7) = 7680$	v d	—	—	—	—	—	—	15:16 $1 = c^2$	5:6 $1 = g^3$	3:4 $1 = e^4$	45:64 19 = 3242,6	—

	27 d^6 ($ré_8$)	30 e^6 (mi_8)	32 f^6 (fa_8)	36 g^6 (sol_8)	40 a^6 (la_8)	45 h^6 (si_8)	48 c^7 (ut_9)	54 d^7 ($ré_9$)	60 e^7 (mi_9)	64 f^7 (fa_9)	22998 *v d*
$24 = c^6 (ut_8) = 8192$ *v d*	8:9 $1 = c^3$	4:5 $1 = c^4$	3:4 $1 = f^4$	—	—	—	—	—	—	—	—
$27 = d^6 (ré_8) = 9216$ *v d*	—	9:10 $1 = c^3$	27:32 $5 = a^3$	3:4 $1 = g^4$	—	—	—	—	—	—	—
$30 = e^6 (mi_8) = 10240$ *v d*	—	—	15:16 $1 = f^3$	5:6 $1 = g^4$	(3:4 $1 = a^4$)	—	—	—	—	—	—
$32 = f^6 (fa_8) = 10922{,}6$ *v d*	—	—	—	8:9 $1 = f^3$	4:5 $1 = f^4$	—	—	—	—	—	—
$36 = g^6 (sol_8) = 12288$ *v d*	—	—	—	—	9:10 $1 = f^3$	4:5 $1 = g^4$	(3:4 $1 = c^5$)	—	—	—	—
$40 = a^6 (la_8) = 13653{,}3$ *v d*	—	—	—	—	—	8:9 $1 = a^3$	5:6 $1 = f^4$	20:27 $7 = 4778{,}6$	—	—	—
$45 = h^6 (si_8) = 15360$ *v d*	—	—	—	—	—	—	(15:16 $1 = c^3$)	5:6 $1 = g^4$	—	—	—
$48 = c^7 (ut_9) = 16384$ *v d*	—	—	—	—	—	—	—	8:9 $1 = c^4$	(4:5 $1 = c^5$)	—	—
$54 = d^7 (ré_9) = 18432$ *v d*	—	—	—	—	—	—	—	—	9:10 $1 = c^4$	27:32 $5 = a^4$	—
$60 = e^7 (mi_9) = 20480$ *v d*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15:16 $1 = f^3$	—
$64 = f^7 (fa_9) = 21845{,}3$ *v d*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1148 *v d*

Ein Blick auf diese Tabelle lässt sofort erkennen, dass die Intervallweite, bis zu welcher sich Stosstöne beobachten lassen, mit der Höhe des Grundtones immer kleiner wird, sodass sie, die für den Grundton c^5 noch bis über eine None reicht, für c^6 nur noch eine Quarte, für c^7 gar nur noch etwas über einen ganzen Ton, und für e^7 und f^7 bloss noch einen halben beträgt. Es ist hiernach sehr möglich, dass die grosse, ja sogar unüberwindliche Schwierigkeit, auf welche ich bei meinen Versuchen noch über das oben erwähnte fis^7 hinaus weiterzustimmen, gestossen war, zum Theil auch darin seinen Grund gehabt haben wird, dass das Intervall 15:16 für den Grundton f^7 schon die grösste Weite besass, bei welcher sich hier überhaupt noch ein Stosston bilden konnte, und dass es also vielleicht möglich wäre, wenn man mit dem erhaltenen fis^7 als Grundton, eine andere Stimmgabel noch höher zu stimmen versuchte, um mit dieser zuerst zwischen fis^7 und g^7 zu gelangen, und darauf die auf solche Weise gewonnene Gabel dann wieder als Grundton benutzte, dann mit einer dritten Gabel schliesslich das g^7 noch zu erreichen. Eine solche Arbeit würde aber immerhin so schwierig auszuführen sein, dass sie wohl kaum die Mühe lohnen dürfte, besonders da sich ein gleiches Resultat, wie man weiterhin sehen wird, jetzt auf weit einfachere Weise erreichen und sogar weit übertreffen lässt.

Dass die Intervallweite, in deren Grenzen Stosstöne überhaupt hörbar sind, mit der Höhe der Grundtöne so beträchtlich abnimmt, ist jedenfalls höchst bemerkenswerth. Man begreift in der That nicht, warum z. B. g^6 mit d^6 (3:4), ganz vortrefflich den Ton $1 = g^4$ giebt, aber mit c^6 (2:3), keine Spur von einem Stosston hören lässt. Es lässt sich dieses weder dadurch erklären, dass etwa das Intervall 3:4 als ein kleineres besser hörbar sein sollte als die Quinte, da ja in allen tieferen Lagen gerade der Stosston der Quinte, als aus dem oberen und unteren Stosston zugleich bestehend, ganz besonders stark zu sein pflegt, noch lässt sich der Grund davon in dem Umstande finden, dass die Intensität der sehr hohen Stimmgabeltöne mit ihrer Höhe schnell bis zu Null abnimmt, denn die Intensität von g^6 bleibt in den beiden angegebenen Fällen dieselbe, während von den Grundtönen aber gerade c^6 stärker ist als d^6.

Eine ganz genaue Grenze der Intervallweite für einen gegebenen Grundton wird sich natürlich darum nie mit Bestimmtheit angeben lassen, weil dieselbe zwar hauptsächlich, aber doch nicht nur allein von der Tonhöhe des Grundtones abhängt, und auch die Intensität der primären Töne und das mehr oder weniger empfindliche Gehör des Beobachters nicht ohne Einfluss auf sie sind, aber die von mir mit den von

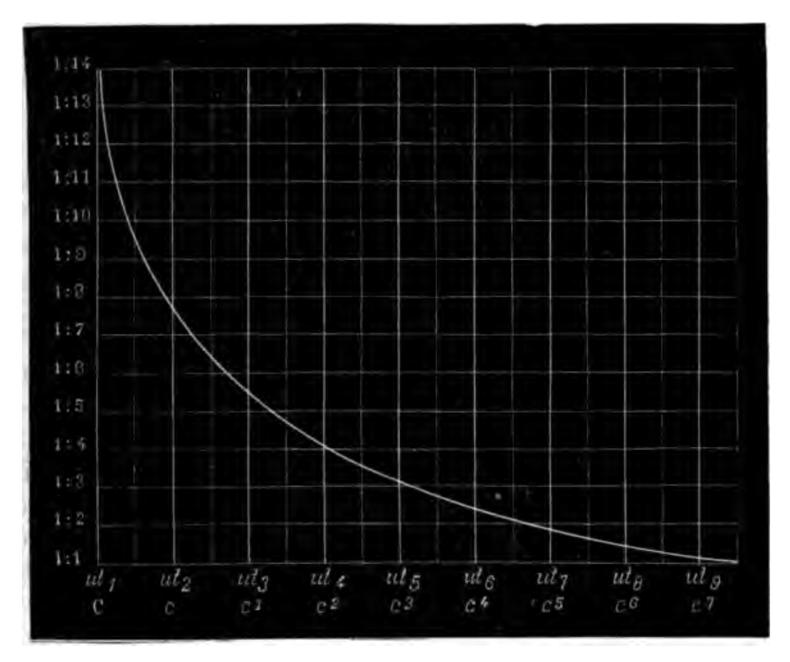


Fig. 1.

mir angewendeten Tönen erhaltenen Resultate lassen sich für die Grundtöne der neun Octaven Gr. C bis c^7 sehr annähernd genau durch die Fig. 1 gegebene Curve darstellen, wovon man sich durch eine Vergleichung mit den in den beiden Tabellen zusammengestellten Experimenten überzeugen kann. In dieser Figur sind auf der Abscissenlinie in gleichen Abständen voneinander die Grundtöne in Octaven aufgetragen, und ist die Weite der Intervalle seitlich neben der Ordinate der Intervallweite des Grundtones Gr. C (ut_1), verzeichnet.

Eine zu grosse Enge des Intervalles ist der Hörbarkeit

der Stosstöne ebenfalls nicht besonders günstig. So hört man bei $h^6 c^6$ (15 : 16) zwar den Ton $1 = c^2$ noch recht gut, doch bringt man ihn nur noch mit sehr starkem Anstreichen der Gabeln heraus, und bei $h^6 : c^7$ (15 : 16) ist der Ton $1 = c^3$ schon so schwach, dass man ihn kaum mehr vernehmen kann. Eine ganz besonders merkwürdige Thatsache ist aber jedenfalls die, dass Stosstöne, welche in eine Gegend der Scala fallen, in der das Ohr meistens Töne zu hören gut gewöhnt ist, auch dann noch von solchen Personen vernommen werden können, für welche die sie hervorbringenden primären Töne selbst schon über der Grenze der Hörbarkeit liegen.

Als ich im Jahre 1874 die erste Reihe Stimmgabeln von c^6 bis f^7 stimmte, welche ich 1876 in Philadelphia ausstellte, und dann gegen 1880 eine neue, über welche ich in meinem Katalog von 1882 unter Nr. 47 eine kurze Notiz gab, hörte ich noch alle Töne, mit welchen ich arbeitete. Im Jahre 1890, als ich neue Gabelreihen herzustellen hatte, bemerkte ich, dass f^7 mir ganz unhörbar geworden war und ich auch e^7 nur noch mitunter, etwa bei aussergewöhnlich gut gelungenem Bogenstriche, oder auch, wenn meine Ohren in einem besonders guten Zustande sein mochten, wirklich gut hörte. Jetzt endlich in meinem 67. Jahre, geht es mir mit dem d^7 schon ebenso wie vor zehn Jahren mit dem e^7, welches ich nun gar nicht mehr vernehmen kann, dieses hat mich jedoch nie gehindert, und hindert mich auch jetzt noch nicht, mit Sicherheit bis zum f^7 meine Gabeln vermittels der Stosstöne genau stimmen zu können. Auch ist es den verschiedenen Gelehrten, vor welchen ich im Laufe der letzten Jahre Gelegenheit hatte, diese Experimente zu wiederholen, ausnahmslos ohne grosse Mühe immer gelungen, die Stosstöne zu hören, welche vermittelst der Gabeln von c^7 bis f^7 erzeugt wurden, obgleich nicht einer von ihnen die Töne selbst alle bis zum f^7 hinauf hören konnte und die Grenze ihrer Hörfähigkeit mitunter kaum viel über c^7 zu liegen schien. Auch konnte in allen diesen Fällen von einer etwaigen Illusion keine Rede sein, da die betreffenden Hörer die von ihnen vernommenen Töne unter den Hülfsgabeln immer selbst herausfanden. Das auffallendste Hören von Stosstönen, deren primäre Töne nicht vernommen wurden, hatte ich aber Gelegenheit an einem

Musiker zu beobachten. Er stand noch in den besten Mannesjahren und hatte ein sonst so gut ausgebildetes musikalisches Gehör, dass er alle Stosstöne, welche ich ihn bei Intervallen, die sowohl mit den tiefsten wie mit den allerhöchsten Stimmgabeln der ganzen Reihe gebildet waren, hören liess, immer ohne die geringste Unsicherheit und ohne jedes Zögern sofort richtig erkannte und auch mit den entsprechenden Hülfsgabeln angeben konnte, die Töne der Gabeln selbst hörte er aber nur bis a^6, und schon h^6 existirte für ihn nicht mehr, sodass die Grenze seiner Hörfähigkeit also zwischen a^6 und h^6, und somit eine ganze Quinte tiefer lag als die höchsten Töne des Intervalles $e^7 : f^7$, dessen Stosston er noch ohne jede Schwierigkeit hören und erkennen konnte. Ich erfuhr später, dass er einige Zeit vorher, ehe ich ihn kennen lernte, eine lange, schwere Krankheit durchzumachen gehabt hätte, und vielleicht mag diese bei ihm ein Sinken der Hörgrenze für die höchsten Töne zur Folge gehabt haben.

Unter allen Stosstönen in obiger Tabelle befinden sich nur drei, welche der Gattung der unteren Stosstöne der zweiten Periode angehören und bei den Intervallen $c^5 : d^6$ (4 : 9), $d^5 : e^6$ (9 : 20) und $d^5 : f^6$ (27 : 64) vernommen werden, dass man zwei dieser Töne bei Intervallen mit dem Grundton d^5 erhält und nur einen mit dem von c^5, hat seinen Grund offenbar darin, dass von $c^5 : d^6$ bis zu $c^5 : e^6$ die Intervallweite gleich um eine ganze Tonstufe zunimmt, dagegen aber von $d^5 : e^6$ bis zu $d^5 : f^6$ nur um einen halben Ton, sodass die äusserste Grenze der Intervallweite, bis zu welcher sich noch ein Resultat aus Zusammenklängen mit den Grundtönen c^5 und d^5 erhalten lässt, zwischen 4 : 9 und 2 : 5 fällt.

Obere Stosstöne der Intervalle der ersten Periode von 1 : 1 bis 1 : 2 findet man in der Tabelle sechs bei den Zusammenklängen $c^5 : a^5$, $d^5 : h^5$, $d^5 : c^6$, $e^5 : c^6$, $e^5 : d^6$ und $f^5 : d^6$. Auch bei den drei ersten dieser Stosstöne bemerkt man wieder, dass aus dem gleichen Grunde wie bei den vorher erwähnten, man mit dem Grundtone c^5 nur einen einzigen oberen Stosston bei $c^5 : a^5$ (3 : 5) erhält, dass ein solcher sich aber nicht mehr bei der Erweiterung dieses Intervalles um einen ganzen Ton, von $c^5 : a^5$ bis zu $c^5 : h^5$ (8 : 15), hören lässt, während man mit dem Grundtone d^5 das Intervall $d^5 : h^5$ (3 : 5), um einen halben

Ton bis zu $d^5:c^6$ (9 : 16) erweitern kann, ohne dass sein Stosston verschwindet. Die Hörbarkeit der oberen Stosstöne der ersten Periode zeigt sich also ebenso wie die der unteren Stosstöne der zweiten Periode durchaus abhängig von dem directen Abstande des höheren Tones vom Grundtone, wogegen seine Stellung zum ersten harmonischen Tone des Grundtones ganz gleichgültig zu sein scheint, denn der untere Stosston der zweiten Periode verschwindet, wenn sich der höhere Ton des Intervalles $c^5:d^6$ um einen ganzen Ton, statt nur um einen halben von der Octave des Grundtones entfernt, während der obere Stosston der ersten Periode des Intervalles $c^5:a^5$ aufhört, hörbar zu sein, wenn sich der höhere Ton dieser Octave des Grundtones gerade um einen ganzen Ton nähert, statt nur um einen halben.

Eine besondere Aufmerksamkeit verdient bei den oberen Stosstönen der ersten Periode auch noch das sehr starke und alleinige Auftreten derselben bei den Intervallen 3 : 5, $c^5:a^5$ und $d^5:h^5$. In der That, bei dem gleichen Intervalle 3:5, mit den Grundtönen c^1, c^2, c^3 gebildet, ist bei $c^1:a^1$ der untere Stosston, $2 = f$, weit stärker als der obere, $1 = F$, der sich direct noch kaum vernehmen lässt. Bei $c^2:a^2$, $c^3:a^3$ gleicht sich die Intensität der beiden Töne dann aber mehr und mehr aus, bis diese bei $c^4:a^4$ schliesslich gleich stark geworden sind, bei $c^5:a^5$ endlich ist dann aber der untere Stosston $2 = f^4$ nicht nur schwächer gegen den oberen geworden, sondern sogar schon so vollständig verschwunden, dass man keine Spur mehr von ihm hört, und allein nur noch den oberen Stosston $1 = f^3$, und zwar dieses f^3 ganz ebenso stark als bei der Quarte $c^5:f^5$ (3 : 4), wo es ebenfalls allein, aber als unterer Stosston auftritt.

Alle anderen beobachteten Stosstöne in der Tabelle gehören der Klasse der unteren Stosstöne der ersten Periode an, welche ihrer Schwingungszahl nach also mit den Differenztönen zusammenfallen, und sie sind es auch, welche man nur allein als Hülfsmittel beim Stimmen der höchsten Töne zu verwenden hat, wobei man dann immer hauptsächlich solche Intervalle wird zu wählen haben, deren höherer Ton so viel als möglich in die Mitte der Intervallweite fällt, in welcher für den gegebenen Grundton sich Stosstöne überhaupt beobachten lassen,

weil man diese unter solchen Umständen dann am stärksten und deutlichsten hörbar erhält.

Nach der Erfüllung der Bedingung, die Stosstöne nur überhaupt erst deutlich hervorzubringen, ist dann das Wichtigste, ihre Tonhöhe genau bestimmen zu können, da hiervon auch die Genauigkeit abhängt, welche sich beim Stimmen mit ihrer Hülfe erreichen lässt. Werden Stosstöne durch tiefere, lange anhaltende Töne erzeugt, und haben dann auch selbst eine längere Dauer, so existirt keine Schwierigkeit, ihre Tonhöhe vermittelst der Stösse mit Hülfsgabeln, deren Schwingungszahlen bekannt sind, ganz ebenso genau zu bestimmen, als die eines primären Tones von gleicher Schwingungsdauer; aber wenn schon die primären Töne, durch welche sie hervorgebracht werden, wie die der sehr hohen Stimmgabeln, nur noch während der ganz kurzen Zeit eines Doppelbogenstriches existiren, so hat auch das Erklingen der Stosstöne dann eine so kurze Dauer, dass es so zu sagen nur dem momentanen Aufleuchten eines Lichtblitzes gleicht, und es somit unmöglich sein würde, die Methode der Stösse bei ihrer Vergleichung mit Hülfstönen zur Verwendung zu bringen, es bleibt also unter solchen Umständen dann kein anderes Mittel übrig, als die Uebereinstimmung der Stosstöne mit den Hülfstönen vermittelst des musikalischen Gehörs abzuschätzen. Ich habe gefunden, dass eine solche Schätzung dadurch sehr erleichtert wird, dass man mit passenden kleinen Stimmgabeln die Hülfstöne ebenso kurz und schnell abgebrochen mehrmals hintereinander hervorbringt, wie die Stosstöne unter einer Reihe aufeinanderfolgender Doppelbogenstriche sich hören lassen. Auch kann man dem Ohre noch dadurch zu Hülfe kommen, dass man den betreffenden Stosston abwechselnd mit einem etwas zu hohen und einem etwas zu tiefen Hülfston vergleicht, und ferner ist es zweckmässig, für einen zu stimmenden Ton sich nie nur mit der Bestimmung des Stosstones von einem einzigen Intervall zu begnügen, sondern vielmehr immer, so weit dieses angeht, mit dem gleichen Tone die Stosstöne mehrerer Intervalle zu erzeugen und dann zu bestimmen, wodurch man besonders verhütet, dass die etwa begangenen Fehler bei den aufeinander folgenden Gabeln der Reihe sich summiren könnten. Aber trotz aller angewendeten Sorgfalt bleibt die Anwendung des

musikalischen Gehörs natürlich doch immer eine Quelle von Fehlern, die schon störend werden könnten, wenn nicht ein bei der Schätzung der Tonhöhe des Stosstones begangener Fehler immer nur einer weit geringeren Ungenauigkeit des Intervalles der ihn hervorbringenden Töne entspräche, wie man aus folgendem Beispiel erkennen kann. Bei dem Intervalle der Secunde 8 : 9 ist der Stosston = 1, erweitert man diese Secunde aber allmählich, indem man ihren höheren Ton bis zur Terz 8 : 10 erhöht, so wird der Stosston schliesslich = 2, sodass also während der Erweiterung des Intervalles um nur einen Ton er selbst eine ganze Octave durchlaufen hat, woraus hervorgeht, dass, wenn man beim Stimmen der Intervalle zwischen 8 : 9 und 8 : 10 in der Schätzung des Stosstones einen kleinen Irrthum beginge, dieses nur einen sechs Mal kleineren Fehler bei den Intervallen zur Folge haben möchte. Wie gering darum auch in Wirklichkeit diese Fehler ausfallen, davon kann man sich durch folgende einfache Experimente mit einigen Stimmgabeln aus der Reihe selbst Rechenschaft geben.

Das Intervall $a^5 : d^6$ ist, bloss nach den Noten gerechnet, eine Quarte, und wenn diese rein wäre, so müsste sie bei 3 : 4 den Stosston d^4 hören lassen, wie d^6 wirklich genau mit c^6 (8 : 9) den Stosston $1 = c^3$, und mit h^5 (5 : 6) den Stosston $1 = g^4$ giebt, da es sich hier aber um Töne der auf den Grundton c etablirten diatonischen Tonleiter handelt, so ist das Verhältniss von $a^5 : d^6$ in Wirklichkeit 20 : 27, und also um ein Komma, 80 : 81, weiter, als das reine Quarteninterval 3 : 4; diese kleine Abweichung lässt aber schon einen so beträchtlichen Unterschied zwischen dem Stosstone dieses gestörten Intervalles und dem Hülfstöne d^4 hören, dass man offenbar noch weit geringere Abweichungen von der Reinheit des Intervalles 3 : 4 würde sofort bemerken können, als die um ein Komma. — Man kann das gleiche Experiment auch mit den Tönen a^6, h^6, c^7 und d^7 machen, aber in diesem Falle befindet sich der Stosston von $a^6 : d^7$ schon an der Grenze seiner Hörbarkeit und ist nur noch schwer zu erhalten.

Aus den vorstehenden Erörterungen geht also hervor, dass man vermittelst der Stosstöne Stimmgabeln, welche gut gearbeitet sind, um ihr Maximum von Intensität zu geben, sehr

wohl mit grosser Genauigkeit bis zum f^7 und selbst bis zum fis^7 stimmen kann, und dass sich auch die Richtigkeit ihrer Stimmung immer mit einigen Doppelbogenstrichen sofort nachweisen lässt, aber diese Stimmmethode hat darum doch den Nachtheil, dass sie nicht gestattet, einen einzelnen bestimmten Ton direct, ohne eine mehr oder weniger grosse Anzahl von Zwischengabeln herzustellen, welche so zu sagen die Brücke bilden müssen, über welche man erst zu ihm gelangen kann, indem man von c^5 ausgeht, einem Tone, für den sich noch Stimmgabeln herstellen lassen, welche eine genügend lange Schwingungsdauer und auch genügend grosse Schwingungsamplituden haben, um vermittelst der optischen und akustischen Präcisionsmethoden noch direct mit den Schwingungen der Normalstimmgabel von $c^1 = 512$ *vs* bei 20° Cels. in genaue Uebereinstimmung gebracht werden zu können. Es soll daher im nächsten Abschnitt nun eine Methode besprochen werden, welche, ohne jede Mitwirkung des Ohres, die directe Herstellung jedes beliebigen Tones bis weit über die Grenze der Hörbarkeit hinaus gestattet.

3. Stimmgabeln von c^5 bis über f^9 zu 90000 Schwingungen, vermittelst der Kundt'schen Staubfiguren gestimmt.

Bekanntlich hat Lord Rayleigh [1]) gezeigt, wie man die Wellenlänge eines hohen Tones erhalten könne, indem man in einiger Entfernung von der Tonquelle den Ton von einer Glasplatte reflectiren lässt, und in den auf diese Weise zwischen der Tonquelle und der reflectirenden Fläche erzeugten stehenden Wellen die Stellen der aufeinanderfolgenden Knoten und Bäuche vermittelst einer sensitiven freien Flamme unter starkem Drucke bestimmt, welche in ersteren ihre grösste Ruhe, in den letzteren aber die grösste Bewegung zeigt. Diese Methode scheint mir jedoch für die Töne der elastischen festen Körper, wie die der Stimmgabeln, Stäbe etc., sehr schwer anwendbar, besonders weil diese alle immer nur von einer sehr kurzen Dauer sind, und ich glaube daher vielmehr, in der Methode der Staubfiguren von Kundt das eigentlich beste, einfachste und bequemste Mittel sehen zu müssen, vermittelst dessen

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 7. p. 153. 1879; Rayleigh Sound, second edition 2. p. 403. 1896.

sich die Wellenlänge sehr hoher Töne, und somit also auch ihre Schwingungszahl, mit grösster Genauigkeit ermitteln lässt.

Während einiger Versuche, welche ich im vorigen Sommer anstellte, um die mechanische Wirkung zweier gleich hoher und für das Ohr ungefähr gleich starker Töne zu prüfen, von denen einer durch longitudinale, der andere durch transversale Schwingungen erzeugt wurde, war es mir aufgefallen, wie sehr leicht und mit welcher Schärfe die Staubfiguren von Kundt unter gewissen Bedingungen durch starke, sehr hohe Stimmgabeln, wie ich sie für die Beobachtung der Stosstöne construire[1]), in Röhren hervorgerufen wurden; und so fing ich an zu untersuchen, bis zu welcher Höhe auch die Stimmgabeln einer Reihe für die höchsten Töne, wie ich sie im Vorhergehenden beschrieben, der gleichen Wirkung fähig sein möchten, weil dann die Staubfiguren in Röhren, welche die halben Wellenlängen der Töne sichtbar darstellen, bis zu dieser Höhe hin als höchst bequemes, von den Leistungen des Ohres vollständig unabhängiges Mittel zum Stimmen der Stimmgabeln mussten verwendet werden können. Gleich bei meinen ersten Versuchen hatte ich fast ohne jede Mühe die Staubwellen mit allen Stimmgabeln für die Töne von c^6 bis c^7 erhalten, und als ich darauf nach einer Unterbrechung diese Experimente wieder aufnahm, konnte ich auch mit den Tönen von c^7 bis f^7 noch ebenso gute Staubfiguren erzeugen, wie auch ferner noch mit der kleinen oben erwähnten Stimmgabel für den höchsten Ton, welchen ich überhaupt, und nur einmal, vermittelst der Stosstöne gestimmt, und mit der ich etwa die Mitte zwischen f^7 und g^7 erreicht zu haben meinte. Diese bildete in einer Röhre von 6 mm Durchmesser, Halbwellen von ungefähr 7,45 mm Länge.

Nimmt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft bei der Temperatur von 0° zu 330,60 m an und die Zunahme dieser Geschwindigkeit für 1° Cels. zu 0,60 m, so erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft bei 20° Cels. = 342,60 m, welchen Werth ich bei allen folgenden Tonhöhebestimmungen durch die Länge der Halbwellen immer zu Grunde gelegt habe. Die Schwingungszahl der kleinen Gabel war hiernach also gleich

1) Catal. Nr. 201. 1889.

342600/7,45 = 45986,5 *v s*, und fiel somit auch wirklich gerade zwischen *fis*^{7} (43690,4 *v s*) und *ges*^{7} (47185,6 *v s*).

Bis hierher hatte es sich immer nur noch um Schwingungen und Tonhöhen gehandelt, die auch schon auf anderem Wege nachgewiesen worden waren, jetzt aber versuchte ich denn auch zwei winzige kleine Stimmgabeln, welche sich unter den zahlreichen anderen befanden, die ich für die Versuche, um die beste Stimmgabelform für sehr hohe Töne zu ermitteln, früher angefertigt hatte. Diese kleinen Stimmgabeln, deren nach oben zu verjüngte Zinken bei einer Länge von 9 und 8,5 mm, unten nur eine Dicke von etwa 3 mm und oben von 1,75 mm hatten, waren noch nie weder direct vernommen worden, noch hatten sie jemals einen Stosston miteinander oder mit anderen Tönen zusammen hören lassen, aber ein Bogenstrich reichte bei jeder von ihnen hin, sofort die Staubwellen in der ganzen Länge der Röhre von 6 mm Durchmesser hervorzubringen, welche für die eine 8,55 mm, für die andere 8,2 mm lang waren, sodass ihre Töne demnach entsprechend zwischen *d*^{7} und *e*^{7} und zwischen *e*^{7} und *f*^{7} fielen, und ich also aus ihnen sofort ein genau gestimmtes *e*^{7} und ein *f*^{7} herstellen konnte. Diese Gabeln entsprechen also, wegen der geringen Dicke ihrer Zinken, Tönen, welche ich an starken, für die Erzeugung der Stosstöne gefertigten Gabeln früher noch direct gehört, und deren Stosstöne ich auch jetzt noch vollständig gut vernehme, und wenn sie mir, wie auch anderen Beobachtern immer vollständig stumm geblieben waren, so zeigt dieses, welche grosse Rolle die Intensität bei sehr hohen Tönen in Bezug auf ihre Hörbarkeit spielt, und dass Stimmgabeln, welche für die Hervorbringung der Stosstöne genügend stark gefertigt sind, zwar auch immer vortrefflich für die Erzeugung der Staubwellen dienen können, dass aber weniger massive Stimmgabeln für dieselben Töne, selbst wenn sie vollkommen gute Staubwellen erzeugen, darum noch keineswegs immer auch hörbare Stosstöne hervorzubringen im Stande sein werden.

Es galt nun zu ermitteln, bis zu welcher Höhe vermittelst dieser Methode der Staubfiguren sich noch würden Stimmgabeln mit genau bestimmten Schwingungszahlen herstellen lassen. Ein vorläufiger Versuch mit einer alten etwas rohen Stimmgabel, deren parallele Zinken von unten bis oben eine

gleiche Dicke von etwa 3 mm hatten, aber im Verhältniss zu ihrer Länge offenbar zu weit voneinander abstanden, brachte mich bei der Verkürzung ihrer Länge nur bis in die Nähe von h^7, mit Stimmgabeln aber, die ich darauf in passender Form für diese Experimente gefertigt hatte, gelang es mir schliesslich, sämmtliche Töne der diatonischen Tonleiter von g^7 (sol_9) bis f^9 ($fa_{11} = 174762{,}6$ *v s*) herzustellen, allerdings nicht ohne grosse Mühe, denn von c^8 ab wurde mir schon jeder nächst höhere Ton immer schwerer und schwerer zu erreichen. Es ist wahr, dass, wenn ich ihn erst erlangt und darauf mit ihm mehrfach Staubfiguren erzeugt hatte, es mir dann immer bald viel leichter wurde, solche von Neuem mit ihm zu erhalten. Mit den Tönen e^9 und f^9 ist es mir auch jetzt noch mitunter schwer, ihre Staubwellen hervorzubringen, wenn sie jedoch plötzlich hervorspringen, sind sie stets noch so bestimmt gezeichnet, dass mit diesen Tönen die möglichst höchste Grenze noch nicht erreicht zu sein scheint, und dass ich daher hoffte, vielleicht noch die runde Zahl von 100000 Schwingungen, welche nur noch um weniger als eine kleine Terz höher als f^9 ist, erreichen zu können. Dieses gelang mir jedoch nicht. Nachdem ich eine Schwingungszahl mit einer nur sehr wenig kürzeren Halbwellenlänge als 1,9033 mm erreicht, welche letztere genau 90000 Schwingungen entspricht, war es mir nicht mehr möglich, noch weitere Staubwellen hervorzurufen. Da die Länge der Zinken der höchsten Gabeln, im Verhältniss zur Breite der Spalte zwischen ihnen, schliesslich sehr gering geworden war, so glaubte ich, dass Gabeln für die gleichen Töne mit schmaleren Spalten vielleicht noch eine etwas grössere Schwingungsfähigkeit besitzen würden, und construirte also für diese noch eine neue Reihe von Gabeln, bei welchen die Spalten für c^9 und d^9 1,5 mm, für e^9 und f^9 1,0 mm, und bei zwei Gabeln für die etwa über f^9 hinaus zu erreichenden Töne nur 0,5 mm Breite hatten, aber auch mit diesen konnte ich nicht weiter vordringen und sah mich also gezwungen, schliesslich bei den erreichten 90000 Schwingungen die ganze Stimmgabelreihe bis auf weiteres abzubrechen.

Die Töne über c^5 hinaus, welche man hiernach mit sehr genauer Stimmung jetzt herstellen kann, erstrecken sich also über vier und eine halbe Octave, und man könnte sie füglich

in drei Gruppen eintheilen, nämlich in die der durchaus hörbaren Töne von c^5 bis c^7, in die der Töne von c^7 bis c^8, zwischen welchen die Grenze ihrer Hörbarkeit bei verschiedenen Personen und bei Personen verschiedenen Alters schwankt, und endlich in die der durchaus unhörbaren Töne von c^8 bis $f^9 + 2618{,}6 = 90000$ Schwingungen, und was sich über diesen letzten Ton hinaus noch etwa sollte erreichen lassen.

Ich gebe hier folgend die Tabelle sämmtlicher von mir hergestellter Töne der letzten beiden Gruppen von c^7 bis zu 90000 Schwingungen, mit den Längen ihrer Halbwellen in der Luft bei der Temperatur von 20° cent. ($L/2$), der Schallgeschwindigkeit von 342,60 m und ihren Schwingungszahlen in einfachen Schwingungen (*v s*) und in Doppelschwingungen (*v d*).

Tabelle der Stimmgabeln für die Töne von c^7 bis zu 90000 Schwingungen mit den Längen ihrer Halbwellen und ihren Schwingungszahlen.

c^7 (*ut*$_9$)	$L/2 =$	10,4553 mm	32768	*v s*	16384	*v d*
d^7 (*ré*$_9$)	$L/2 =$	9,2936	36864	*v s*	18432	*v d*
e^7 (*mi*$_9$)	$L/2 =$	8,3642	40960	*v s*	20480	*v d*
f^7 (*fa*$_9$)	$L/2 =$	7,8418	43690,6	*v s*	21845,3	*v d*
g^7 (*sol*$_9$)	$L/2 =$	6,9702	49152	*v s*	24576	*v d*
a^7 (*la*$_9$)	$L/2 =$	6,2732	54613	*v s*	27306,6	*v d*
h^7 (*si*$_9$)	$L/2 =$	5,5761	61440	*v s*	30720	*v d*
c^8 (*ut*$_{10}$)	$L/2 =$	5,2276	65536	*v s*	32768	*v d*
d^8 (*ré*$_{10}$)	$L/2 =$	4,6468	73728	*v s*	36864	*v d*
e^8 (*mi*$_{10}$)	$L/2 =$	4,1821	81920	*v s*	40960	*v d*
f^8 (*fa*$_{10}$)	$L/2 =$	3,9207	87381,3	*v s*	43690,6	*v d*
g^8 (*sol*$_{10}$)	$L/2 =$	3,4851	98304	*v s*	49152	*v d*
a^8 (*la*$_{10}$)	$L/2 =$	3,1366	109226,6	*v s*	54613,3	*v d*
h^8 (*si*$_{10}$)	$L/2 =$	2,7880	122880	*v s*	61440	*v d*
c^9 (*ut*$_{11}$)	$L/2 =$	2,6138	131072	*v s*	65536	*v d*
d^9 (*ré*$_{11}$)	$L/2 =$	2,3234	147456	*v s*	73728	*v d*
e^9 (*mi*$_{11}$)	$L/2 =$	2,0911	163840	*v s*	81920	*v d*
f^9 (*fa*$_{11}$)	$L/2 =$	1,9604	174762,6	*v s*	87381,3	*v d*
		1,9033	180000	*v s*	90000	*v d*

Fig. 2 zeigt die Staubfiguren der Töne c^5, c^6, e^6, g^6, c^7, Figg. 3, 4, 5 die der Töne von c^7 bis c^8, von c^8 bis c^9 und von c^9 bis f^9, nebst drei mit der Stimmgabel von 90000 Schwingungen erhaltenen Figuren, in fast genau natürlicher Grösse.

Die Glasröhren waren mit einem ihrer Enden in Rinnen, unter federnden Stahllamellen, auf einem Brette befestigt, das sie

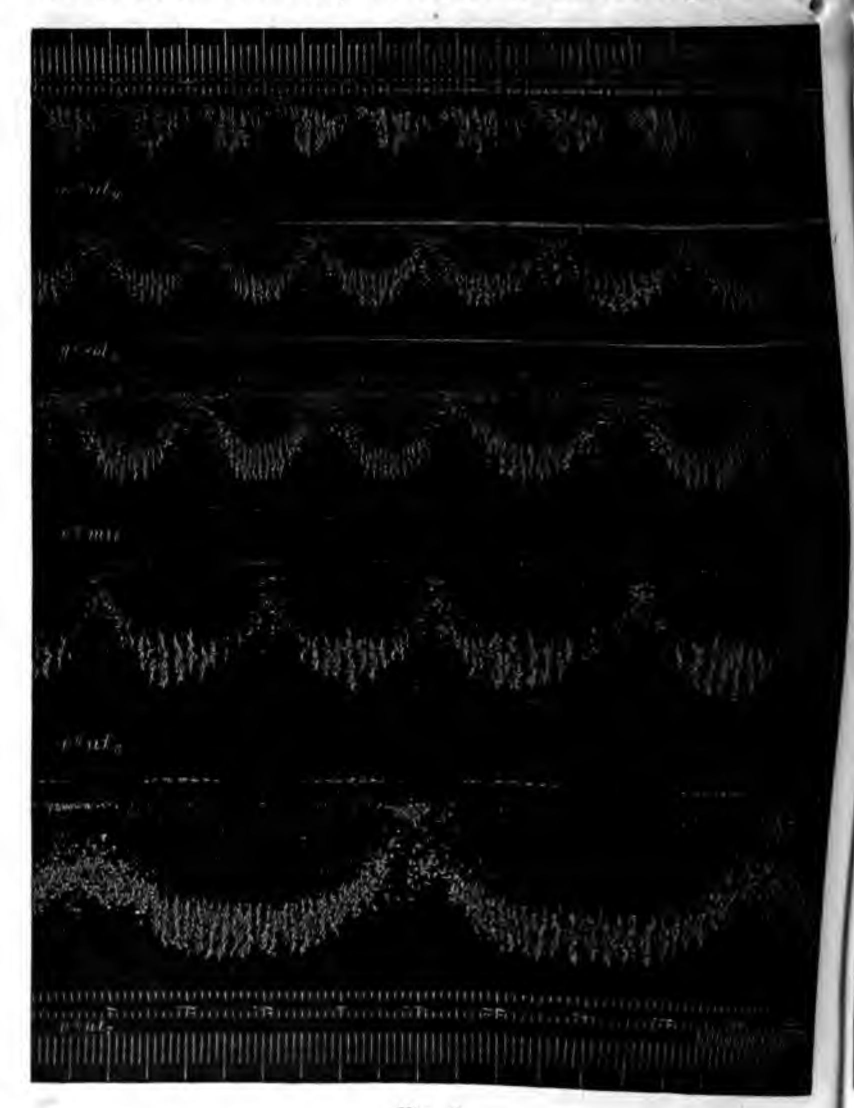


Fig. 2.

seitlich über einer schwarzen Sammetfläche überragten, zwischen zwei in Millimetern getheilten Maassstäben, welche jedoch

natürlich zu ganz genauen Messungen der photographirten Staubwellen nicht werden dienen können, da die Staubwellen

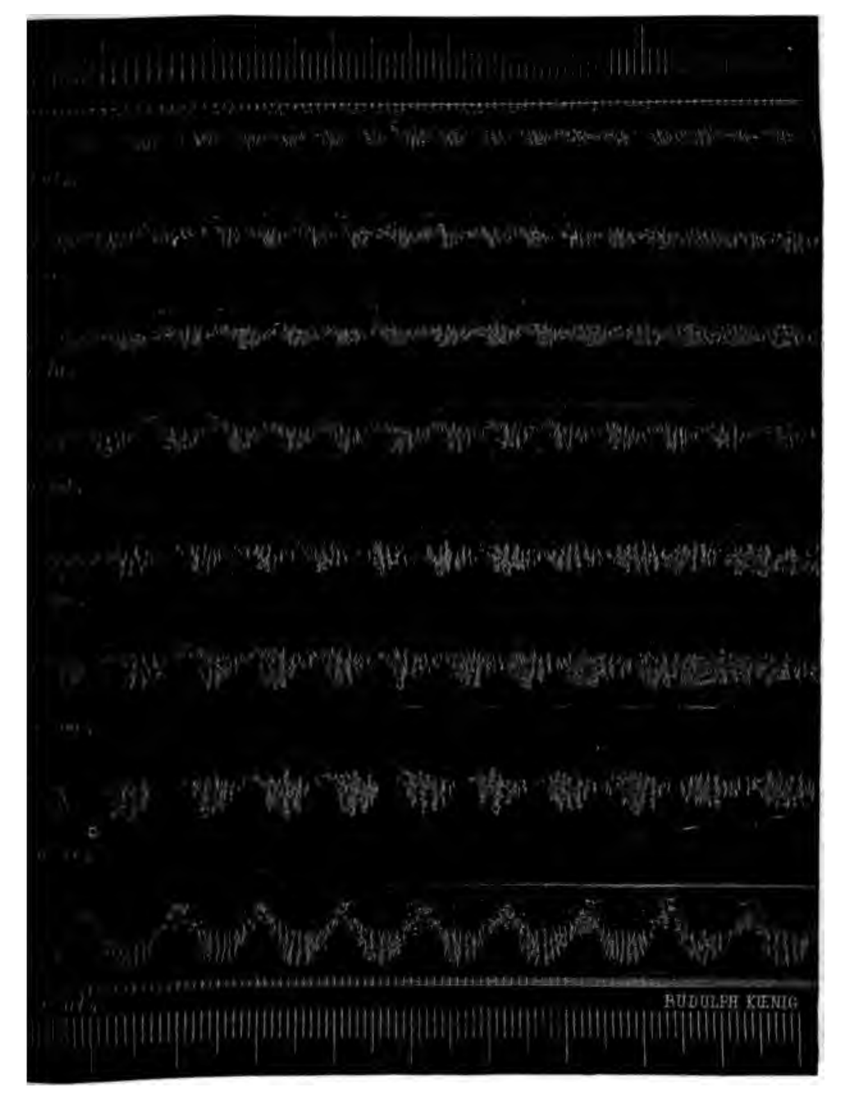


Fig. 3.

und die Theilungen beim Photographiren sich nicht genau in der gleichen Ebene befanden. Da schon die geringste Er-

schütterung hinreicht, diese Staubfiguren, besonders die der höchsten Töne, theilweise oder gar ganz zu zerstören, so ist

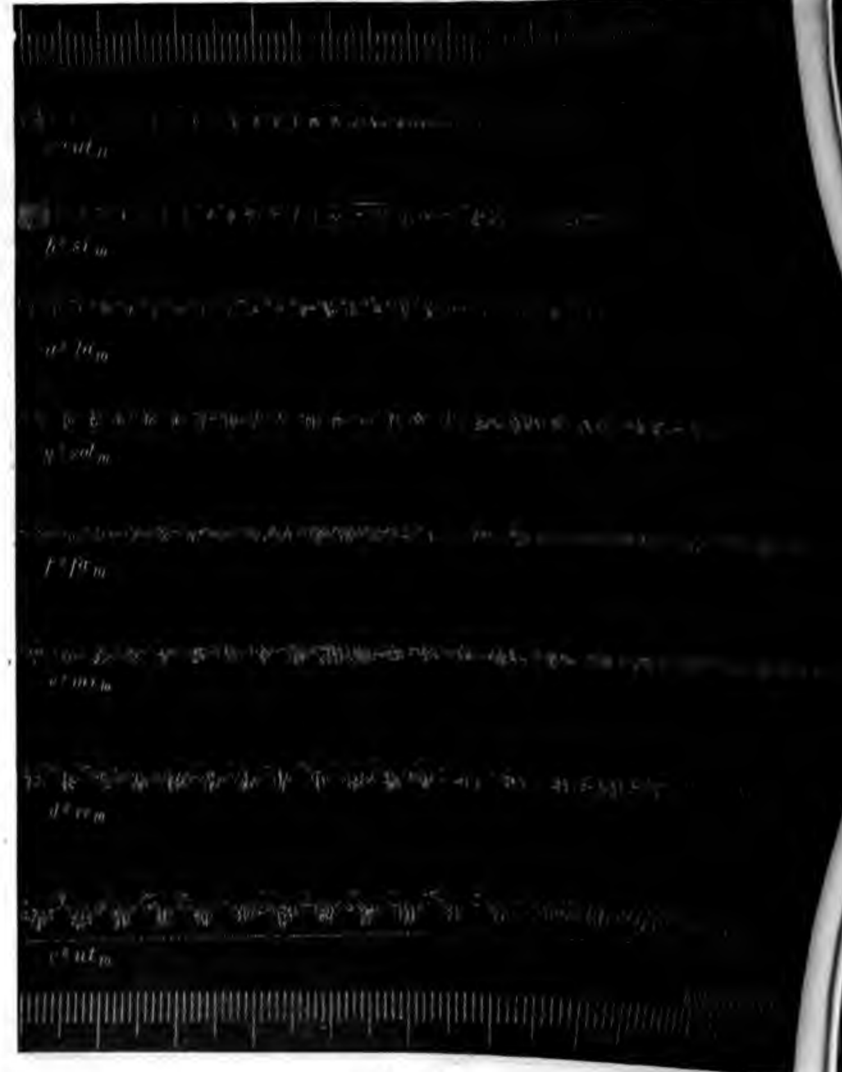


Fig. 4.

es nicht leicht, eine grössere Anzahl solcher Glasröhren nahe aneinander zu befestigen und dabei jeden, auch selbst geringsten

selbst aber verdanke ich Hrn. Prof. Marey, welcher so freundlich war, dieselben bei mir und unter seiner eigenen Leitung aufnehmen zu lassen, wofür ich ihm, wie auch den Herren Lucien Bull und Kossonis in seinem Laboratorium, die mich dabei unterstützten, hiermit meinen aufrichtigen und herzlichsten Dank sage. Die Figg. 2—6 sind heliographisch von P. Dujardin ausgeführt worden.

4. Bemerkungen über die Staubfiguren der Töne von c^5 bis f^7.

Der Grad der Genauigkeit der Bestimmung von Schwingungszahlen, welcher sich vermittels der Methode der Staubfiguren erreichen lässt, hängt von der Messung der Länge der Staubwellen in den Röhren ab, und von der Uebereinstimmung der Länge dieser Wellen mit der Länge der Wellen derselben Töne in der freien Luft.

Um die directe Messung der Länge der Staubwellen in den Röhren mit absoluter Genauigkeit ausführen zu können, müsste man in zwei Wellen zwei sich ganz genau entsprechende Punkte auffinden können, und man weiss, dass dieses bei den verhältnissmässig noch langen Halbwellen von c^4 bis c^5 allerdings nicht gut angeht, doch lässt sich die hieraus entspringende Fehlerquelle erstens schon dadurch verringern, dass man statt die Mittelpunkte zweier Knoten oder zweier Bäuche in zwei Wellen aufzusuchen, vielmehr zwei Punkte wählt, welche von der Mitte der Knoten oder Bäuche gerade so weit in derselben Richtung entfernt sind, dass ein Abstand von dieser überhaupt nicht mehr zweifelhaft sein kann, wodurch in jedem Falle schon die Möglichkeit, dass sich die Ungenauigkeiten in den Bestimmungen der beiden Punkte summiren könnten, verhindert wird, dann aber ist es möglich, den Mittelwerth der Halbwellenlänge aus Messungen sehr beträchtlich viel zahlreicherer Wellenreihen abzuleiten, als man es bis jetzt immer gethan hat. Ich fand in der That, dass eine Stimmgabel c^5 mit Zinken von 20 mm Breite[1]) nicht nur in einer Röhre von 23 mm Durchmesser eine Reihe von 38 bis 40 gut ausgebildeter Halbwellen, wie sie Fig. 2 zeigt, hervorrief, sondern dass in zwei aneinander gesetzten und luftdicht miteinander verbundenen gleichen Röhren die Bildung der 75—80 auf-

1) Aus Cat. Nr. 201. 1889.

einanderfolgenden Halbwellen auch noch durchaus nichts zu wünschen übrig liess. Erst nach dem Ansatz noch einer dritten solchen Röhre wurden die Rippen der Halbwellen weniger scharf, ohne jedoch dass die Wellen selbst, welche jetzt eine Reihe von 115—120 bildeten, darum ihre Messbarkeit verloren hätten. Mit einer Stimmgabel c^6[1]) erhielt ich in zwei aneinander gesetzten Röhren von 20 mm ebenfalls 90 bis 100 aufeinanderfolgende gut messbare Halbwellen, und mit der Stimmgabel c^7, aus demselben Satze, in einer Röhre von 11 mm Durchmesser, auch noch gegen 100 gut ausgebildeter Halbwellen, welche sich jedoch nach Ansatz einer zweiten gleichen Röhre nicht mehr hervorrufen liessen.

Es ist offenbar, dass man sich bei der Bestimmung der beiden sich entsprechenden Punkte in zwei Wellen weder um die Hälfte, noch um ein Viertel einer Halbwelle wird irren können, selbst die Annahme, dass der Irrthum ein Achtel oder ein Zehntel ihrer Länge sollte betragen können, dürfte durchaus übertrieben erscheinen, ein Fehler dieser letzten Art, welcher bei der directen Messung nur einer einzigen Halbwelle die Bestimmung der Schwingungszahl dann allerdings um einen ganzen Ton fälschen würde, müsste aber auf hundert Wellen vertheilt, welche man mit den Tönen von c^5 bis c^6 ganz bequem erhalten kann, nur noch einen Fehler von weniger als einem Komma bedingen. Bei den Tönen über c^7 hinaus muss aber die Länge der Röhren dann einer immer geringeren Anzahl von Halbwellen gleich werden, wenn man in ihnen gute Staubwellen erhalten will. So fand ich, dass in der Mitte der Octave von c^8 bis c^9, in Röhren, deren Länge etwa die von 50 Halbwellen der betreffenden Töne war, sie sich schon schlecht oder gar nicht mehr bildeten, während sie nach der Verkürzung der gleichen Röhren um 10 bis 15 Halbwellen dieser Töne sofort wieder erhalten werden konnten. Wenn bei sehr hohen Tönen die höchst mögliche Genauigkeit in ihrer Tonbestimmung hiernach also allerdings etwas geringer wird, so gewinnt sie andererseits auch wieder durch den Umstand, dass die vermittelst dieser höchsten Töne hervorgerufenen Staubfiguren schliesslich nur noch in einer Reihe

1) Aus Cat. Nr. 50. 1889.

ganz kleiner gleicher Anhäufungen in den Wellenbäuchen bestehen, welche wie eine Reihe einzelner Perlen in gleichen Abständen aneinander aufgereiht liegen, deren Mittelpunkte sich mit grosser Genauigkeit bestimmen lassen.

Für die Herstellung der Töne über c^7 schien mir übrigens die möglichst genaue Messung der Länge einer Reihe von 20 Halbwellen durchaus hinreichend, und so habe ich bei derselben immer nur Röhren angewendet, welche nicht mehr als 30 Halbwellen der betreffenden Töne enthalten konnten, wo ich dann immer mit Fortlassung einiger Wellen an den Enden der Röhre die gewünschte Reihe von 20 gleichmässigen Halbwellen erhalten, und gewöhnlich sogar von mehreren verschiedenen Ausgangspunkten messen konnte.

Die Weite der Röhren ist bei diesen Experimenten von noch viel grösserer Wichtigkeit als ihre Länge, denn wie man weiss, ist erstens die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft in zu engen Röhren geringer als in der freien Luft, sodass also auch die Staubwellen in solchen eine Verkürzung erleiden müssen, dann aber bewirkt eine nicht genügende Weite der Röhren auch, dass in ihnen die Länge der Staubwellen in merklicher Weise von der Intensität der sie erzeugenden Töne abhängig wird. Es war hiernach also aus doppeltem Grunde wichtig, zu untersuchen, welchen Durchmesser eine Röhre mindestens haben müsse, damit sich ein gegebener Ton in ihr ungestört und mit gleicher Geschwindigkeit wie in der freien Luft fortpflanzen könne. Nach Kundt soll dieser Durchmesser immer zum wenigsten gleich der Viertelwelle des Tones sein, doch da er seine Untersuchungen nicht auf die sehr hohen Töne ausgedehnt hat, so dürfte man nicht berechtigt sein, ungeprüft anzunehmen, dass seine Regel auch auf diese anwendbar sein müsse.

Unter dem Einflusse der Stimmgabel c^6 mit der Zinkenbreite von 20 mm, entstanden bei der gerade im Zimmer herrschenden Temperatur Staubwellen, deren Länge in Röhren von 27, 23 und 20 mm Durchmesser immer 41,6 mm betrug, die Intensität des Tones mochte sein, welche sie wollte. Die Veränderung in derselben wurde nicht durch verschieden starkes Anstreichen der Gabel bewirkt, sondern dadurch, dass man die vor dem offenen Ende der Röhre wirkende Zinken-

fläche der Gabel, welche immer gleich in möglichst starke Schwingungen versetzt wurde, von diesem offenen Ende allmählich entfernte, bis die Staubfiguren anfingen, undeutlich und nicht mehr gut messbar zu werden, was bei den Röhren von 27 und 23 mm Durchmesser geschah, wenn die Entfernung der Zinkenfläche von ihrem offenen Ende etwa 50 mm, bei der von 20 mm Durchmesser etwa 20 mm betrug. In Röhren mit Durchmessern von 15 und 20 mm war die durchschnittliche Länge der Halbwellen dann aber bei stärkstem Tone 41,4 mm geworden, und fand sich bei geschwächtem Tone, wenn die Entfernung der Stimmgabelzinke von dem offenen Ende der Röhre von 15 mm Durchmesser 15 mm, von dem der Röhre von 10 mm Durchmesser etwa 7 mm betrug, = 41,4 bis 41,5 mm, sodass in diesen beiden Fällen sich also schon der Einfluss der zu geringen Weite der Röhre sowohl auf die Länge der Staubwellen erkennen lässt, wie auch dass diese Länge hier nicht mehr von der Intensität des Tones ganz unabhängig ist. In einer Röhre von 8 mm Durchmesser bilden sich die Staubwellen in der Nähe des offenen Endes schon sehr schlecht aus, sie bestehen hauptsächlich nur noch aus einer Folge von Rippen, in denen die Gliederung nur sehr wenig ausgeprägt ist und die im übrigen Theil der Röhre gut ausgeprägten Halbwellen sind nicht gleichförmig, so betrug ihre Länge bei starkem Tone in der dem geschlossenen Ende der Röhre zunächst liegenden Hälfte 41,3 mm und in der anderen Hälfte nur 40,4 mm. Auch änderte sich diese Länge mit der Intensität des Tones, doch waren alle diese Erscheinungen so schwankend und gestatteten so wenig wirklich genaue Messungen, dass ich sie nicht weiter untersucht.

An den mit der Stimmgabel c^6 erzsugten Staubwellen, welche nur noch die halbe Länge als die von c^5 haben, lassen sich die Messungen schon mit sehr viel grösserer Genauigkeit ausführen. In einer Röhre von 20 mm Durchmesser, und welche die Länge von etwa 50 Halbwellen des Tones hatte, erhielt ich alle diese Halbwellen von einem ihrer Enden bis zum anderen so scharf ausgebildet, dass verschiedene Messungen von 40 Halbwellen enthaltenden Reihen immer fast ganz genau denselben Mittelwerth von 20,85 mm für eine Halbwelle ergaben, welcher auch bei den verschiedenen Abständen der

Gabelzinke vom offenen Ende der Röhre bis zu 50 mm durchaus unverändert blieb. In einer Röhre von 15 mm Durchmesser erhielt ich auch noch gute Staubfiguren in ihrer ganzen Länge, und fand bei der stärksten Intensität des Tones die Länge der Halbwellen = 20,78 mm, und bei einem Abstande der Gabelzinke von 40 mm = 20,85. In einer Röhre von 10 mm Durchmesser entstanden weit weniger gute Staubfiguren, welche sogar in der Nähe ihres offenen Endes schon ganz schlecht waren, und die Länge der Halbwellen in ihr bei stärkstem Tone war = 20,71 mm, beim schwächsten = 20,85 mm. In einer Röhre von 8 mm endlich bildeten sich gute Staubwellen nur noch in den ihrem geschlossenen Ende zunächst liegenden zwei Dritteln ihrer Länge, welche bei stärkstem Tone 20,60 mm, beim schwächsten 20,70 mm lang waren.

Die Stimmgabel c^7 erzeugte in einer etwa 95 Halbwellen des Tones langen Röhre mit dem Durchmesser von 15 mm, von einem bis zum anderen Ende scharf ausgeprägte, aber unregelmässig geformte Wellen, in deren Folge sich jedoch eine gewisse Periodicität erkennen liess und in denen die Rippen nicht senkrecht zur Axe der Röhre standen, sondern sich abwechselnd bald nach einer, bald nach der anderen Seite hinneigten. Diese Art der Staubfiguren zeigt immer eine zu grosse Weite der Röhre an. In einer Röhre von 14 mm Durchmesser waren die Wellen schon etwas regelmässiger, sie wurden es aber ganz und gar erst, wenn der Durchmesser der Röhre nur noch 11 mm betrug, wo dann auch die Länge der Halbwellen bei verschiedener Intensität des Tones immer dieselbe von 10,45 mm blieb. In Röhren von 10 oder gar 9 mm Durchmesser lässt sich aber dann schon wieder der Einfluss der zu geringen Weite der Röhre beobachten, und in einer Röhre von 5 mm Durchmesser betrug die Länge der Halbwellen bei stärkstem Tone nur noch 10,0 mm, bei schwächstem 10,3 mm.

Aus diesen Beobachtungen geht also hervor, dass für den höchsten musikalischen Ton c^5 die Regel von Kundt noch vollständig gültig ist und man sie also für ihn Röhren, deren Durchmesser gleich der Viertelwelle des Tones ist, anwenden kann, für c^6 ist aber die passendste Röhrenweite ungefähr

eich 'der Halbwelle des Tones, denn wenn diese noch drei :htel der Wellenlänge beträgt, zeigt sich in den Staubwellen hon der schädliche Einfluss eines zu geringen Durchmessers, ıd bei der Weite von einer Viertelwelle wird die Röhre für le genaueren Experimente sogar schon geradezu unbrauchbar. e von mir experimentell gefundene passendste Weite für le Töne über c^6 bis zu den höchsten hin, wuchs dann aber ır noch von der Hälfte bis etwa zu zwei Drittel der Wellen- ıge, und betrug also für c^7 11 mm, für c^8 5,5 mm, für c^9 mm, und ähnlich so dann auch für alle Zwischentöne.

Die Fig. 6 veranschaulicht den Einfluss der Röhrenweite f die Staubfiguren durch zwei Gruppen von drei Staub- uren, welche mit den Stimmgabeln c^7 und c^8 in einer zu ıiten, in einer passenden und in einer zu engen Röhre er- ugt wurden, und ausserdem zeigt die einzelne Röhre über ısen beiden Gruppen auch noch die Figur von c^9 in einer weiten Röhre allein.

Die Grenzen der geringsten und grössten Weite der Glas- hren, bei welcher ein gegebener Ton gute Staubwellen in nen erzeugen kann, rücken mit der Höhe dieses Tones immer her aneinander, sodass es bei den höchsten Tönen zwischen und 90 000 Schwingungen schon schwer ist, Glasröhren von nau richtigem Durchmesser anzutreffen, was mir der haupt- chlichste Grund dafür zu sein scheint, dass die Staubfiguren ser Töne, wie man aus Fig. 5 ersehen kann, alle immer r in einem Theile der Röhrenlänge, statt von einem Ende ı zum anderen derselben gut ausgebildet sind.

Die Wanddicke der Glasröhren hat natürlich auf die Bil- ng der Staubfiguren in ihnen an und für sich gar keinen nfluss, da jedoch bei diesen Experimenten der Rand der ıhre nie die Oberfläche der Gabelzinken überragen darf, ı nicht die Bewegung des anstreichenden Bogens zu stören, wird der Mittelpunkt der Röhrenöffnung um so weiter von m Ende, und also gerade von dem am stärksten schwingen- n Theile der Gabelzinke entfernt, als die Wanddicke der ıhre zunimmt, was dann bei den höchsten Tönen das Ge- gen der Experimente oft schon ganz und gar verhindern kann, bei diesen der blosse Durchmesser der Röhrenöffnung schon mer nur noch sehr wenig kleiner ist als die ganze Zinkenlänge

schliffen sein, um parallel und dicht vor die schwingende Zinkenfläche der Stimmgabel eingestellt werden zu können. Da die Röhre auf ihrem Gestelle natürlich immer eine durchaus horizontale Lage haben muss, weil sonst der Staub sich in ihrem tiefer liegenden Theile anhäufen würde, ist es nöthig, dass die Zinkenfläche immer genau senkrecht vor ihr eingestellt werden könne und zu diesem Zwecke ist die Schraubenmasse, in welcher der Stiel der Stimmgabel befestigt wird, auf ihrem eisernen Ständer drehbar, was gestattet, dieser jede



Fig. 7.

beliebige Neigung zu geben. Fig. 7 zeigt die ganze Zusammenstellung während eines Versuches.

Das gute Gelingen der Staubfiguren ist auch von dem angewendeten Staube nicht ganz unabhängig, und ich fand, dass sich Korkfeilicht am besten für diese Experimente eignete, besonders wenn man ihn für die verschieden hohen Töne mit verschiedener Körnergrösse wählte. Ich wendete fünf Sorten an, welche vermittelst einer Reihe von fünf Sieben hergestellt waren, deren Löcher von einem zum andern immer kleiner wurden, sodass sie auf einem Quadratcentimeter annähernd 277, 670, 1660, 3080 und 4444 Löcher enthielten,

oder genau nach den Angaben der Fabrik der Drahtnetze 45, 70, 110, 150 und 180 Maschen auf einem Zoll zu 27 mm. Ich verwendete die erste und zweite Sorte hauptsächlich für die Töne von c^5 bis c^7, und die beiden nächsten dann für die höheren Töne. Das letzte feinste Sieb mit 4444 Löchern hatte aber einen so feinen Staub ergeben, dass er ganz so wie Lycopodiumpulver wirkte, sich wie dieses mehlartig zusammenbackte und auch an den Wänden der Röhre zu fest anklebte, wenn man auch auf die Reinigung dieser vor der Einführung des Staubes in sie alle nöthige Sorgfalt verwendet hatte.

Wenn der Staub in der Röhre gleichmässig vertheilt ist und auf dem Boden derselben eine Linie bildet, so muss man die Röhre um ihre Axe drehen, um dieser Linie eine höhere Lage auf der Seitenwand zu geben, unter dem Einflusse des Tones bilden sich dann sehr oft noch die Wellenfiguren ganz vortrefflich, selbst in Fällen, in denen sich die am Boden befindliche Staublinie gar nicht mehr rühren will, und zeigt dann die bogenförmigen Zacken, in denen die Staubrippen wie Fransen herabzuhängen scheinen, eine Form, welche auch für die Bestimmung der Knotenstellen bei den tieferen Tönen vortheilhaft ist, bei denen sie oft recht scharfe Spitzen bildet, wie man besonders gut auf Fig. 2 sehen kann. Bei den ganz hohen Tönen habe ich häufig auch noch einen anderen kleinen, aber oft sehr erfolgreichen Kunstgriff angewendet. Wenn nämlich auch die hochgelegte Staublinie sich durchaus nicht mehr rühren wollte, gab ich einen kleinen Schlag gegen das Gestell, auf welchem die Röhre befestigt war, sodass der Staub der hochgelegten Linie niederfiel und auf dem Boden der Röhre eine neue Staublinie bildete, welche ich so schnell als möglich durch Drehung der Röhre wieder in eine hohe Lage brachte, um dann den Bogenstrich über die Gabel sogleich folgen zu lassen. In sehr vielen Fällen habe ich bei diesem Verfahren dann die Figur erhalten, wahrscheinlich wohl, weil der während des ersten Niederfallens gelockerte Staub noch nicht Zeit gehabt hatte, in der neu gebildeten Linie sich wieder zu fest zusammenzubacken, ehe die Wirkung des Tones erfolgte.

5. Prüfung einer mit Hülfe der Stosstöne gestimmten Stimmgabelreihe von c^5 bis f^7 vermittelst der Kundt'schen Staubfiguren.

Es ist nach den vorstehenden Erörterungen selbstverständlich, dass man vermittelst der Staubfiguren nun auch mit Leichtigkeit wird prüfen können, bis zu welcher Genauigkeit in der Stimmung der hohen Stimmgabeln ich es vermittelst der Anwendung der Stosstöne hatte bringen können, ich finde aber dass die Prüfung einer von mir gelieferten Stimmgabelreihe durch irgend einen anderen Gelehrten und ohne mein Zuthun, zweckentsprechender sein dürfte, als wenn ich meine eigenen Messungen an einer von mir selbst früher gestimmten Stimmgabelreihe nun mit dieser in ihrer Anwendung neuen Methode von Kundt geben möchte. Eine solche Arbeit ist aber, jetzt auch schon wirklich, und zwar von Hrn. Dr. Schwendt in Basel ausgeführt worden, der eine der einzigen sechs von mir mit Stosstönen gestimmten vollständigen Stimmgabelreihen von c^6 bis f^7 besitzt, welche ich überhaupt jemals geliefert habe.[1]) Nach einigen Mittheilungen darüber, wie ich meine Versuche mit den Kundt'schen Staubfiguren in Verbindung mit den hohen Stimmgabeln angestellt, war es auch ihm sehr bald gelungen, gute Staubfiguren mit den Tönen von c^5 bis f^7, seiner ganzen im Jahre 1897 von mir bezogenen Stimmgabelreihe zu erhalten und dann die nöthigen Messungen an denselben zu vollziehen. Da Hr. Dr. Schwendt die Resultate dieser Messungen nun schon selbst veröffentlicht hat[2]), so kann ich natürlich einfach auf seinen Aufsatz verweisen, aus welchen man ersehen wird, wie gering überall der Unterschied zwischen den erforderten und den von ihm gefundenen Werthen ist. Als ein Beispiel mag seine Bestimmung der Schwingungszahl seines höchsten Tones f^7 dienen, für welche er statt 43690,6 *v s*, 31 *v s* mehr gefunden. Nun sind seine Messungen aber bei 15° ausgeführt, während die Gabel in Ueber-

1) Von den anderen fünf Stimmgabelreihen sind zwei in Amerika, eine ist in England, eine in Frankreich und eine in Russland.

2) A. Schwendt, Archiv für die ges. Physiol. 75. p. 346. 1899. Experimentelle Bestimmung der Wellenlänge und Schwingungszahl höchster hörbarer Töne, mit Benutzung von Hrn. Rudolph Koenig brieflich mitgetheilter praktischer Anleitungen, ausgeführt von A. Schwendt.

einstimmung mit der Normalgabel $c' = 512$ *vs* bei 20° construirt war. Da der Einfluss der Wärme auf Stimmgabeln aus Stahl für $1° = \pm 0{,}0001117$ *vs* ist[1]), so muss also eine Gabel f^7 von 43690,6 *vs* bei 20°, bei der Temperatur von 15° $43690{,}6 \,.\, 0{,}0001117 \,.\, 15 = 24{,}4$ *vs* mehr machen, wodurch der schon an und für sich so kleine Unterschied von 31 *vs* zu einem von 6,6 *vs* verringert wird, und dann die durch beide verschiedene Methoden erhaltenen Werthe so gut wie vollständig übereinstimmen.

Paris, Juni 1899. (Schluss im nächsten Heft.)

1) R. Koenig, Wied. Ann. **9.** p. 408. 1880; Quelques Exp. p. 185.

(Eingegangen 7. Juli 1899.)

6. *Experimentaluntersuchungen über den Ursprung der Berührungselektricität;*
von C. Christiansen.

(Vierte Mittheilung.)

Ueber den Einfluss des Wasserdampfes.

---

§ 29. Theorie der Tropfenelektrode.

Denken wir uns einen Quecksilberbehälter, aus welchem Quecksilber als dünner Strahl ausfliesst, und sich in Tropfen auflöst. Das Quecksilber sei mit dem einen Quadrantenpaare eines Thomson'schen Elektrometers verbunden, das andere Quadrantenpaar sei zur Erde — Wasserleitung — abgeleitet. Fällt der Strahl im Inneren eines hohlen Metallcylinders, dem z. B. mittels einer galvanischen Batterie das Potential V gegeben ist, dann wird das Elektrometer dasselbe Potential V anzeigen. Wir haben hier eine reine Erfahrungsthatsache. Die Theorie folgert hieraus, dass im Raume zwischen dem Cylinder und dem Strahle die elektrische Kraft Null ist. Wenn dieses Gleichgewicht erreicht ist, muss sowohl die innere Oberfläche des Cylinders als die Oberfläche des Strahles unelektrisch sein.

Streng genommen gilt dies jedoch nur, wenn der Cylinder und der Strahl von demselben Metalle gebildet ist. Ist der Cylinder von Zink, und ist er zur Erde abgeleitet, so giebt das Elektrometer einen positiven Ausschlag, entsprechend der bekannten Potentialdifferenz zwischen Zink und Quecksilber. Auch in diesem Falle muss die elektrische Kraft im Innern des Cylinders Null sein, beide, Quecksilber und Zink, sind also ungeladen. Das constante Potential im Innern des Gliedes nennen wir C. Bezeichnen wir das Quecksilber mit Hg, die Elektrometerquadranten mit El, dann wird das Potential P_1 des isolirten Quadrantenpaares

$$P_1 = C + El \mid \mathrm{Hg}.$$

Bezeichnen wir allgemein das Metall, von welchem das Rohr gebildet ist, mit X, so haben wir für das Potential P_2 des abgeleiteten Quadrantenpaares

$$P_2 = C + El \mid X.$$

Der Ausschlag des Elektrometers entspricht folglich einer Potentialdifferenz $D = P_1 - P_2$,

$$D = El \mid \mathrm{Hg} - El \mid X = X \mid \mathrm{Hg}.$$

Wir bestimmen folglich mittels der Tropfenelektrode die Potentialdifferenz der Metalle. Dass die Resultate im Grossen und Ganzen mit dieser Auffassung in Uebereinstimmung sind. haben F. Exner und J. Tuma nachgewiesen.[1])

In der ersten Mittheilung[2]) habe ich eine Reihe von Versuchen beschrieben, in welchen das Quecksilber durch stark verdünnte Amalgamen von Zink, Cadmium, Zinn oder Blei ersetzt war. Wird ein solches Amalgam mit Am bezeichnet. so müssten wir haben

$$D = P_1 - P_2 = X \mid \mathrm{Am}.$$

Es zeigte sich aber, dass die Potentialdifferenz D von der Natur des Gases abhängig war. Hieraus folgt, dass an der Berührungsfläche zwischen Gas und Amalgam ein Potentialsprung stattfinden muss. Dasselbe muss natürlich auch von der Berührungsfläche zwischen dem Metallrohre und dem Gase gelten. Bezeichnen wir das Gas mit L, so haben wir jetzt

$$P_1 = C + \mathrm{Am} \mid L + El \mid \mathrm{Am},$$
$$P_2 = C + \quad X \mid L + El \mid X$$

und

$$D = P_1 - P_2 = \mathrm{Am} \mid L - X \mid L + X \mid \mathrm{Am}.$$

Hier ist nun, wie gesagt, die Natur der Atmosphäre von Bedeutung. Mit Wasserstoff H erhalten wir die Potentialdifferenz

$$D_1 = \mathrm{Am} \mid \mathrm{H} - X \mid \mathrm{H} + X \mid \mathrm{Am};$$

ersetzen wir das Amalgam durch Quecksilber Hg, so erhalten wir

$$D_2 = \mathrm{Hg} \mid \mathrm{H} - X \mid \mathrm{H} + X \mid \mathrm{Hg}.$$

---

1) F. Exner u. J. Tuma, Sitzungsber. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Wien (2) 97. p. 917. 1888.

2) C. Christiansen, Wied. Ann. 56. p. 644. 1895.

Nun zeigen die Tab. IX, X, XI und XII in meiner ersten Abhandlung[1]) unzweideutig, dass für die Metalle Zn, Cd, Pb, Sn $D_1 = D_2$ ist; wir erhalten somit

$$\mathrm{Am} \mid \mathrm{H} + X \mid \mathrm{Am} = \mathrm{Hg} \mid \mathrm{H} + X \mid \mathrm{Hg},$$

oder

$$\mathrm{Am} \mid \mathrm{Hg} = \mathrm{Am} \mid \mathrm{H} - \mathrm{Hg} \mid \mathrm{H}.$$

Weiter folgt aus der Tabelle meiner zweiten Abhandlung[2]), dass Stickstoff, Kohlensäure und Stickstoffoxydul sich ebenso wie Wasserstoff verhalten. Dass alle diese Gase wirklich dem bekannten Spannungsgesetz gehorchen, scheint mir sehr unwahrscheinlich. Ich meine deshalb, dass wir annehmen müssen, dass $\mathrm{Am} \mid \mathrm{Hg} = 0$ ist, oder allgemein, dass zwei sich berührende Metalle dasselbe Potential haben.

In derselben Weise finden wir in einer Sauerstoffatmosphäre die Potentialdifferenzen

$$D_3 = \mathrm{Am} \mid \mathrm{O} - X \mid \mathrm{O} + X \mid \mathrm{Am},$$
$$D_4 = \mathrm{Hg} \mid \mathrm{O} - X \mid \mathrm{O} + X \mid \mathrm{Hg},$$
$$D_3 - D_4 = \mathrm{Am} \mid \mathrm{O} - \mathrm{Hg} \mid \mathrm{O} - \mathrm{Am} \mid \mathrm{Hg}.$$

Hier ist $D_3 - D_4$ immer negativ und wird ungefähr gleich der allgemein angenommenen Potentialdifferenz zwischen dem im Amalgame enthaltenen Metall und dem Quecksilber gefunden. Setzen wir aber, in Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden, $\mathrm{Am} \mid \mathrm{Hg} = 0$, dann entspricht die Differenz $D_3 - D_4$ der Polarisation an der Oberfläche des Amalgames. Wie ich in der ersten Abhandlung gezeigt habe, ist D_3 von der Länge und der Ausflussgeschwindigkeit des Strahles abhängig. Ist der Strahl sehr kurz und ist die Geschwindigkeit gross, dann wird $D_3 = D_4$; wir hätten in diesem Falle die merkwürdige Relation

$$\mathrm{Am} \mid \mathrm{O} - \mathrm{Hg} \mid \mathrm{O} = \mathrm{Am} \mid \mathrm{Hg},$$

der Sauerstoff sollte sich dann ebenso wie Wasserstoff und die übrigen inactiven Gase verhalten. Allen diesen Schwierigkeiten entgehen wir, wenn wir $\mathrm{Am} \mid \mathrm{Hg} = 0$ setzen und annehmen, dass Polarisationen zu ihrem Entstehen Zeit brauchen.

1) C. Christiansen, Wied. Ann. **56.** p. 655 ff. 1895. In der Tabelle XII ist Sauerstoff durch Wasserstoff und umgekehrt zu ersetzen.

2) C. Christiansen, l. c. **57.** p. 690. 1896.

Für Sauerstoff ist diese Zeit jedoch sehr kurz, für die neutralen Gase dagegen so gross, dass die daher rührenden Potentialdifferenzen bei Versuchen mit Tropfelektroden gar nicht zum Vorschein kommen. Was ich hier entwickelt habe, stimmt völlig mit den von Hrn. K. Wesendonck[1]) gemachten Bemerkungen überein, welche ich somit zu meinen eigenen machen kann. Man kann, wie schon von Hrn. Wesendonck hervorgehoben wurde, die Annahme von einer merkbaren Potentialdifferenz der Metalle bei der Berührung nur dann aufrecht halten, wenn man die inactiven Gase, und bei kurz dauernden Amalgamstrahlen auch Sauerstoff in die Spannungsreihe aufnehmen will.

§ 30. Eine neue Versuchsmethode.

In meiner dritten Abhandlung habe ich gezeigt, dass die Einwirkung des Sauerstoffs auf Amalgame selbst durch sehr kleine Feuchtigkeitsmengen wesentlich beeinflusst wird. In möglichst trockenem Sauerstoffe wird ein Amalgamstrahl sehr schnell mit einer dünnen Oxydschicht bedeckt, welche ihn gegen weitere Oxydation schützt. Diese Schicht bildet eine Art von fester Hülle und macht den Strahl „lang“; sie schützt ihn gegen weitergehende Oxydation. In feuchtem Sauerstoff findet dagegen eine Hydratbildung statt, die immer weiter geht, und der Strahl bleibt kurz. Es schien mir wenigstens sehr wahrscheinlich zu sein, dass das elektrische Verhalten des Strahles auch von der Feuchtigkeit abhängen müsste. So etwas hatte ich zwar nicht bemerkt, aber die Luft wurde auch nur auf dem Wege zum Tropfenapparat getrocknet. Aber in meinem Apparate konnte sehr wohl auch etwas Feuchtigkeit von den Glaswänden, Kohlenplatten und den Kautschukpfropfen sich abgelöst haben. Ausserdem hatte ich bei den früheren Versuchen mit Tropfenelektroden mit den kleinen Tropfen zu kämpfen gehabt, die nach allen Seiten fahren, wenn der Strahl sich in Tropfen auflöst. Diese kleinen Tropfen setzen sich auf den Plattenelektroden fest und ändern dadurch ihre Stellung in der Spannungsreihe. Endlich ist es unmöglich, die Tropfenelektroden in trockenem Sauerstoff zu benutzen, weil der Strahl dann „lang“ wird, und sich gar nicht in Tropfen auflöst.

1) K. Wesendonck, Wied. Ann. 58. p. 411. 1896.

Alle diese Schwierigkeiten lassen sich glücklicherweise in folgender Weise überwinden. Es wäre wohl nicht unmöglich gewesen, einen Hohlcylinder von z. B. Zinkamalgam zu bilden und in dessem Inneren eine Tropfenelektrode von Quecksilber anzubringen. Es ist indess viel leichter, eine Reihe von „langen" Amalgamstrahlen als Generatoren des Cylinders zu verwenden; wenn diese Strahlen in hinlänglich grosser Zahl genommen werden, können sie den Cylinder ersetzen.

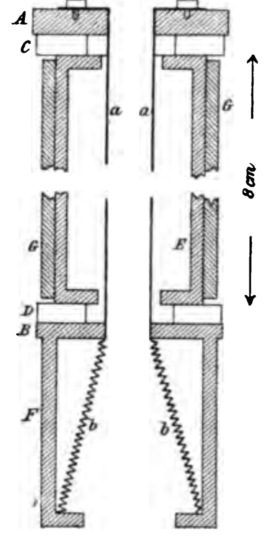


Fig. 1.

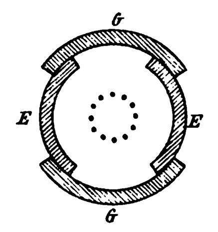


Fig. 2.

Um diese Methode zu prüfen, liess ich einen Apparat verfertigen, welchen Fig. 1 im Längenschnitt, Fig. 2 im Querschnitt darstellt. Zwischen zwei voneinander isolirten Ringen *A* und *B* wurden 12 Platindrähte, deren Durchmesser 0,3 mm betrug, gestreckt. Sie bildeten einen Cylinder, dessen Länge 8 cm, und die des Diameters 6 mm betrug. Das eine Ende war an *A* mittels Schrauben befestigt, das andere war mit den Federn *b b* verbunden. *A* und *B* waren durch Ebonitscheiben, *C* und *D* von dem aufgeschlitzten Messingrohre *E E* isolirt. *G G* ist ein ähnliches Messingrohr, das um *E E* gedreht werden kann; dadurch kann man, wie Fig. 2 zeigt, die Platindrähte gegen äussere elektrische Kräfte schützen.

Inmitten des durch die Platindrähte gebildeten röhrenförmigen Raumes wurde die Tropfenelektrode angebracht, sie war mit dem Elektrometer verbunden. Zwei galvanische Elemente direct mit dem Elektrometer verbunden, hatten eine elektromotorische Kraft von 2,883 Volt. Mit dieser Batterie wurden nun drei Versuchsreihen gemacht. In der ersten waren sowohl die Platindrähte, als die Röhren *E* und *G* mit der Batterie verbunden; das Elektrometer zeigte nun die Spannung V_1 an. In der zweiten waren die Platindrähte zur Erde abgeleitet, *E* und *G* mit der Batterie verbunden, das Elektrometer zeigte

nun die Spannung V_2. In der dritten waren die Drähte mit der Batterie verbunden, die Hülle EG zur Erde abgeleitet; die gefundene Spannung war V_3. In der folgenden Tabelle ist ausserdem unter L die Länge des Strahles, unter P das Volumen des in der Minute ausströmenden Quecksilbers angegeben.

L	P	V_1	V_2	V_3
3 mm	2,7 cm³	2,851	0,060	2,800
18	3,9	2,871	0,058	2,820
30	5,6	2,866	0,066	2,790

Die Werthe von V_2 zeigen, dass die Drähte nicht völlig im Stande sind, äussere Einflüsse abzuhalten, doch beträgt der Fehler nur etwa 2 Proc. der ganzen Spannung.

Dasselbe Resultat konnte mittels Amalgamstrahlen durch den jetzt zu beschreibenden Apparat erhalten werden. AA (Fig. 3) ist ein rohrförmiger Behälter von Eisen, gebildet von einem oberen und einem unteren Theile, die ineinander geschraubt werden, und mittels des ledernen Ringes CC gedichtet werden können. Im unteren Theile sind in einem Kreise von 6 mm Durchmesser 12 Löcher gebohrt, 0,2 bis 0,3 mm im Durchmesser. Der obere Theil BB trägt zwei Röhren FF, durch die eine wird das Amalgam hineingeführt, die andere ist verschlossen. Mittels dieser Röhren wird, wie die Figur zeigt, der Behälter AA an einem Kautschukpfropfen GG befestigt, welcher in einem weiten Glasrohre befestigt ist. In diesem Rohre stecken ausserdem zwei aufgeschlitzte Röhren von Eisen, die, ganz wie die in Fig. 2 abgebildeten, dazu dienen, die Quecksilberelektrode gegen Influenz von Seiten des Glasrohres zu schützen.

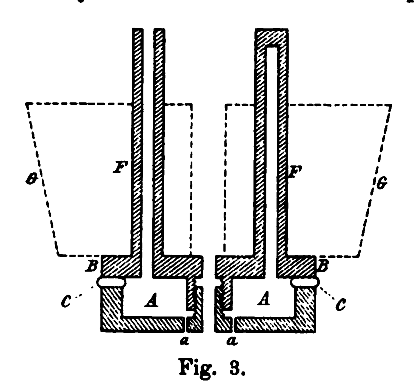


Fig. 3.

Die Figg. 4a und 4b sollen dazu dienen, eine Vorstellung von dem Apparate zu geben. AA, FF ist der in Fig. 3 in natürlicher Grösse gezeichnete Behälter. BB ist das weite Glasrohr, CC das an dem Glase gekittete, aufgeschlitzte eiserne

Rohr. *DD* ist ein abgedrehter Holzklotz; der in Fig. 4a gezeichnete Apparat wird in der Rinne *bb* eingesetzt. *EE* ist der innere Eisenschirm, welcher von der Stange *c* getragen wird. Dieser letztere ist von dem Glasrohre *d* umgeben. *H* ist ein eisernes Rohr, welches in einem Stativ drehbar befestigt ist; es endigt unten in dem umgebogenen Glasrohre *K*.

Die Versuche werden in folgender Weise ausgeführt. Man bringt etwas Quecksilber in die Rinne *bb* und das Rohr *K*, setzt *BB* in *DD* herunter. Von *L* strömt das Quecksilber durch das enge Rohr *e* in einem feinen Strahl aus; Amalgam strömt aus den 12 kleinen Oeffnungen in *AA* in langen Strahlen. Wenn alles in Ordnung ist, wird *DD* soweit umgedreht — etwa 180° — bis das Strahlensystem ganz von den Röhren *CC* und *EE* eingeschlossen ist. Die Röhre *NN* dient zur Füllung des Behälters *AA* mit verschiedenen Gasen.

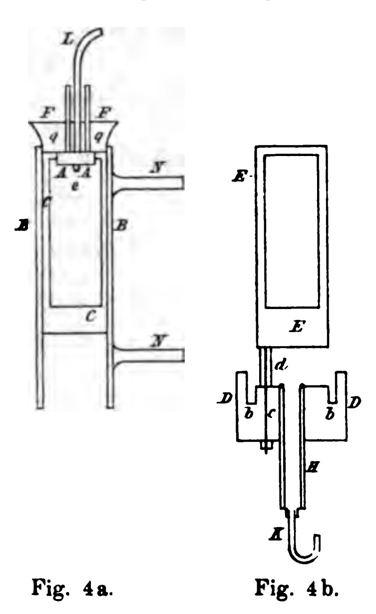


Fig. 4a. Fig. 4b.

§ 31. Versuche mit Zinkamalgamen.

Das Amalgam enthielt 4 pro mille Zink; wenn die Luft nicht zu feucht ist, giebt es immer lange Strahlen. Sauerstoff, welcher zuerst durch Mischungen von concentrirter Schwefelsäure und Wasser getrocknet war, strömte durch den Apparat. Die durch die zwei eisernen Röhren gebildete Hülle war zur Erde abgeleitet, der Behälter mit Amalgam stand nicht direct mit der Erde in Verbindung; zwischen ihnen wurde eine elektromotorische Kraft *e* von $\pm 0{,}143$ Volt eingeschoben.

Die zwölf Amalgamstrahlen bildeten sich sehr gut aus, wie man bei geöffneter Hülle sehen konnte; in ihrer Mitte sah man den Quecksilberstrahl sich in Tropfen auflösen. Die Temperatur betrug 20° C. Wir nennen die Potentialdifferenz zwischen Zinkamalgam und Quecksilber V. Folgende Tab. I

enthält die am Elektrometer gemessenen Potentialdifferenzen, nämlich $V+e$, wenn das Amalgam durch die angeschaltete elektromotorische Kraft positiv geladen wurde, und $V-e$ im entgegengesetzten Falle.

Tabelle I.

Potentialdifferenz V in Volt zwischen Zinkamalgam und Quecksilber in Sauerstoff.

% Schwefelsäure	$V+e$	$V-e$	V	e
40	1,02	0,76	0,89	0,13
40	1,01	0,78	0,89	0,11
50	1,02	0,75	0,88	0,13
50	1,01	0,74	0,87	0,13
60	0,92	0,65	0,78	0,13
60	0,92	0,64	0,78	0,14
70	0,65	0,39	0,52	0,13
70	0,56	0,30	0,43	0,13
70	0,56	0,29	0,42	0,13
80	0,56	0,28	0,42	0,14
80	—	—	−0,49	—
80	—	—	−0,58	—

In den zwei letzten Versuchen waren die Amalgamstrahlen unmittelbar mit der Erde leitend verbunden. Die Länge des Quecksilberstrahles war 18 mm, die Ausflussgeschwindigkeit der Amalgamstrahlen etwa 2 m pro Secunde. Gegenüber der Stelle, wo der Strahl sich in Tropfen auflöste, war also das Amalgam etwa 0,01 sec in Berührung mit dem Sauerstoff gewesen.

Solche Versuche sind recht schwer anzustellen. Die kleinen Oeffnungen, aus denen das Amalgam ausströmt, verstopfen sich leicht; oft sind einige der Strahlen nicht vertical, sondern fahren nach allen Seiten aus. Eben darum war die kleine elektromotorische Kraft $e = 0,143$ zwischen der Erde und den Amalgamstrahlen eingeführt; dass die Versuche für e Werthe ergaben, die nur wenig von 0,14 abweichen, ist der beste Beweis dafür, dass die Amalgamstrahlen den Quecksilberstrahl regelmässig umgaben.

Das Resultat ist aber merkwürdig genug. So lange der Sauerstoff feucht ist, geht alles normal, das Zinkamalgam zeigt dem Quecksilber gegenüber eine Spannung von + 0,88. Wird der Sauerstoff aber mehr und mehr trocken, dann sinkt die Potentialdifferenz und wird negativ, wenn der Sauerstoff mittels

einer Mischung von 80 Proc. concentrirter Schwefelsäure und 20 Proc. Wasser getrocknet ist, was einer Dampfspannung von etwa 0,5 mm entspricht.

Es ist dies jedoch nicht so merkwürdig, als es auf den ersten Blick erscheint. Wir wissen, dass die Metalloxyde dem reinen Metall gegenüber negativ sind, und hier haben wir ja mit Oxyden zu thun; dass wir in Hydroketten immer positive Spannung wahrnehmen, ist somit selbstverständlich.

Mit demselben Amalgam, verdünnt mit dem aus dem mittleren Rohre ausgeströmten Quecksilber, wurden die folgenden Versuche angestellt, bei welchen die Amalgamstrahlen leitend mit der Erde verbunden waren.

Tabelle II.

Potentialdifferenz V in Volt zwischen Zinkamalgam und Quecksilber in Sauerstoff.

% Schwefelsäure	V
50	+0,81
100	−0,30
100	−0,42
100 und P_2O_5	−0,60
100 und P_2O_5	−0,64
50	+0,80
50	+0,78

In dem mit 100 und P_2O_5 bezeichneten Versuche wurde die Luft getrocknet mit concentrirter Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd.

Mit einem schwächeren Amalgam wurden die folgenden Versuche angestellt.

Tabelle III.

Potentialdifferenz V in Volt zwischen Zinkamalgam, $^1/_{1000}$, und Quecksilber in Sauerstoff. Temp. 19° C.

% Schwefelsäure		V		
60		+0,77		
60		+0,89		Das Elektrometer etwas unruhig.
60		+0,83		
80	+0,02		+0,53	Das Elektrometer sehr unruhig.
80		−0,06		
80		−0,16		Das Elektrometer unruhig.
90		−0,66		
90		−0,71		Das Elektrometer unruhig.
100 und P_2O_5	−0,76		−0,66	Das Elektrometer unruhig.
60		+0,73		

Tabelle IV.

Potentialdifferenz *V* in Volt zwischen Zinkamalgam, 1/4 Tausendstel, und Quecksilber in Sauerstoff. Temp. 16° C.

% Schwefelsäure	*V*
70	Die Amalgamstrahlen wurden nicht lang
80	−0,17
90	−0,47
100	−0,54
100 und P_2O_5	−0,54

In den folgenden Versuchen war das Amalgam von derselben Stärke, 1/4 Tausendstel, der Sauerstoff wurde mittels concentrirter Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrocknet.

Länge der Strahlen	*V*
20 mm	−0,58
30	−0,58
19	−0,58
13	−0,58

Sauerstoff mit 80 Proc. Schwefelsäure getrocknet gab $V = -0{,}54$, mit 70 Proc. $V = -0{,}02$ Volt.

§ 32. Versuche mit Amalgamen von Cadmium, Blei und Magnesium.

In den folgenden Versuchen waren die Amalgamstrahlen zur Erde abgeleitet, der Quecksilberstrahl wie immer mit dem Elektrometer verbunden.

Tabelle V.

Cadmiumamalgam, 4/1000, und Quecksilber in Sauerstoff. Temp. 16° C.

% Schwefelsäure	*V*	% Schwefelsäure	*V*
80	−0,11 Volt	60	+0,46 Volt
80	−0,20	60	+0,46
90	−0,40	50	+0,87
100 und P_2O_5	−0,41	50	+0,88
80	−0,40	100 und P_2O_5	−0,33
70	−0,12	100 und P_2O_5	−0,37
60	+0,32	100 und P_2O_5	−0,38

Tabelle VI.

Bleiamalgam, $^4/_{1000}$, und Quecksilber in Sauerstoff. Temp. 14° C.

% Schwefelsäure	V
60	0,62
70	0,62
80	0,62
100 und P_2O_5	0,60

Nun wurde Phosphorpentoxyd in den Strahlapparat selbst hineingebracht, es bedeckte den Boden desselben. Die Potentialdifferenz ward nun wirklich bedeutend kleiner, + 0,27 bis + 0,31 Volt. Mit noch mehr Phosphorpentoxyd habe ich in einem Falle selbst − 0,07 Volt gemessen, doch ging sie bald wieder in positive Werthe über.

Das Arbeiten mit Magnesiumamalgam ist sehr schwierig; das Amalgam enthielt $^1/_4$ pro Mille Magnesium. Die Löcher, aus welchen die 12 Amalgamstrahlen ausströmten, wurden gleich verstopft, wenn die Luft nicht sehr trocken war. Atmosphärische Luft mit P_2O_5 getrocknet, ergab eine Potentialdifferenz von 1,12 Volt; Sauerstoff, in derselben Weise getrocknet gab zuerst 0,99, später 0,97 Volt. Nun wurde das Phosphorpentoxyd in den Strahlapparat selbst hineingebracht, und darauf sank die Potentialdifferenz merklich, anfangs zu + 0,13, später zu − 0,18 Volt, sie war jedoch recht variabel. Der Versuch wurde mit einem neuen Amalgam von derselben Stärke wiederholt und gab noch kleinere Werthe; der kleinste Werth, den ich wahrgenommen habe, ist − 0,98 Volt. In Sauerstoff, welcher eben Spuren von Feuchtigkeit enthielt, war die Potentialdifferenz zwischen Magnesiumamalgam und Quecksilber + 1,17 bis 1,18 Volt.

§ 33. **Resultate.**

Diese Versuche zeigen also, wenigstens für die vier untersuchten Metalle, dass die Potentialdifferenz zwischen einem Amalgam und Quecksilber in Sauerstoff wesentlich durch den Gehalt an Feuchtigkeit bestimmt ist. Ist der Druck der Wasserdämpfe nicht zu klein, so haben wir die gewöhnliche Potentialdifferenz. In sehr trockenem Sauerstoff wird die Potentialdifferenz kleiner und zuletzt negativ. Für die vier untersuchten Metalle haben wir gefunden:

	Im feuchten Sauerstoff	Im trockenen Sauerstoff
Mg | Hg	+1,18	−0,98
Zn | Hg	+0,88	−0,76
Cd | Hg	+0,88	−0,41
Pb | Hg	+0,62	−0,07

Sowohl in trockener als in feuchter Luft spielen sich chemische Processe an der Oberfläche der Amalgamstrahlen ab; in feuchter Luft bildet sich gewiss ein Hydrat, in trockener Luft wahrscheinlich nur Oxyd, doch ist daran zu erinnern, dass wir kein Mittel besitzen, um absolut trockene Gase zu erhalten.

Die für trockenen Sauerstoff angegebenen Potentialdifferenzen sind nicht definitiv, sie entsprechen einem gewissen Grad von Trockenheit; über die Werthe, die absolut trockener Sauerstoff geben würde, kann man noch keine Vermuthung aussprechen.

Kopenhagen, 11. September 1899.

(Eingegangen 13. September 1899.)

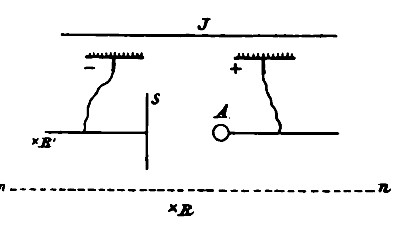
7. *Ueber die Einwirkung von Becquerelstrahlen auf elektrische Funken und Büschel; von J. Elster und H. Geitel.*

In einer früheren Abhandlung[1]), betitelt „Ueber den Einfluss des Lichtes auf die Form der Entladung einer Influenzmaschine“, haben wir mitgetheilt, dass die zwischen einer Kathodenscheibe aus amalgamirtem Zink und einer Anodenkugel aus beliebigem Metalle übergehenden Büschel und Funken einer Holtz'schen Maschine durch die Glimmentladung verdrängt werden, solange die Kathode mit kurzwelligem Lichte bestrahlt wird.

Bei diesem Versuche wird der Raum zwischen den Elektroden durch Einwirkung des Lichtes auf die amalgamirte Zinkkathode mit negativ ionisirter Luft erfüllt. Es lag die Frage nahe, wie unter analogen Versuchsbedingungen eine Luftmasse wirken wird, die positive und negative Ionen in gleicher Menge enthält. Luft, die von Becquerelstrahlen durchsetzt wird, zeigt sich bekanntlich in dieser Art ionisirt. Hr. Giesel war so freundlich, uns einige seiner besten radioactiven Präparate zur Ausführung der Versuche zur Verfügung zu stellen.

Die Versuchsanordnung war folgende (vgl. Figur):

Wir verbanden eine isolirt aufgestellte Scheibe *S* von ca. 10 cm Durchmesser aus beliebigem Metall mit dem negativen Pole einer Influenzmaschine *J* und stellten dieser eine Anodenkugel *A* von ca. 1 cm Durchmesser gegenüber, alsdann verschwanden die zwischen *A* und *S* übergehenden Funken oder Büschel sofort, sobald wir ein Radiumpräparat *R* so näherten, dass die von ihm ausgehenden Becquerelstrahlen den Raum



1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 57. p. 401. 1896.

zwischen Kugel und Platte durchsetzten. Dabei sieht man im Dunkeln, dass durch die Einwirkung der Strahlen die Funken- oder Büschelentladung in eine Glimmentladung übergeht; die Kugel *A* überzieht sich mit einer Kappe violetten Glimmlichtes, die bei Abblendung der Becquerelstrahlen mittels des einige Millimeter starken Bleischirmes *mn* verschwindet, um wieder der Funken- oder Büschelentladung Platz zu machen. Durch abwechselndes Hinwegziehen und Einfügen des Schirmes lässt sich nach Belieben die eine oder die andere Entladungsform erzeugen.

Vergrössert man die Oberfläche der Kathode dadurch, dass man die Metallscheibe durch eine grosse halbleitende Cartonscheibe von 25—30 cm Durchmesser ersetzt, so wird die Büschelentladung gegen die Einwirkung der Becquerelstrahlen so empfindlich, dass die Entfernung zwischen *R* und *S* einen Meter und darüber betragen kann. Bei dieser Anordnung kann das Präparat mit gleichem Erfolge auch *hinter* der Cartonscheibe *S*, etwa bei *R'*, angebracht werden, da das Material der Scheibe für die Becquerelstrahlen fast vollständig durchlässig ist.

Legt man die radioactiven Präparate in ein Bleikistchen von 6 mm Wandstärke, so erlischt die Erscheinung erst, wenn die Entfernung zwischen *R* und *S* 20—25 cm überschreitet.

Im Gegensatze zu den Versuchen mit kurzwelligem Lichte, bei welchen die Kathodenscheibe *S* aus frisch amalgamirtem Zink bestehen muss, ist bei Verwendung von Becquerelstrahlen das Material der negativen Elektrode, sofern es nur nicht isolirend ist, ganz beliebig wählbar. Dagegen stimmen beide Erscheinungsformen darin überein, dass negative Büschel *nicht* zum Verschwinden gebracht werden können. Der Versuch, die eine Entladungsform in die andere überzuführen, gelingt in beiden Fällen nur, wenn *S* Kathode ist. Dieser Umstand hängt wohl mit der verschiedenen Wanderungsgeschwindigkeit positiver und negativer Ionen in dem elektrischen Kraftfelde der Elektroden zusammen.

Als wir die Becquerelstrahlen durch Röntgenstrahlen dadurch ersetzten, dass wir bei *R* eine durch einen Inductor betriebene Röntgenröhre anbrachten, blieb jede Wirkung aus. Der Grund hierfür dürfte in der Intermittenz der Strahlungs-

quelle zu suchen sein. Auch bei dem analogen lichtelektrischen Versuche ist, wie wir schon früher[1]) hervorhoben, eine intermittirende Quelle ultravioletten Lichtes, wie etwa die zwischen Zinkspitzen unter Einschaltung eines Condensators erregten Funken eines grossen Inductoriums, unwirksam.

Auf die Schlagweite von Inductionsfunken wirken die Becquerelstrahlen ebenfalls in unzweideutiger Weise ein. In der bekannten Hertz'schen Anordnung[2]) zum Nachweis des Einflusses ultravioletten Lichtes auf die elektrische Entladung kann man den activen Funken durch eine radioactive Substanz ersetzen. Schaltet man zunächst zwischen der passiven Funkenstrecke und dem radioactiven Stoffe einen Schirm aus dickem Bleiblech ein, so beginnt bei empfindlicher Einstellung das Funkenspiel sofort, sobald man den Bleischirm entfernt.

Auch hier ist es gleichgültig, aus welchem Metalle die Elektrodenkugeln bestehen, ob sie blank oder oxydirt sind, ob die Kathode oder Anode von den Strahlen getroffen wird. Die einzige Bedingung für das Gelingen des Versuches ist die, dass die zwischen den Elektrodenkugeln befindliche Luftschicht von den Becquerelstrahlen durchsetzt wird. Die gleiche Wirkung lässt sich auch dadurch erreichen, dass man der Funkenstrecke ein kleines Gasflämmchen oberhalb oder seitlich so nahe bringt, dass die von dieser ausgehenden Gase in den Raum zwischen den beiden Elektroden eindringen. Das Radiumpräparat unterscheidet sich hinsichtlich seiner Einwirkung auf die Funkenstrecke von der der Flamme nur dadurch, dass es in weiterem Abstande (bis zu 20 cm) das Funkenspiel einleitet.

Wolfenbüttel, im October 1899.

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **39.** p. 332. 1890.
2) H. Hertz, Wied. Ann. **31.** p. 983. 1887.

(Eingegangen 2. October 1899.)

8. *Brechungsexponenten reinen Wassers und normaler Salzlösungen;* *von C. Bender.*

(II. Abhandlung: Brechungsexponenten für H_α, H_β, H_γ bei reinem Wasser, innerhalb der Temperaturgrenzen 40—70°.)

Im Anschluss an meine früheren Untersuchungen [1]), zwischen den Temperaturen 10—40° C., sollen nunmehr die Beobachtungen für Temperaturen zwischen 40 und 75° mitgetheilt werden. Zur Herstellung solcher constanter Temperaturen schaltet man eine flache Heizspirale von Dr. Fletcher derjenigen vor, welche von der Firma Zeiss zu gedachtem Zweck geliefert wird und lässt das erwärmte Wasser eine grosse Flasche von 15—20 *l* Inhalt passiren und zwar zweckmässig unter Anwendung eines Rührers. Die feinere Regulirung geschieht an der Flamme unter der Zeiss'schen Heizspirale. Es gelingt bei einiger Uebung leicht, jede Temperatur verhältnissmässig rasch zu erreichen, und auch beliebig lange festzuhalten.

Wenn die Versuche ein richtiges Resultat geben sollen, muss der Glaswürfel, auf welchen die Strahlen streifend einfallen, die gleiche Temperatur besitzen, wie die Flüssigkeit. In dieser darf weder Schichtenbildung noch Zirkulation stattfinden. Endlich soll die Temperatur der den Glaswürfel umgebenden Luft 20° C. nicht wesentlich übersteigen, denn für diese Temperatur sind die dem Apparat beigegebenen Constanten berechnet.

Die erste und die dritte der angegebenen Bedingungen collidiren miteinander. Es gelingt nur schwer, den Glaswürfel gleichmässig zu erwärmen, ohne Anwendung einer Schutzkappe. Diese bedingt nun ihrerseits eine Steigerung der Lufttemperatur in der Umgebung des Würfels, hat aber den Vorzug, dass die Dichte der Luft an der Austrittsstelle der Strahlen eine ziemlich gleichmässige ist.

Die Untersuchungen von V. v. Lang über den Brechungsexponenten der trockenen Luft gegen den luftleeren Raum geben einigen Aufschluss, wie weit die Dichte der Luft den

---

1) C. Bender, Wied. Ann. 68. p. 343. 1899.

Austrittswinkel beeinflusst. Für den genannten Brechungsexponenten gilt die Formel[1]):

$$n_t = n_0 - 0{,}000\,000\,905\,t + 0{,}000\,000\,002\,2\,t^2.$$

Hieraus:

$$n_{70} - n_{20} = -\,0{,}000\,036,$$

eine Grösse, welche die fünfte Decimale beeinflusst.

Von etwa 65° an erscheinen die Grenzlinien, auf welche eingestellt wird, nicht mehr ganz scharf. Diese Erscheinung lässt sich nicht auf die Gegenwart von Luftbläschen zurückführen, welche sich zwischen Wandung und Flüssigkeit bilden; denn es wurden nur luftfreie Flüssigkeiten untersucht, welche vorher für sich auf die gewünschte Temperatur erhitzt worden waren. Diese wurden erst eingefüllt, nachdem der Apparat eben diese Temperatur angenommen hatte. Es scheinen also Schichtenbildung und Strömungen im Innern der Flüssigkeiten die Ursache der Unschärfe der Grenzlinien zu sein. Lufthaltige Flüssigkeiten können überhaupt bei höheren Temperaturen nicht untersucht werden.

Nach dem Gesagten kann man eine grössere Genauigkeit als ±, eine Einheit der vierten Decimale von den Resultaten, nicht beanspruchen.

Luftfreies Wasser.

t° C.	H_α	H_β	H_γ
40,0	1,328820	1,334670	1,337880
41,0	1,328694	1,334568	1,337749
41,4	1,328617	1,334476	1,337691
44,4	1,328250	1,334075	1,337250
45,6	1,328028	1,333858	—
50,0	1,327364	1,333196	1,336402
55,2	1,326532	1,332307	1,335525
58,9	1,325923	1,331770	1,334956 (58,6°)
59,0	1,325898	1,331740	1,334922 (58,8°)
59,4	1,325821	1,331590	1,334765
64,9	1,324704	1,330454 (64,8°)	—
65,3	1,324666	1,330421 (65,4°)	1,333650 (65,4°)
70,1	1,323812	1,329326	1,332384
70,5	1,323585	1,329274	1,332427
73,6	1,322988	1,328830 (73,5°)	1,332000
76,0	1,322545	1,328293	1,331407

1) Landolt's Tabellen 85.

Bildet man die Mittelwerthe für die Temperaturen 40°, 45° . . . etc., so lassen sich diese ausdrücken durch die Formeln:

$$H_\alpha = 1{,}332\,189\,4 - 0{,}000\,179\,0\left(\frac{t}{5}\right) - 0{,}000\,030\,24\left(\frac{t}{5}\right)^2$$

$$H_\beta = 1{,}337\,877\,2 - 0{,}000\,128\,4\left(\frac{t}{5}\right) - 0{,}000\,034\,02\left(\frac{t}{5}\right)^2$$

$$H_\gamma = 1{,}340\,680\,4 - 0{,}000\,048\,5\left(\frac{t}{5}\right) - 0{,}000\,037\,93\left(\frac{t}{5}\right)^2.$$

Diese Formeln gelten für das Temperaturintervall von 40—70°. Ihre Brauchbarkeit erhellt aus nachfolgender Uebersicht, in welcher die durch Interpolation abgeleiteten Mittelwerthe als gefunden bezeichnet sind, während die Columne Δ den Unterschied der gefundenen und der aus den Formeln abgeleiteten Werthe in Einheiten der fünften Decimale darstellt.

t^0 C.	H_α gefunden	Δ	H_β gefunden	Δ	H_γ gefunden	Δ
40	1,32882	+0	1,33467	+ 3	1,33788	− 2
45	1,32814	−1	1,33397	0	1,33716	+ 2
50	1,32736	+1	1,33320	− 1	1,33640	0
55	1,32656	0	1,33234	+ 1	1,33556	0
60	1,32570	−1	1,33147	− 3	1,33464	0
65	1,32473	+3	1,33044	+ 1	1,33364	0
70	1,32374	+2	1,32937	+ 5	1,33255	+ 2
(75	1,32273	+3	1,32851	+21	1,33162	−20)

Die Specialformeln für H_α, H_β und H_γ lassen sich in eine einzige zusammenfassen, welche nur in den Anfangsconstanten voneinander abweichen:

$$\text{von } 40\text{—}70^0 \begin{Bmatrix} H_\alpha \\ H_\beta \\ H_\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}331\,997\,7 \\ 1{,}337\,769\,0 \\ 1{,}340\,966\,3 \end{Bmatrix} - 0{,}000\,118\,6\left(\frac{t}{5}\right) - 0{,}000\,034\,06\left(\frac{t}{5}\right)^2.$$

Auch diese Formeln sind noch recht brauchbar, wie aus nachfolgender Uebersicht der Differenzen zwischen den gefundenen und berechneten Werthen hervorgeht:

t^0 C.	ΔH_α	ΔH_β	ΔH_γ	t^0 C.	ΔH_α	ΔH_β	ΔH_γ
40	+5	−3	−4	60	− 3	− 2	− 1
45	+3	−2	−2	65	− 3	+ 3	+ 3
50	+4	−2	−3	70	− 9	− 4	+ 8
55	+1	+2	−2	(75	−17	−18	+10)

Die eingeklammerten Zahlen zeigen die geringere Brauchbarkeit der Formeln für Temperaturen über 70°. Begnügt man sich mit einer Genauigkeit von ± 1 Einheit der vierten Decimale, so können obige Formeln sogar innerhalb der weiten Temperaturgrenzen von 10—75° Verwendung finden.

Die durch H_γ—H_α gemessene Dispersion zeigt, wie schon früher vermuthet, eine geringe Abnahme bei der Temperaturerhöhung:

t° C.	$H_\gamma - H_\alpha$	t° C.	$H_\gamma - H_\alpha$
40	906	60	894
45	902	65	891
50	904	70	881
55	900	75	889

Fassen wir nun das Gesammtresultat in eine für den praktischen Gebrauch passende Form:

$$\text{ür } t = 10\text{—}40^0 \begin{Bmatrix} H_\alpha \\ H_\beta \\ H_\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,3323004 \\ 1,3382118 \\ 1,3414389 \end{Bmatrix} - 0,00002258\, t^0 - 0,000001676\, t^{0^2}$$

$$\text{ür } t = 40\text{—}70^0 \begin{Bmatrix} H_\alpha \\ H_\beta \\ H_\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,3319977 \\ 1,3377690 \\ 1,3409663 \end{Bmatrix} - 0,00002372\, t^0 - 0,000001362\, t^{0^2}.$$

(Eingegangen 29. September 1899.)

9. *Verhalten des Büschellichtbogens im Magnetfelde;* *von Max Toepler.*

Jeder Entladungsvorgang der Elektricität durch Luft von Atmosphärendruck, mag er uns in der Form des Glimmens, Büschels, Büschellichtbogens oder Flammenbogens entgegentreten, ist nicht unabhängig davon, ob er in einem starken magnetischen Felde erfolgt oder nicht.[1]) Speciell für den Büschellichtbogen, eine von mir zuerst eingehend untersuchte eigenthümliche Art von nahe continuirlicher Elektricitätsentladung[2]), habe ich schon früher die Ablenkung der Strombahn im Magnetfelde nachgewiesen.[3]) Auf einige anderweitige Veränderungen, welche eine magnetische Erregung des Schlagraumes am Büschellichtbogen bewirkt, will ich im Vorliegenden kurz aufmerksam machen.

Zur Erzielung eines (negativen) Büschellichtbogens in einem Magnetfelde wurde die in Fig. 1 skizzirte Versuchsanordnung benutzt. Als Kathode diente eine stumpfe Messingspitze (*k*); in die Zuleitung zu ihr war ein grosser Wasserwiderstand *w* (ca. 5 Millionen Ohm) geschaltet. Der Kathode stand eine 23 cm hohe, 16 cm breite Schieferplatte (*T*) als Anode gegenüber; auf ihr war der Stanniolstreifen *s* aufgeklebt, um den Stromeintritt zu erleichtern; die Schieferplatte war gut isolirt aufgestellt, ihre Ränder waren mit Paraffin überzogen. Vor der Schieferplatte stand ein mit parallelepipedischen Polschuhen armirter Elektromagnet (*E*). Ueber die Endflächen der Armaturen (*N* Nordpol, *S* Südpol) hin konnte man so eben noch die

---

1) Vgl. J. Precht, Wied. Ann. **66.** p. 676. 1898. Für den Flammenbogen ist der Einfluss eines Magnetfeldes eine allbekannte Erscheinung.

2) Ueber die „Büschellichtbogen“ genannte Entladungsform vgl. M. Toepler, Wied. Ann. **63.** p. 109. 1897; Abhandl. d. naturw. Gesellsch. Isis in Dresden 1898. p. 3, sowie Beibl. **22.** p. 596. 1898; Wied. Ann. **66.** p. 660. 1898.

3) M. Toepler, Wied. Ann. **63.** p. 113. 1897.

Kathode *k* und den Schlagraum, bez. den Büschellichtbogen *b* in ihm von *P* aus überblicken oder photographiren. Der Strom in letzterem (ca. 1,5 Tausendstel Ampère) wurde von einer 60 plattigen Toepler'schen Influenzmaschine geliefert.

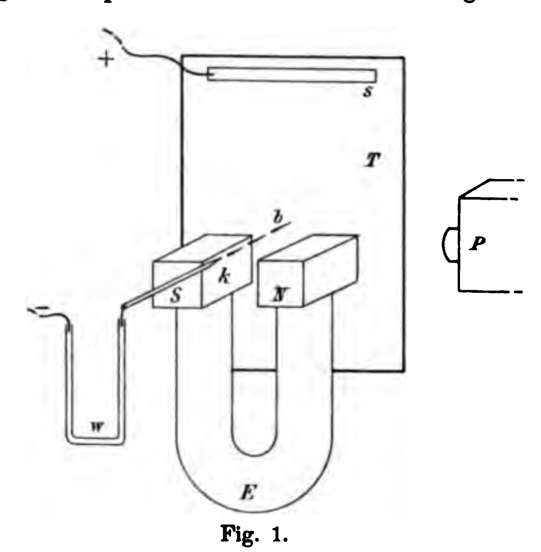


Fig. 1.

Um den Einfluss der magnetischen Feldstärke im Schlagraume aut die Ausbildung des Büschellichtbogens zu zeigen, wurden auf der gleichen photographischen Platte nacheinander



Fig. 2.

vier Einzelaufnahmen (in natürlicher Grösse) gemacht (vgl. die Reproduction derselben Fig. 2). Die erste Aufnahme (in Fig. 2 von oben gezählt) erfolgte bei kleiner Schlagweite und nicht erregtem Elektromagneten (hierauf wurde die Belichtung der Platte unterbrochen); die zweite bei gleichem Schlagraume *nach* Erregung des Magnetismus (Belichtung unterbrochen,

photographische Platte verschoben); die dritte bei vergrösserter Schlagweite ohne Felderregung (Belichtung unterbrochen); die vierte schliesslich wieder nach Erregung des Magnetfeldes. Die Expositionszeit betrug je ca. 1 sec, die Stärke des erregten, im Bereiche des Büschellichtbogens noch als nahezu homogen anzunehmenden Magnetfeldes angenähert 350 absolute magnetische (C.G.S.)-Einheiten.

In Fig. 2 ist die spitze Kathode links, die Anode (Schieferplatte) rechts zu denken. Das matte positive Glimmen auf letzterer (für die vier Einzelaufnahmen theilweise übereinanderfallend) ist deutlich zu erkennen. Hieran grenzt nach links hin in allen vier Fällen der ausgedehnte Anodendunkelraum (d. h. die ausgezeichnete Stelle der *rein* negativen Entladung).[1]) Dann folgen weiter nach links hin die (carminrothen) Schichten des negativen Entladungsantheiles. Die einzelnen Lichttheile an der Kathode (ziegelrothes Licht und helles Kathodenlicht) stehen einander so nahe, dass sie sich auf dem Photogramm nicht unterscheiden lassen.

Die Bahn des Büschellichtbogens erscheint in Fig. 2 (sowohl bei kleinerer wie bei grösserer Schlagweite) vor Erregung des Magnetfeldes nach oben gekrümmt (vgl. Aufnahme 1 und 3). Dies ist eine Folge der elektrostatischen Abstossung durch die auf den Magnetpolen sich ansammelnde Elektricität.[2]) *Im Magnetfelde* (Aufnahme 2 und 4) *erscheint der Büschellichtbogen aus seiner ursprünglichen Bahn abgelenkt* und zwar im vorliegenden Falle (wo der Nordpol vorn über der Bildebene der Fig. 2, der Südpol als hinter derselben liegend zu denken ist) *nach unten*, *entsprechend den bekannten Gesetzen der Wirkung eines Magnetfeldes auf ein bewegliches Strombahnelement in ihm.* Wurde der Strom im Elektromagneten umgekehrt, so erfolgte natürlich eine Ablenkung nach oben (von den Polen fort).

---

1) M. Toepler, Abhandl. d. naturw. Gesellsch. Isis in Dresden 1898. p. 13.

2) Natürlich würden auch schon unelektrische Leiter (Magnetpole) das elektrische Feld und somit die Bahn des Büschellichtbogens beeinflussen; meist nehmen jedoch die Pole (durch Ausstrahlung von Kathode oder Anode, Leitung) eine Ladung an; je nach deren Vorzeichen beobachtet man Abstossung oder auch Anziehung der Bahn des Büschellichtbogens.

Die Einwirkung des Magnetfeldes beschränkt sich jedoch, e Fig. 2 deutlich zeigt, nicht nur auf eine Bahnverschiebung s Büschellichtbogens. *Die einzelnen* (carminrothen) *Schichten cken im Magnetfelde dichter nach der Kathode zusammen*, ähnh wie dies bei Erhöhung der Stromstärke oder des Luftuckes der Fall sein würde. Beobachtet man den Vorgang eses Zusammenrückens bei allmählicher Erregung des Magnetdes genauer, so sieht man hierbei die neuen Schichten, r welche durch Zusammenrücken der schon vorhandenen atz wird, allmählich aus der ausgezeichneten Stelle, d. h. m dunklen Anodenraum heraustreten.

Ist das Magnetfeld sehr stark, so erscheinen die einzelnen hichten deformirt; schon in Fig. 2 findet sich (Aufnahme 2 ıd 4) diese Erscheinung soeben angedeutet. Die einzelnen hichten erscheinen schräg zur Bahn der Entladung gestellt, de folgende Schicht steht nicht in der Richtung der Verngerung der vorhergehenden, sondern etwas seitlich. Der ischellichtbogen erscheint daher an den dunklen Stellen rischen den Lichtschichten *schräg* durchschnitten. Hierbei rd jedoch der ganze Entladungsvorgang ein höchst unruhiger, ıckernder, sodass er sich zu photographischer Aufnahme enig eignet. Bemerkt sei auch noch, dass schon in schwachen agnetischen Feldern eine klare Schichtung, wie sie Fig. 2 igt, selten ist; *das magnetische Feld erschwert eine scharfe hichtenbildung auf der Bahn des Büschellichtbogens.*

Die magnetische Feldstärke im Schlagraume beeinflusst - bei ungeänderter Intensität der Stromzuführung durch die ıfluenzmaschine — auch die Spannungsdifferenz der Elekoden. Mit Hülfe eines Quarzelektrometers von Pockels[1]) ess sich nachweisen, dass die Spannungsdifferenz der Elekoden sich nicht merklich änderte, wenn ein elektrostatisch *gelenkter* Büschellichtbogen durch das magnetische Feld in e *kürzeste* Verbindung von k und T eingelenkt wurde, dass e sich jedoch sehr merklich vergrösserte, wenn der Büschelchtbogen aus einer ursprünglich kürzeren in eine längere Bahn gelenkt wurde. Hiernach ist zu schliessen, dass die Span-

1) Vgl. F. Pockels, Verhandl. deutsch. Naturf. u. Aerzte in Braunhweig p. 56. 1897.

nungsdifferenz der Elektroden unter sonst gleichen Verhältnissen mit der magnetischen Feldstärke im Schlagraume etwas zunimmt.

Schliesslich sei noch auf folgende auffallende Erscheinung hingewiesen. Wählt man die von der Influenzmaschine gelieferte Stromstärke derart, dass dieselbe soeben hinreicht, um den Büschellichtbogen im unmagnetischen Felde dauernd zu erhalten[1]), so verwandelt sich dieser sofort wieder in einen Funkenstrom, sobald das Magnetfeld im Schlagraume erregt wird.

Dresden, 27. September 1899.

---

1) Bei Stromverstärkung folgen sich im Schlagraume: negative Büschelentladung, Funkenstrom, Büschellichtbogen; vgl. M. Toepler, Wied. Ann. **66.** p. 663. 1898.

(Eingegangen 29. September 1899.)

10. *Ueber den kritischen Zustand; von C. Dieterici.*[1])

Aus den experimentellen Arbeiten, welche im Laufe ten Jahrzehntes von Cailletet und Mathias, Amagat umfassendster Weise von Ramsay und S. Young über :tischen Zustand der verschiedensten Stoffe ausgeführt heint mit Sicherheit hervorzugehen, dass für alle Stoffe tsächlich beobachtete kritische Dichte nahezu dasselbe ıe der idealen Dichte ist, d. h. derjenigen Dichte, welche s dem idealen Gasgesetze

$$p \, . \, v = R \vartheta$$

ɜn Druck- und Temperaturbeobachtungen im kritischen le berechnet.

eser Satz ist zuerst von S. Young[2]) aus seinen ge- ıaftlich mit Ramsay ausgeführten Beobachtungen ab- . Man kann ihn auch so aussprechen: Die Abweichung tischen Zustandes von dem durch das ideale Gasgesetz rten ist für alle Stoffe nahezu dieselbe. Es war erst ı, diesen Satz aus den Versuchen abzuleiten, nachdem tet und Mathias[3]) die Methode kennen gelehrt hatten, n überhaupt zu einer sicheren Ermittelung des kritischen ıns oder der kritischen Dichte gelangen kann, die e des Mittelwerthes aus Flüssigkeits- und Dampfdichte ıttigten Zustande bei Temperaturen, die nahe unterhalb tischen Temperatur liegen. Erst als S. Young diese

---

Ueber einen Theil der nachfolgenden Darlegungen wurde auf Naturforscherversammlung in München berichtet.

S. Young, Phil. Mag. (5) **34.** p. 503—507. 1892; **37.** p. 1—8. 1894.

L. Cailletet u. E. Mathias, Journ. de phys. (2) **5.** p. 549—564. p. 414—426. 1887.

Methode anwendete, gelang es ihm, den angeführten Satz zu erkennen.

Da es nothwendig ist, sich eine Anschauung darüber zu verschaffen, innerhalb welcher Grenzen der ausgesprochene Satz als sicher angesehen werden kann, stelle ich in der untenstehenden Tab. 1 sämmtliche Beobachtungen von Ramsay und Young zusammen. In der ersten Columne ist die untersuchte Substanz angegeben, unter M das Moleculargewicht, dann folgen unter $p_\varkappa$, $\vartheta_\varkappa$, $v_\varkappa$ der beobachtete kritische Druck, absolute Temperatur und das nach der Methode von Cailletet und Mathias unmittelbar aus den Beobachtungen ermittelte kritische Volumen für die Grammmolekel oder die Mole als

Tabelle 1.

Substanz	M	$p_\varkappa$ mm Hg	$\vartheta_\varkappa$ C.°	$v_\varkappa$ cm³	v_0 cm³	$\frac{v_0}{v_\varkappa}$
Fluorbenzol C_6H_5F	95,8	33910	559,55	270,5	1026,0	3,79
Chlorbenzol C_6H_5Cl	112,2	33910	633,0	305,7	1160,5	3,80
Brombenzol C_6H_5Br	156,6	33910	670,0	321,4	1228,0	3,82
Jodbenzol C_6H_5J	203,4	33910	721,0	347,9	1322,0	3,80
Benzol C_6H_6	77,84	36395	561,5	256,3	959,4	3,74
Chlorkohlenstoff CCl_4	153,45	34180	556,15	275,6	1012,0	3,67
Zinnchlorid $SnCl_4$	259,3	28080	591,7	350,4	1310,0	3,74
Aether $(C_2H_5)_2O$	73,84	27060	467,4	281,4	1074	3,815
Normalhexan C_6H_{14}	85,82	22510	507,8	366,3	1403	3,83
Isopentan C_5H_{12}	71,85	25100	470,2	309,2	1164	3,765
Methylformiat $C_2H_4O_2$	59,86	45030	487,0	171,3	672,3	3,93
Aethylformiat $C_3H_6O_2$	73,83	35590	508,3	228,4	888,2	3,89
Methylacetat $C_3H_6O_2$	73,83	35180	506,7	226,8	895,5	3,95
Propylformiat $C_4H_8O_2$	87,80	30440	537,85	283,7	1099,0	3,87
Aethylacetat $C_4H_8O_2$	87,80	28880	523,1	285,0	1126,0	3,95
Methylpropionat $C_4H_8O_2$	87,80	30030	530,4	281,1	1098,0	3,91
Propylformiat $C_5H_{10}O_2$	101,77	25210	549,2	343,4	1355,0	3,945
Aethylpropionat $C_5H_{10}O_2$	101,77	25210	545,9	342,8	1347,0	3,93
Methylbutirat $C_5H_{10}O_2$	101,77	26000	554,25	338,9	1325,0	3,91
Methylisobutirat $C_5H_{10}O_2$	101,77	25750	540,55	337,3	1306,0	3,87
Methylalkohol CH_3OH	31,93	59760	513,0	118,0	533,6	4,52
Aethylalkohol C_2H_5OH	45,90	47850	516,1	166,9	670,5	4,02
Propylalkohol C_3H_7OH	59,87	38120	536,7	217,6	875,6	4,02
Essigsäure CH_3COOH	59,86	43400	594,6	170,5	852,0	5,00

Masseneinheit. Unter v_0 ist das „ideale" kritische Volumen angegeben, also nach

$$v_0 = \frac{R\vartheta_\varkappa}{p_\varkappa}$$

berechnet; die für alle Körper gleiche Gasconstante ist

$$R = 84534 \frac{\text{g/cm}}{\text{C.}^\circ}$$

gesetzt. Unter $v_0/v_\varkappa$ ist dann das Verhältniss des idealen zum thatsächlichen kritischen Volumen berechnet, oder das Verhältniss der thatsächlichen kritischen Dichte zur idealen.[1])

Die ersten zehn Stoffe Benzol und seine Halogenderivate, die Kohlenwasserstoffe Hexan und Isopentan, endlich Chlorkohlenstoff, Zinnchlorid und Aethyläther ergeben nahezu constante Zahlen für $v_0/v_\varkappa$, im Mittel etwa 3,75. Bei der Beurtheilung dieser Zahlen muss man bedenken, dass sowohl das berechnete v_0 den Fehler tragen muss, der durch die Beobachtungsunsicherheit des kritischen Druckes und der Temperatur bedingt ist, und dass ebenso das beobachtete kritische Volumen mit einem Fehler behaftet ist, sodass es nicht Wunder nehmen kann, wenn die Verhältnisse $v_0/v_\varkappa$ in den Grenzen von $\pm$ 2 Proc. um den Mittelwerth herum liegen.

Einen um etwa 4 Proc. höheren Mittelwerth, etwa 3,9, zeigen die folgenden zehn höher constituirten Ester; Aethyl- und Propylalkohol mit $(v_0/v_\varkappa) = 4{,}02$ geben einen um etwa 7 Proc. höheren Werth, Methylalkohol und Essigsäure zeigen ein ganz abweichendes Verhalten. Von letzterer wissen wir, dass sie im Dampfzustande ein anderes Moleculargewicht hat, als im flüssigen, ein ähnliches Verhalten ist wohl auch bei Methylalkohol nicht ausgeschlossen. Auch bei den Estern sind wohl Polymerisationen oder Dissociationsvorgänge möglich, während solche bei den Kohlenwasserstoffen kaum anzunehmen sind; daher verdienen wohl die bei diesen Stoffen beobachteten kritischen Dichten das meiste Zutrauen. Den bei diesen Stoffen

1) Die Originalbeobachtungen sind enthalten in Phil. Trans. **176.** p. 123. 1886, **178.** p. 57. 1887, **180.** p. 137. 1889; ferner in Journ. chem. soc. **55.** p. 486. 1889, **59.** p. 125. 1891, **63.** p. 1191. 1893, **67.** p. 1071. 1895, **71.** p. 446. 1897; Auszüge und Zusammenstellungen der Resultate in Phil. Mag. l. c., auch Phys. Rev. **1.** p. 385—423. 1892.

beobachteten Werthen des Verhältnisses $v_0 : v_\varkappa$ liegen nahe diejenigen, welche von Amagat[1]) und Cailletet und Mathias[2]) an chemisch einfacheren Verbindungen beobachtet und welche in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

Tabelle 2.

Substanz	M	$\vartheta_\varkappa$	$p_\varkappa$ in Atm.	$v_\varkappa$ cm³	v_0 cm³	$\frac{v_0}{v_\varkappa}$
Kohlensäure CO_2	43,89	304,35	72,9	94,58	341,5	3,61
Schweflige Säure SO_2	63,90	429,0	78,9	122,9	445,0	3,62
Aethylen C_2H_4	27,94	283,1	51,0	133	454,2	3,42
Stickoxydul N_2O	43,98	308,9	74,0	107,2	346,1	3,19

Die beiden Substanzen CO_2 und SO_2 geben ein Verhältniss (3,62) des idealen zum thatsächlichen kritischen Volumen, welches den von Ramsay und Young an den Kohlenwasserstoffen beobachteten sehr nahe liegt. Die unbeständigeren Verbindungen C_2H_4 und N_2O weichen beträchtlich ab.

Es wäre von höchstem Interesse, in dieser Beziehung die kritischen Daten möglichst einfacher Stoffe festzustellen. Die von Ramsay neu entdeckten, vermuthlich einatomigen Elemente würden sich am besten hierzu eignen.[3]) Da indessen diese wohl schwerlich in absehbarer Zeit bei und unterhalb ihrer kritischen Temperatur untersucht werden können, würden wohl zunächst die Elemente Sauerstoff und Stickstoff ins Auge zu fassen und für diese die Isothermen in und unterhalb ihrer kritischen Temperatur zu beobachten sein, damit man aus ihnen die kritischen Daten nach der Methode von Cailletet und Mathias mit grösserer Sicherheit ermitteln kann, als es durch directe Ablesung möglich ist. Die bisher für diese einfachsten Stoffe vorliegenden Daten sind folgende[4]):

1) E. H. Amagat, Compt. rend. **115.** p. 1093 u. 1322. 1892; vgl. auch Phys. Rev. **2.** p. 33—43. 1892.

2) L. Cailletet u. E. Mathias, l. c.

3) Hr. Ramsay hob dies besonders hervor in seinem Vortrag auf der 71. Naturforscherversammlung in München.

4) Beobachtungen von Wroblewski, Dewar, Hautefeuille und Cailletet nach Landolt-Börnstein's Tabellen.

Tabelle 3.

Substanz	M	$\vartheta_\varkappa$	$p_\varkappa$ in Atm.	$v_\varkappa$ cm³	v_0 cm³	$\frac{v_0}{v_\varkappa}$
Stickstoff N_2	28,02	127,0	35,0	75,73	296,9	3,92
				63,70		4,66
				62,30		4,77
Sauerstoff O_2	31,92	154,6	50,4	52,8	251,0	4,85
				50,0		5,00

Man kann aus diesen Zahlen gewiss nicht die Behauptung ableiten, dass auch bei Sauerstoff und Stickstoff das Verhältniss der thatsächlichen kritischen Dichte zur idealen dasselbe sei, wie das von Ramsay und Young an den Kohlenwasserstoffen gefundene, etwa 3,7; aber gewiss kann man auch nicht die gegentheilige Behauptung aufstellen. Denn es ist eine Erfahrung, dass stets die directe Beobachtung des kritischen Volumens wesentlich niedrigere Werthe ergiebt, als die Methode von Cailletet und Mathias. Eine jede Beobachtungsreihe der reichhaltigen Arbeiten von Ramsay und Young zeigt dies. Bei Sauerstoff und Stickstoff liegen nur directe Beobachtungen vor, sie sind vermuthlich alle zu klein, das Ver-Verhältniss $v_0 : v_\varkappa$ daher zu gross. Gelingt es, die Volumina dieser Stoffe im Sättigungszustande in flüssiger und dampfförmiger Phase unterhalb ihrer kritischen Temperatur zu beobachten, so ist wohl zu vermuthen, dass man auch bei diesen Stoffen zu $v_0 : v_\varkappa =$ ca. 3,7 geführt wird.

Fasst man das in den angeführten Arbeiten zusammengetragene Material zusammen, so glaube ich, liegt alle Veranlassung vor, den von S. Young zuerst ausgesprochenen Satz dahin zu erweitern: dass bei allen Stoffen, welche ohne chemische Veränderungen in den kritischen Zustand übergeführt werden können, das Verhältniss der thatsächlichen zur idealen kritischen Dichte nahezu dasselbe ist, etwa 3,7.

II. Ein jeder Versuch, den Zustand der Körper durch eine Gleichung zwischen den drei Grössen Volumen (v), Temperatur (ϑ) und Druck (p) wiederzugeben, muss davon ausgehen, die im kritischen Zustande thatsächlich stattfindenden Beziehungen qualitativ und quantitativ richtig wiederzugeben,

denn der kritische Zustand bestimmt die Constanten, welche in die Zustandsgleichung eingehen.

Bekannt ist die Zustandsgleichung von van der Waals und im Hinblick auf die vielen qualitativ sehr nahe zutreffenden Folgerungen, welche diese Gleichung zulässt und weiter im Hinblick auf die eingehende Discussion dieser Gleichung von Hrn. Boltzmann[1]), welche ihre Fruchtbarkeit erkennen lässt, werden wir mit Recht zunächst diese Zustandsgleichung beizubehalten suchen.

Ich werde nun erstens nachweisen, dass die Zustandsgleichung von van der Waals nicht im Stande ist, die Grössenbeziehungen im kritischen Zustand quantitativ richtig wiederzugeben, auch dann nicht, wenn man die Erweiterungen heranzieht, welche sowohl van der Waals[2]), wie insbesondere Boltzmann, aus theoretischen Anschauungen entwickelt haben; dann will ich zweitens nachweisen, dass eine Aenderung des Gesetzes des van der Waals'schen Cohäsionsdruckes genügt, um die durch die Beobachtung gegebenen Thatsachen richtig wiederzugeben. Die theoretische Begründung dieses veränderten Cohäsionsgesetzes gelingt nicht, vielmehr führen theoretische Ueberlegungen auf eine neue Darstellungsweise, welche auch die Grössenbeziehungen im kritischen Zustande richtig wiedergiebt, und welche ich im dritten Abschnitt darlege.

Ich beschränke mich in dieser Arbeit auf den kritischen Zustand allein. Die Ausdehnung der Betrachtungen auf die anderen Zustände muss weiteren Arbeiten vorbehalten bleiben.

1. Die Zustandsgleichung von van der Waals lautet allgemein:

$$(p + \pi)(v - b) = R\vartheta, \tag{1}$$

worin die Bedeutung der Zeichen p, v, ϑ, R schon angegeben ist, π bedeutet den von van der Waals eingeführten Cohäsionsdruck, der von der wechselseitigen Anziehung der Molekeln herrührt, b die Volumencorrection. Nach van der Waals ist b das Vierfache des Kernvolumens der Molekeln, die Differenz $(v-b)$ stellt das für die Bewegung der Molekeln

1) L. Boltzmann, Gastheorie, 1897 u. 1898.

2) J. D. van der Waals, Die Continuität etc. II. Aufl. 1899.

verfügbare Volumen dar, das Covolumen nach Amagat und J. Traube.

Für den Cohäsionsdruck π macht van der Waals die Annahme

$$(2) \qquad \pi = \frac{a}{v^2},$$

worin a eine Constante ist. Durch diese Annahme wird die Gleichung (1) vom dritten Grade in Bezug auf v, giebt im allgemeinen zu jedem Werthepaar von p und ϑ drei Werthe von v, welche im kritischen Zustande in einen zusammenfallen. Damit dies geschehe, müssen bestimmte Beziehungen zwischen den Grössen a, b, $p_\varkappa$, $v_\varkappa$, $\vartheta_\varkappa$ obwalten, welche aber verschieden sind, wenn wir b als constant (unabhängig von v) ansehen, oder b als Function von v betrachten.

Der erste Fall, b = const., führt auf die drei historischen Gleichungen

$$(3\text{a}) \qquad v_\varkappa = 3\,b, \qquad p_\varkappa = \frac{a}{27\,b^2}, \qquad \vartheta_\varkappa = \frac{8\,a}{27\,R\,b}.$$

Die Bedeutung der ersten dieser drei Gleichungen ist von selbst ersichtlich, die der zweiten erkennt man am besten, indem man in ihr b durch $\frac{1}{3}v_\varkappa$ ersetzt, also

$$p_\varkappa = \frac{1}{3}\,\frac{a}{v_\varkappa^2}$$

schreibt. Bedenkt man, dass nach (2)

$$\frac{a}{v_\varkappa^2} = \pi_\varkappa$$

der van der Waals'sche Cohäsionsdruck im kritischen Zustand ist, so sagt die Gleichung

$$p_\varkappa = \frac{1}{3}\,\frac{a}{v_\varkappa^2} = \frac{1}{3}\,\pi_\varkappa$$

aus, dass im kritischen Zustande der Cohäsionsdruck gerade dreimal so gross ist, als der kritische Druck, den wir wahrnehmen.

Die dritte der Gleichungen (3a) liefert die Constante a, ausgedrückt durch die dem Experiment zugänglichen Grössen

$$a = R\,\vartheta_\varkappa\,v_\varkappa \,.\, \tfrac{9}{8}.$$

Dividirt man die dritte der Gleichungen (3a) durch die zweite, so fällt die Constante a heraus und ersetzt man wieder b durch $\frac{1}{3} v_\varkappa$, so erhält man:

$$\frac{R\,\vartheta_\varkappa}{p_\varkappa\, v_\varkappa} = \frac{8}{3} = 2{,}67. \tag{4a}$$

Nun ist aber

$$\frac{R\,\vartheta_\varkappa}{p_\varkappa} = v_0$$

das „ideale" kritische Volumen oder dasjenige, welches bei Gültigkeit der idealen Gasgesetze eintreten müsste. Die van der Waals'sche Zustandsgleichung liefert also unter Annahme $\pi = (a/v^2)$ und $b =$ const. nothwendig:

$$\frac{v_0}{v_\varkappa} = 2{,}67.$$

In der Zusammenstellung der thatsächlichen Beobachtungen sahen wir, dass dieses Verhältniss zu 3,7 oder meist höher beobachtet ist; keine einzige der vorliegenden Beobachtungen liefert die Zahl, auf welche die Theorie führt. Hier liegt also ein Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung vor, der beseitigt werden muss.

Wir lassen nunmehr die Voraussetzung $b =$ const. fallen und sehen b als Function von v an.

Von H. A. Lorentz, von van der Waals, von. G. Jäger und Boltzmann sind Erweiterungen der Theorie in dieser Hinsicht entwickelt, welche sich darauf gründen, dass bei dem stark verdichteten Zustand der Gase nicht nur Zusammenstösse zwischen zwei Molekeln erfolgen, sondern auch solche, bei denen drei oder mehr Molekeln zugleich collidiren. Aus diesen Betrachtungen entspringt, dass wir die Zustandsgleichung (1) in der Form

$$p = R\,\vartheta \cdot \frac{1}{v}\left(1 + \frac{b}{v} + \alpha_1 \cdot \left(\frac{b}{v}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{b}{v}\right)^3 \ldots\right) - \pi$$

zu schreiben haben, worin b constant ist. Nur für den ersten der Coefficienten α_1, α_2 . . . lässt sich der Zahlenwerth mit einiger Sicherheit ermitteln. Van der Waals findet $\alpha_1 = \frac{17}{32}$,

G. Jäger[1]) und unabhängig Boltzmann $\alpha_1 = \frac{5}{8}$, also sehr nahe dem von van der Waals gleich. Die weiteren Coefficienten α_2 . . . lassen sich durch theoretische Ueberlegungen nicht ermitteln; nur Eines wissen wir: dass diese Coefficienten ebenso, wie das Verhältniss b/v, nur positiv sein können.

Ich breche zunächst die Reihe mit dem Gliede $(b/v)^2$ ab, schreibe also

(1 b) $$p = R\,\vartheta \cdot \frac{1}{v}\left(1 + \frac{b}{v} + \alpha_1\left(\frac{b}{v}\right)^2\right) - \pi,$$

worin

(2) $$\pi = \frac{a}{v^2}$$

ist, und weise nach, dass, gleichgültig welchen Werth α_1 haben mag, das Verhältniss $v_0/v_\varkappa = 3{,}0$ erhalten wird, und dass, wenn man noch mehr Glieder der Reihe hinzuzieht, das Verhältniss nur kleiner wird.

Die Bedingungen für den kritischen Punkt sind:

$$\left(\frac{d\,p}{d\,v}\right)_{\vartheta = c} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 p}{d\,v^2}\right)_{\vartheta = c} = 0,$$

Bedingungen, welche ja nur aussprechen, dass die kritische Isotherme beim kritischen Volumen einen Wendepunkt hat. Bildet man diese Gleichungen unter Berücksichtigung von (1 a) und (2), so kommt:

$$\frac{R\,\vartheta_\varkappa}{v_\varkappa^2}\left[1 + 2\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right) + 3\,\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2\right] = \frac{2\,a}{v_\varkappa^3},$$

$$\frac{R\,\vartheta_\varkappa}{v_\varkappa^3}\left[2 + 6\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right) + 12\,\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2\right] = \frac{6\,a}{v_\varkappa^4}.$$

Durch Elimination von a erhält man

(3 b₁) $$1 = 3\,\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{b}{v_\varkappa} = \sqrt{\frac{1}{3\,\alpha_1}}$$

und setzt man diesen Werth in eine der Gleichungen ein, so kommt

(3 b₂) $$a = R\,\vartheta_\varkappa \cdot v_\varkappa\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3\,\alpha_1}}\right).$$

---

1) G. Jäger, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **105.** p. 15—21. 1896.

Setzt man die gefundenen Werthe von $b/v_\varkappa$ und a in die Gleichung (1a) ein, welche für den kritischen Zustand

$$p_\varkappa = R\,\vartheta_\varkappa \cdot \frac{1}{v_\varkappa}\left(1 + \frac{b}{v_\varkappa} + \alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2\right) - \frac{a}{v_\varkappa^2}$$

lautet, so erhält man:

$$\frac{p_\varkappa v_\varkappa}{R\,\vartheta_\varkappa} = (1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}\alpha_1} + \tfrac{1}{3}) - (1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}\alpha_1}) = \tfrac{1}{3},$$

oder

$$\text{(4b)} \qquad \frac{R\,\vartheta_\varkappa}{p_\varkappa v_\varkappa} = \frac{v_0}{v_\varkappa} = 3$$

unabhängig von α_1. *Gleichgültig, ob wir also mit Boltzmann $\alpha_1 = \frac{5}{8}$ setzen, oder mit van der Waals gleich $\frac{17}{32}$, das Verhältniss des idealen zum thatsächlichen kritischen Volumen wird drei, sofern nur $\alpha_1 > 0$ ist.*

Dieser Werth ist der grösseste, welcher unter den gemachten Annahmen erreicht werden kann; denn nimmt man noch ein Glied der Reihe hinzu, setzt also allgemein

$$\text{(1c)} \qquad p = R\,\vartheta\,\frac{1}{v}\left[1 + \frac{b}{v} + \alpha_1\left(\frac{b}{v}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{b}{v}\right)^3\right] - \frac{a}{v^2},$$

so liefern die beiden Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{d\,p}{d\,v}\right)_{\vartheta = c} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 p}{d\,v^2}\right)_{\vartheta = c} = 0$$

die Gleichungen:

$$\frac{R\,\vartheta_\varkappa}{v_\varkappa^2}\left[1 + 2\,\frac{b}{v_\varkappa} + 3\,\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2 + 4\,\alpha_2\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^3\right] = \frac{2\,a}{v_\varkappa^3},$$

$$\frac{R\,\vartheta_\varkappa}{v_\varkappa^3}\left[2 + 6\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right) + 12\,\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2 + 20\,\alpha_2\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^3\right] = \frac{6\,a}{v_\varkappa^4}.$$

Durch Elimination von a erhält man

$$(3\text{b}_1) \quad 1 = 3\,\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2 + 8\,\alpha_2\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^3 \quad \text{oder} \quad \alpha_2\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^3 = \tfrac{1}{8} - \tfrac{3}{8}\,\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2$$

und damit aus einer der beiden Gleichungen:

$$(3\,b_2)\left\{\begin{aligned} a &= R\vartheta_\varkappa . v_\varkappa . \tfrac{1}{2}\left[1 + 2\frac{b}{v_\varkappa} + 3\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2 + 4\left(\tfrac{1}{8} - \tfrac{3}{8}\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2\right)\right] \\ \text{oder} \quad &= R\vartheta_\varkappa . v_\varkappa\left[\tfrac{3}{4} + \frac{b}{v_\varkappa} + \tfrac{3}{4}\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2\right]. \end{aligned}\right.$$

Setzt man die gefundenen Werthe für $\alpha_2\,(b/v_\varkappa)^3$ und a in die Druckgleichung (1c) ein, welche für den kritischen Zustand

$$p_\varkappa = R\,\vartheta_\varkappa . \frac{1}{v_\varkappa}\left[1 + \frac{b}{v_\varkappa} + \alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^3\right] - \frac{a}{v_\varkappa^2}$$

lautet, so kommt

$$(4\,c)\quad\left\{\begin{aligned} \frac{p_\varkappa . v_\varkappa}{R\,\vartheta_\varkappa} &= \left[\tfrac{9}{8} + \frac{b}{v_\varkappa} + \tfrac{5}{8}\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2\right] - \left[\tfrac{3}{4} + \frac{b}{v_\varkappa} + \tfrac{3}{4}\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2\right] \\ &= \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{8}\alpha_1\left(\frac{b^2}{v_\varkappa}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Jetzt ist der Quotient $p_\varkappa v_\varkappa / R\,\vartheta_\varkappa$ nicht mehr unabhängig von α_1. Aus $(3\,b_1)$ folgt aber

$$\tfrac{1}{8}\,\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2 = \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{3}\,\alpha_2\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^3$$

und da $(b/v_\varkappa)$ nur positiv sein kann, ebenso α_2, so ist ersichtlich, dass

$$\tfrac{1}{8}\alpha_1\left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2$$

seinen maximalen Werth $\frac{1}{24}$ für $\alpha_2 = 0$ hat.

Damit wird aber

$$\frac{p_\varkappa . v_\varkappa}{R\,\vartheta_\varkappa} = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{24} = \tfrac{1}{3},$$

oder

$$\frac{R\,\vartheta_\varkappa}{p_\varkappa\,v_\varkappa} = \frac{v_0}{v_\varkappa} = 3,$$

wie schon vorher bei Beschränkung der Reihe auf drei Glieder sich ergeben hatte. Hat α_2 einen Werth >0, so wird unter allen Umständen

$$\frac{v_0}{v_\varkappa} < 3.$$

Denkt man sich in der Reihe für p unendlich viele Glieder mit gleichen Factoren $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots = 1$, so geht die er-

weiterte Form der Zustandsgleichung in die erste ursprüngliche Form über

$$p = \frac{R\vartheta}{v - b} - \frac{a}{v^2},$$

für welche sich

$$\frac{v_0}{v_\varkappa} = 2{,}67$$

ergeben hatte.

Damit ist erwiesen, dass, wenn man die Zustandsgleichung von **van der Waals** in der Weise erweitert, wie es die theoretischen Ueberlegungen als möglich erkennen lassen, für das Verhältniss des idealen zum thatsächlichen kritischen Volumen nur Werthe erzielt werden können, welche im Maximum drei ergeben. Sämmtliche Beobachtungen liegen aber wesentlich über drei und daher ist es ersichtlich, dass man durch die theoretisch begründeten Erweiterungen die **van der Waals'**sche Zustandsgleichung nicht mit der Erfahrung in Einklang bringen kann.

Anders liegt es natürlich, wenn man willkürliche Glieder der Gleichung hinzufügt.

2. Gelegentlich einer rein empirischen Berechnung machte ich die Bemerkung, dass man die Abweichungen des gesättigten Wasserdampfes von den idealen Gasgesetzen zwischen 0 und 200° C. sehr viel besser darstellen kann, wenn man die Zusatzdrucke, die zum beobachteten Dampfdruck hinzutreten müssen, um das Gasgesetz zu erfüllen, in der Form $\pi = (a / v^{5/3})$ wiedergiebt. Diese rein empirische Berechnung war für mich die Veranlassung, der Frage nachzugehen: zu welchen Folgerungen gelangt man, wenn man in die Gleichung von **van der Waals** diese Annahme für den Cohäsionsdruck einführt.

Diese Folgerungen seien zunächst entwickelt und um die Parallele besser hervortreten zu lassen, will ich dasselbe Verfahren, wie **van der Waals**, einschlagen.

Wir behalten also die Form der Zustandsgleichung

(1) $$(p + \pi)(v - b) = R\vartheta$$

bei, sehen in ihr zunächst b als constant an und machen die Hypothese:

(5) $$\pi = \frac{a}{v^{5/3}}.$$

Ordnet man dann die Gleichung (1) nach Potenzen von v, so kommt

$$v^{8/3} - \frac{b\,p + R\,\vartheta}{p}\,v^{5/3} + \frac{a}{p}\,v - \frac{a\,b}{p} = 0,$$

oder, indem man durch $x = v^{1/3}$ eine neue Variable einführt und die Zeichen α, β, γ in leicht verständlicher Weise für die nothwendig positiven Factoren als Abkürzungen benutzt:

$$f(x) = x^8 - \alpha\,x^5 + \beta\,x^3 - \gamma = 0\,.$$

Diese Gleichung achten Grades für x kann nach der Regel von Descartes höchstens drei positive reelle Wurzeln haben, da sie drei Zeichenwechsel hat; sie hat ferner eine negative reelle Wurzel, wie man nach derselben Regel erkennt, wenn man x mit $-x$ vertauscht, und vier imaginäre Wurzeln. Die Gleichung giebt also ebenso wie die Normalform von van der Waals im allgemeinen drei Werthe für x und damit für v. Im kritischen Punkt fallen die drei Wurzeln in eine zusammen; die Bedingungen hierfür sind:

$$\begin{aligned} f\ (x) &= x^8 - \alpha\,x^5 + \beta\,x^3 - \gamma = 0, \\ f'\ (x) &= 8\,x^7 - 5\,\alpha\,x^4 + 3\,\beta\,x^2 = 0, \\ f''(x) &= 56\,x^6 - 20\,\alpha\,x^3 + 6\,\beta\,x = 0, \end{aligned}$$

woraus man ohne Schwierigkeit

$$x^2 = \frac{\beta}{\alpha}\,, \quad x^5 = \tfrac{1}{4}\,\beta\,, \quad x^8 = \gamma$$

erhält, oder, indem man wieder auf die ursprüngliche Variable v und die ursprünglichen Factoren zurückgeht:

$$(6) \qquad v_\varkappa = 4\,b\,, \quad p_\varkappa = \frac{a}{4\,.\,(4\,b)^{5/3}}\,, \quad \vartheta_\varkappa = \frac{15\,a\,b}{4\,.\,(4\,b)^{5/3}\,.\,R}\,.$$

Diese Gleichungen sind völlig analog den klassischen von van der Waals und nur durch die Zahlenfactoren von jenen verschieden. Das kritische Volumen ist hier viermal so gross als b; ersetzt man in der zweiten Gleichung b durch $v_\varkappa$ und bedenkt, dass $a/v_\varkappa^{5/3}$ nach (5) der Cohäsionsdruck im kritischen Zustand ist, so sagt die zweite Gleichung: der Cohäsionsdruck im kritischen Zustand ist viermal so gross, als

der wahrnehmbare kritische Druck. Bildet man endlich aus der dritten Gleichung den Quotienten $R\vartheta_\varkappa / p_\varkappa v_\varkappa$, so wird:

$$(7) \qquad \frac{v_0}{v_\varkappa} = \frac{R\vartheta_\varkappa}{p_\varkappa v_\varkappa} = \frac{15}{4} = 3{,}75\,.$$

Das ist die Zahl für das Verhältniss des idealen zum thatsächlichen kritischen Volumen, welches die Beobachtungen von **Ramsay** und **Young** für alle diejenigen Substanzen ergaben, bei denen eine moleculare Veränderung bei der Ueberführung in den kritischen Zustand unwahrscheinlich ist. Und damit ist erwiesen, dass die van der Waals'sche Zustandsgleichung unter Einführung des Cohäsionsgesetzes

$$\pi = \frac{a}{v^{5/3}}$$

und unter der Annahme $b = \text{const.}$ eine Darstellung der thatsächlich im kritischen Punkt stattfindenden Verhältnisse giebt, welche für diese Stoffe qualitativ und quantitativ mit der Erfahrung im Einklang ist.

Für diejenigen Stoffe, bei denen das Verhältniss $v_0 : v_\varkappa$ grösser oder kleiner gefunden wird als 3,75, könnte man moleculare Veränderungen, wie sie bei der Essigsäure wohl zweifellos sind, zur Erklärung heranziehen. Man könnte also annehmen, dass die Molekelzahlen in dem Maasse durch Dissociation oder Association vergrössert oder verringert ist, als die procentische Abweichung des Verhältnisses $v_0 : v_\varkappa$ vom theoretischen Werthe 3,75 beträgt; thatsächlich betragen ja diese Abweichungen — abgesehen von Essigsäure und Methylalkohol — nur wenige Procente.

Indessen bietet die Theorie noch die Möglichkeit, andere Verhältnisse $v_0 : v_\varkappa$ zu berechnen, wenn man die Annahme $b = \text{const.}$ fallen lässt, vielmehr b als Function von v betrachtet.

Man könnte ebenso verfahren, wie vorn, dass man die erweiterte Zustandsgleichung

$$p = R\vartheta\,\frac{1}{v}\left(1 + \frac{b}{v} + \alpha_1\left(\frac{b}{v}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{b}{v}\right)^3 + \ldots\right) - \frac{a}{v^{5/3}}$$

in der angegebenen Weise behandelt und würde dann Zahlen für $v_0 / v_\varkappa$ erhalten, welche bei positiven Werthen von $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots$ stets grösser sind als 3,75, um einen Betrag, der von der Zahl

der benutzten Reihenglieder und von dem Werthe der Coefficienten $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ abhängt.

Es ist aber allgemeiner und übersichtlicher, wenn man keine bestimmte Form der Abhängigkeit des b vom Volumen annimmt, sondern die Form

$$p = \frac{R\,\vartheta}{v-b} - \frac{a}{v^{5/3}}$$

beibehält und in ihr b als Function von v ansieht.

Dann liefern die beiden Bedingungen

$$\left(\frac{d\,p}{d\,v}\right)_{\vartheta = c} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 p}{d\,v^2}\right)_{\vartheta = c} = 0$$

für den kritischen Zustand die Gleichungen:

$$\frac{R\,\vartheta_\varkappa}{(v_\varkappa - b_\varkappa)^2}\left[1 - \left(\frac{d\,b}{d\,v}\right)_\varkappa\right] = \tfrac{5}{3}\,\frac{a}{v_\varkappa^{8/3}},$$

$$2\,\frac{R\,\vartheta_\varkappa}{(v_\varkappa - b_\varkappa)^3}\left[1 - \left(\frac{d\,b}{d\,v}\right)_\varkappa\right]^2 + \frac{R\,\vartheta_\varkappa}{(v_\varkappa - b_\varkappa)^2}\cdot\left(\frac{d^2 b}{d\,v^2}\right)_\varkappa = \frac{{}^{40}/_{9}\,a}{v_\varkappa^{11/3}}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left(\frac{d\,b}{d\,v}\right)_\varkappa = b', \qquad \left(\frac{d^2 b}{d\,v^2}\right)_\varkappa = b'',$$

so erhält man durch Elimination von a

$$(6\mathrm{a}_1)\quad \left(\frac{v}{v-b}\right)_\varkappa = \frac{\tfrac{8}{3}(1-b') - b''\,v_\varkappa}{2\,(1-b')^2} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{b}{v}\right)_\varkappa = 1 - \frac{2\,(1-b')^2}{\tfrac{8}{3}(1-b') - b''\,v_\varkappa}$$

und damit aus einer der beiden Gleichungen

$$(6\,\mathrm{a}_2)\qquad a = R\,\vartheta_\varkappa\,v_\varkappa^{2/3}\,.\,\tfrac{3}{5}\,(1-b')\left[\frac{\tfrac{8}{3}(1-b') - b''\,v_\varkappa}{2\,(1-b')^2}\right]^2.$$

Setzt man diese Werthe dann ein in

$$p_\varkappa = \frac{R\,\vartheta_\varkappa}{(v-b)_\varkappa} - \frac{a}{v_\varkappa^{5/3}},$$

so erhält man

$$\frac{p_\varkappa\,.\,v_\varkappa}{R\,\vartheta_\varkappa} = \frac{v_\varkappa}{v_0} = \frac{\tfrac{8}{3}(1-b') - b''\,v_\varkappa}{2\,(1-b')^2}\left\{1 - \tfrac{3}{5}(1-b')\,\frac{\tfrac{8}{3}(1-b') - b''\,v_\varkappa}{2\,(1-b')^2}\right\},$$

oder

$$\text{(7a)} \qquad \frac{p_\varkappa v_\varkappa}{R\vartheta_\varkappa} = \frac{v_\varkappa}{v_0} = \left(\frac{v}{v-b}\right)_\varkappa \left\{1 - \frac{3}{8}(1-b')\left(\frac{v}{v-b}\right)_\varkappa\right\}.$$

Diese Gleichung giebt natürlich für den Fall $b = \text{const.}$, also $b' = 0$ und $b'' = 0$, den früher berechneten Werth $(v_0/v_\varkappa) = 3{,}75$ wieder, sie zeigt aber, dass die Theorie auch die Möglichkeit offen lässt, auch Abweichungen von diesem Verhältniss durch passende Annahmen über die Aenderung des b mit v darzustellen.

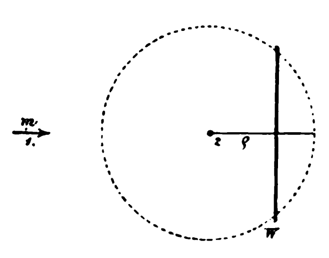
Zunächst dürfen wir wohl von diesen Abweichungen absehen und das rein empirisch gefundene Gesetz für den Cohäsionsdruck

$$\pi = \frac{a}{v^{5/3}}$$

als eine Annahme betrachten, welche im Stande ist, die Zustandsgleichung von van der Waals in Uebereinstimmung zu bringen mit den thatsächlichen Beobachtungen des kritischen Zustandes.

3. Es ist mir nun nicht gelungen, das empirisch gefundene Cohäsionsgesetz auf dem Boden der Waals'schen Anschauungen theoretisch einwandfrei zu deuten. Vielmehr haben mich alle Betrachtungen dazu geführt, den Cohäsionsdruck in anderer Weise, als es van der Waals thut, in die Zustandsgleichung einzuführen. Da diese Ueberlegungen, wie mir scheint, theoretisch richtig begründet sind und die thatsächlichen Beobachtungen im kritischen Zustand ebenfalls qualitativ und quantitativ richtig wiedergeben, so entwickele ich sie hier.

Es sei ein Gas gegeben, zwischen dessen Molekeln Cohäsionskräfte wirken. Das Gas sei bei constanter Temperatur in ein Gefäss eingeschlossen und wir setzen zunächst voraus, dass es bis an die Gefässwandung heran constante Dichte habe. Betrachten wir dann eine Molekel m, welche sich zur Wand W (Fig. 1) des Gefässes hin bewegt, so wird die Molekel, solange sie sich noch im Inneren der Gasmasse (Lage 1) befindet, in seiner Bewegung keinerlei einseitiger Kraftwirkung unterliegen, da sie von allen



Seiten gleichmässig von der Gasmasse umgeben ist. Nähert sie sich aber der Wand auf eine Distanz, welche kleiner ist, als ihre Wirkungsweite ϱ, so muss sie einem Zug nach Innen unterliegen, wenn wir voraussetzen, dass die Cohäsionskraft nur zwischen den Gasmolekeln wirkt, die Wand selbst also keine Kraft auf die Molekel ausübt.[1]) Der Cohäsionszug nach Innen erreicht ein Maximum, wenn die Molekel die Wand berührt.

Denken wir uns im Abstande ϱ vor der Wand eine mathematische Fläche, so wird dieselbe vom Innern des Gases aus getroffen von Molekeln, deren Geschwindigkeitscomponente senkrecht zur Wand nach dem Maxwell'schen Gesetze alle möglichen Werthe haben. Diejenigen der auftreffenden Molekeln, welche mit kleiner Geschwindigkeit die gedachte Fläche durchschreiten, gelangen gar nicht an die Wand, denn sie führen nicht genug kinetische Energie mit, um die Arbeit gegen die Cohäsionskräfte zu leisten; diese Molekeln sind nach Hrn. W. Voigt die „unbefähigten", sie tragen auch nichts zu dem Druck auf die Wand W bei. Zu dieser gelangen nur die „befähigten" Molekeln, also diejenigen, welche genug kinetische Energie mitführen, um die Arbeit gegen die Cohäsionskräfte zu leisten, aber auch diese gelangen zur Wand nur unter einem Verlust von kinetischer Energie, welcher gleich ist der aufgewendeten Arbeit.

Die Annahme, dass zwischen den Molekeln nach van der Waals anziehende Kräfte thätig sind, bedingt also zweierlei:

Erstens wird die Zahl der auf die Wand auftreffenden Molekeln kleiner und aus diesem einen Grunde wird der Druck vermindert; damit ist zugleich gegeben, dass die Dichte des Gases zur Wand hin abnehmen muss, vor derselben also eine inhomogene Schicht entsteht.

Zweitens wird auch die lebendige Kraft, also auch die Bewegungsgrösse der befähigten Molekeln kleiner und dies ist ein zweiter Grund, aus dem der Druck auf die Wand verringert wird.

Die mathematische Behandlung dieser schon von Clausius ausgesprochenen Grundanschauungen, welche von Hrn. G.

---

1) Zu dieser Annahme sind wir gezwungen, da erfahrungsmässig der Gasdruck unabhängig ist von dem Material der Gefässwandungen.

Jäger[1]) begonnen, von Hrn. W. Voigt[2]) und mir[3]) selbst weitergeführt bezüglich ergänzt worden ist, hat das zuerst auffallende Resultat ergeben, dass die befähigten Molekeln, welche in die inhomogene Schicht mit grossen Geschwindigkeiten eingetreten sind, an der Wand doch wieder dieselbe mittlere lebendige Kraft haben, wie die mittlere lebendige Kraft *aller* Molekeln im Innern und dass dieses Verhalten eintritt, gleichgültig wie gross die aufgewendete Cohäsionsarbeit ist. Damit ist zugleich gegeben, dass in jeder Scheibe der inhomogenen Schicht die mittlere lebendige Kraft der in ihr enthaltenen Molekeln die gleiche ist oder constante Temperatur besteht. Dadurch erklärt sich das zuerst auffallend erscheinende Resultat der theoretischen Untersuchung.

Der Druck p auf die Wand wird:

$$p = \frac{R\,\vartheta}{v - b} \cdot e^{-\frac{\frac{1}{2} m s^2}{\frac{1}{2} m c^2}},$$

worin $\frac{1}{2} m s^2$ diejenige lebendige Kraft bedeutet, welche eine Molekel gegen die Cohäsionskräfte aufwenden muss, um zur Wand zu gelangen und $\frac{1}{2} m c^2$ die mittlere lebendige Kraft ist, oder

$$p = \frac{R\,\vartheta}{v - b} \cdot e^{-\frac{A}{R\,\vartheta}}.$$

Wenn wir in dieser Gleichung eine passende Annahme darüber machen können, wie die Cohäsionsarbeit A vom Volumen abhängt, so stellt sie eine Zustandsgleichung dar.

Von allen Annahmen, deren Folgerungen ich untersucht habe, ergab sich die einfachste als die beste und diese ist: die Cohäsionsarbeit A proportional der Dichte oder umgekehrt proportional dem Volumen zu setzen, also

$$A = \frac{C}{v}$$

anzunehmen.

---

1) G. Jäger, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **99**. p. 681—685 und p. 861—869. 1890.

2) W. Voigt, Göttinger Nachr. p. 341—364. 1896; p. 19—47 und p. 261—272. 1897.

3) C. Dieterici, Wied. Ann. **66**. p. 826—858. 1898.

Dann folgen aus

(8) $$p = \frac{R\vartheta}{v-b}\cdot e^{-\frac{C}{R\vartheta v}}$$

die Bedingungen für den kritischen Zustand, wenn man $b = \text{const.}$ annimmt, durch

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_{\vartheta = c} = -\frac{R\vartheta}{(v-b)^2}e^{-\frac{C}{R\vartheta v}} + \frac{R\vartheta}{v-b}e^{-\frac{C}{R\vartheta v}}\cdot\frac{C}{R\vartheta v^2}$$

$$= p\cdot\left[\frac{C}{R\vartheta v^2} - \frac{1}{v-b}\right] = 0$$

und

$$\frac{d^2p}{dv^2} = p\cdot\left\{\frac{C}{R\vartheta v^2} - \frac{1}{v-b}\right\}^2 + p\cdot\left[-\frac{2C}{R\vartheta v^3} + \frac{1}{(v-b)^2}\right] = 0.$$

oder

$$\frac{C}{R\vartheta_\varkappa v_\varkappa^2} = \frac{1}{v_\varkappa - b}$$

und

$$\frac{2C}{R\vartheta_\varkappa v_\varkappa^3} = \frac{1}{(v_\varkappa - b)^2}$$

woraus sich sofort

(9₁) $$\frac{2}{v_\varkappa} = \frac{1}{v_\varkappa - b}, \quad b = \frac{1}{2}v_\varkappa,$$

und

(9₂) $$\frac{C}{R\vartheta_\varkappa v_\varkappa} = 2$$

ergiebt und damit

$$p_\varkappa = \frac{R\vartheta_\varkappa}{v_\varkappa - b}\cdot e^{-\frac{C}{R\vartheta_\varkappa v_\varkappa}} = \frac{R\vartheta_\varkappa}{v_\varkappa}\cdot 2\cdot e^{-2},$$

oder

(10) $$\frac{R\vartheta_\varkappa}{p_\varkappa v_\varkappa} = \frac{v_0}{v_\varkappa} = \tfrac{1}{2}e^2 = 3{,}695$$

folgt.

Das Verhältniss des idealen kritischen Volumens zum thatsächlichen ergiebt sich auch hier so nahe gleich dem beobachteten, dass wir auch diese Darstellung als eine quantitativ richtige Wiedergabe der Beobachtung ansehen dürfen. Auch hier ist die Möglichkeit gegeben, Abweichungen dadurch Rechnung zu tragen, dass man b als Function des Volumens ansieht. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{db}{dv} = b', \qquad \frac{d^2b}{dv_2} = b'',$$

so erhält man aus den beiden Bedingungen für den kritischen Punkt die Gleichungen:

$$\frac{C}{R\vartheta_\varkappa \cdot v_\varkappa^2} = \left(\frac{1-b'}{v-b}\right)_\varkappa,$$

$$\frac{2C}{R\vartheta_\varkappa v_\varkappa^3} = \left(\frac{1-b'}{v-b}\right)_\varkappa^2 + \left(\frac{b''}{v-b}\right)_\varkappa,$$

woraus

$$v_\varkappa - b_\varkappa = \frac{1-b'}{2 - \frac{b''}{1-b'} v_\varkappa} \cdot v_\varkappa$$

und

$$\frac{C}{R\vartheta_\varkappa v_\varkappa} = 2 - \frac{b''}{2-b'} v_\varkappa$$

folgt, und damit

$$\frac{R\vartheta_\varkappa}{p_\varkappa \cdot v_\varkappa} = \frac{v_0}{v_\varkappa} = \frac{1-b'}{1 - \frac{b''}{1-b'} v_\varkappa} \cdot e^{2 - \frac{b''}{1-b'} v_\varkappa}$$

$$= \left(\frac{v-b}{v}\right)_\varkappa e^{\frac{v_\varkappa}{v_\varkappa - b_\varkappa}(1-b')}.$$

Diese Gleichung giebt für $b = \text{const.}$ $b' = 0$ und $b'' = 0$ natürlich den Werth $v_0 : v_\varkappa = 3{,}695$ zurück, gestattet aber durch passende Wahl von b' und b'' auch andere Werthe zu berechnen.

Ich glaube in dieser Arbeit nachgewiesen zu haben, dass mit den thatsächlichen Beobachtungen über die Grösse des kritischen Volumens die Zustandsgleichung von van der Waals in ihrer ursprünglichen Form nicht vereinbar ist, auch dann nicht, wenn man diejenigen Erweiterungen heranzieht, welche sowohl von van der Waals, wie von G. Jäger und Boltzmann durch theoretische Ueberlegungen entwickelt sind, dass aber die Gleichung von van der Waals in Einklang mit den Beobachtungen gebracht werden kann, wenn man ein anderes Gesetz für den Waals'schen Cohäsionsdruck einführt. Diesem rein empirisch gefundenen Gesetze mangelt die theoretische Begründung. Führt man aber die Grundgedanken von van der Waals in anderer Weise in die Ausdrücke der kinetischen Gastheorie ein, so gelangt man zu einer anderen

Form der Zustandsgleichung, aus der sich Folgerungen für den kritischen Zustand ziehen lassen, welche ebenfalls vollkommen mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung sind. Ich habe beide Darstellungen objectiv nebeneinander gestellt; Aufgabe weiterer Berechnungen wird es sein, diejenige Darstellung herauszufinden, welche sich am besten den Beobachtungen in anderen Zuständen anschmiegt.

Hannover, im October 1899.

(Eingegangen 12. October 1899.)

---

11. *Ueber Hrn. Liebenow's thermodynamische Theorie der Thermoelektricität;* *von W. Voigt.*

Hr. Liebenow[1]) hat in diesen Annalen kürzlich eine thermodynamische Theorie der Thermoelektricität entwickelt, die Beachtung gefunden hat. Diese Theorie scheint mir sowohl hinsichtlich ihrer Begründung, als auch hinsichtlich derjenigen ihrer Resultate, die sich als *neu* darstellen, zu schweren Bedenken Veranlassung zu geben; ihre Entwickelung ist die Aufgabe dieser Mittheilung. Ich bemerke dazu im voraus, dass ich Hrn. Liebenow's eigentliche Meinung mitunter zu *errathen* suchen musste, da seine Darstellung gewisse für die Theorie wesentliche Fragen überhaupt nicht berührt. Missverständnisse sind somit nicht ganz ausgeschlossen. Immerhin hielt ich es für geboten, meine Kritik zu veröffentlichen, da das Problem ein überaus wichtiges ist, und die von Hrn. Liebenow abgeleiteten Resultate in mehrfacher Hinsicht überraschen. Da ich auf meine eigenen Untersuchungen über die Wechselbeziehungen zwischen Galvanismus und Wärme[2]) gelegentlich zurückgreife, so habe ich die Bezeichnung mit jenen in Uebereinstimmung gebracht.

1. Hr. Liebenow behandelt die beiden Probleme: Erregung eines elektrischen Stromes durch ein Temperaturgefälle und Wärmebewegung durch einen elektrischen Strom *gesondert*, obgleich die Vorgänge in Wirklichkeit *coexistiren;* in der That schliesst er ja bei der Behandlung des ersten Problems die Convection von Wärme durch den elektrischen Strom ausdrücklich aus. Dies ist offenbar so zu verstehen, dass er den wirklichen Vorgang aus *Theilen* aufbauen will. Ein primärer Wärmestrom $Q^{(1)}$, bestimmt durch ein gewisses Temperaturgefälle, erregt einen primären elektrischen Strom $J^{(1)}$; $J^{(1)}$ giebt dagegen Veranlassung zu einem secundären Wärmestrom $Q^{(2)}$;

1) C. Liebenow, Wied. Ann. 68. p. 316. 1899.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 717. 1899; zuvor Gött. Nachr. 1895. Heft 2.

ᴰ bewirkt ein $J^{(2)}$ etc., sodass also der *factische* Vorgang steht[1]) aus einem elektrischen Strom

$$J = J^{(1)} + J^{(2)} + \ldots$$

d einem Wärmestrom

$$Q = Q^{(1)} + Q^{(2)} + \ldots$$

Es ist für das Folgende wichtig, dies Verhältniss festtellen.

Zur Lösung des ersten Problems betrachtet Hr. Liebenow ıen, von einem elektrischen Strom durchflossenen cylindrischen ɜtallstab, dem an dem einen Ende (a) eine Wärmemenge Q_a ɔ Zeiteinheit zugeführt, an dem anderen Ende (b) gleichzeitig entzogen wird, und aus dessen Mantelflächen (ohne dass rüber freilich etwas gesagt wäre) offenbar in jedem Zeit:ment soviel Wärme entnommen wird, als die in jedem ement entwickelte Joulewärme ausmacht; es ist nämlich ıtgesetzt, dass in dem Cylinder derselbe stationäre Temraturzustand stattfinde, als wenn kein elektrischer Strom in n flösse, und die Mantelfläche gegen Wärmeabgabe isolirt wäre.

Dann setzt Hr. Liebenow

$$Q_a - Q_b = A,$$

ıbei A die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit einer hypoɜtischen, allein durch den Wärmestrom hervorgerufenen, mit *thermoelektrischen* Kraft im Cylinder bedeutet; er drückt mit also aus, dass die Differenz der zugeführten und der entmmenen Wärme in diese Arbeit umgewandelt wird.

Indem er nun für A den Werth JE einführt, unter J die romstärke, unter E die elektromotorische Kraft im Cylinder rstanden, erhält er

$$Q_a - Q_b = JE;$$

bei ist JE auch nach Hrn. Liebenow's Vorstellung zugleich ɜ der Arbeit von E äquivalente Joulewärme.

Schon diese Formel muss im Grunde einige Bedenken :egen. Denn denkt man sich etwa den Cylinder als Verıdungsstück zwischen zwei grossen Conductoren von den ımperaturen T_a und T_b, so bringt der Strom J in jeder

1) Vgl. z. B. E. Riecke, Wied. Ann. **66**. p. 383. 1898.

Secunde ein Elektricitätsquantum aus dem einen nach dem anderen, ohne dass eine Compensation für diese Leistung ersichtlich ist. Es wird eben keine Wärme *umgesetzt*, sondern die Differenz von Q_a und Q_b als *Wärme* entzogen. Doch mag dies nur als beiläufige Bemerkung gelten.

Weiter betrachtet Hr. Liebenow die durch *Leitung* bewegten Wärmemengen als dem Cylinder auf *umkehrbarem* Wege zugeführt, was jedenfalls an sich nicht erlaubt ist, wendet in der bekannten W. Thomson'schen Weise den zweiten Hauptsatz auf sie an[1]) und erhält so

$$Q_a\left(\frac{T_a - T_b}{T_a}\right) = J E, \tag{5}$$

oder bei Beschränkung auf ein Element des Cylinders von der Länge ds

$$-\frac{Q}{T}\frac{dT}{ds} = JS, \tag{6}$$

wobei nun S auf die Länge Eins bezogen ist. $S\,ds$ entspricht dabei dem von Hrn. Liebenow benutzten $-dE$.

Nach den gemachten Annahmen gilt ferner

$$Q = -q\Lambda\frac{dT}{ds}, \quad J = q\lambda(S + S_0), \tag{7}$$

falls q den Querschnitt des Cylinders Λ und λ die Constanten der thermischen und der elektrischen Leitfähigkeit, S_0 aber die neben S wirksame elektromotorische Kraft *nicht* thermoelektrischen Ursprunges bezeichnet. Für S_0 gilt bekanntlich

$$S_0 = -\frac{\partial\Phi}{\partial s}, \tag{8}$$

worin Φ die Potentialfunction der elektrischen Vertheilung bezeichnet, die man, weil S_0 additiv mit S verbunden ist, *ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch in den Grenzen zwischen verschiedenen Körpern stetig annehmen darf.*

---

1) Es scheint mir nicht überall beachtet zu werden, dass diese Anwendung etwas Hypothetisches enthält und demgemäss nicht ganz unbedenklich ist. Der zweite Hauptsatz bezieht sich zunächst nur auf die Wärmemengen, die ein und derselbe Körper bei zwei homogenen Temperaturzuständen in umkehrbarer Weise aufnimmt und abgiebt; er wird durch W. Thomson aber übertragen auf die Wärmeaustausche, die an zwei verschieden temperirten Stellen desselben ungleichförmig erwärmten Körpers stattfinden.

Man erhält so

$$(9) \qquad \frac{A}{\lambda T}\left(\frac{d T}{d s}\right)^2 = S(S + S_0).$$

Hr. Liebenow nimmt nun weiter an, man könnte durch eine geeignete Anordnung $J = q\lambda S$, d. h. $S_0 = 0$ machen, und gelangt dadurch zu seinem merkwürdigen Satz

$$(10) \qquad S^2 = \frac{A}{\lambda T}\left(\frac{d T}{d s}\right)^2, \quad S = \pm\sqrt{\frac{A}{\lambda T}}\,\frac{d T}{d s}.$$

Aber die blosse *Gestalt* dieser Formeln lässt schon allein als nahezu sicher erscheinen, dass jener Satz nicht richtig sein kann; denn eine haltbare Theorie der Thermoelektricität, die die *Grösse* der elektromotorischen Kraft liefert, aber ihre *Richtung* unbestimmt lässt, ist doch kaum denkbar.

Indessen ist auch die *Methode der Ableitung* der Endgleichung, selbst wenn man die Bedenken gegen die Ausgangsformel (6) unterdrückt, nach meiner Ansicht nicht zulässig.

Nach der (mit der allgemeinen Vorstellung übereinstimmenden) Annahme des Hrn. Liebenow ist S *eine der Substanz individuelle Function allein der Temperaturverhältnisse des Cylinders.*

Die Formel (9) ist aber hiermit im directen Widerspruch, denn S erscheint nach ihr auch von S_0 abhängig, und S_0 bestimmt sich durch die Eigenschaften des ganzen mit dem Cylinder in leitender Verbindung befindlichen Systemes. Die Grösse S weiter, wie Hr. Liebenow thut, dadurch zu bestimmen, dass man $S_0 = 0$ macht, führt, ganz abgesehen von der Frage, ob diese Annahme realisirbar ist, zu einem weiteren Widerspruch; denn die Gleichung (9) wird dann in allen Fällen, wo S_0 *nicht* gleich Null ist, nicht erfüllt, obgleich sie nach der Ableitung eine allgemeine Geltung haben soll.

Um dies näher zu erläutern und dabei die Bedeutung der Function S_0 hervortreten zu lassen, sei der einfachste Fall betrachtet, dass zwei lineare Leiter (′) und (″) zu einem Kreis geschlossen sind. Es muss dann die Stromstärke

$$(11) \qquad J = q'\lambda'(S' + S_0') = q''\lambda''(S'' + S_0'')$$

längs des ganzen Systems constant sein. Auf jedem homogenen Theil variirt aber S' bez. S'' mit den Temperaturverhältnissen, von einem zum anderen mit der Substanz, demgemäss wechselt

auch S'_0 und S''_0; die letzteren Grössen sind gewissermaassen die *Regulatoren*, welche die Constanz des Stromes bewirken.[1]) Da für J die aus (11) folgende Formel gilt

$$J = \frac{\int S' d s' + \int S'' d s''}{\frac{s'}{q' \lambda'} + \frac{s''}{q'' \lambda''}},$$

so sind S'_0 und S''_0 vollkommen bestimmt.

Es dürfte aus dem Vorstehenden erhellen, dass der fundamentale Satz (10) des Hrn. Liebenow nicht begründet ist. —

Ich wende mich nun zu den Ueberlegungen, durch welche Hr. Liebenow eine Theorie der Peltier- und Thomsonerscheinungen zu geben versucht. Er beginnt mit der Annahme, dass „mit jedem elektrischen Strom ein Wärmestrom verknüpft sei" und behauptet über denselben: „Der Betrag dieses Wärmestromes ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung für den maximalen elektrischen Strom

$$J d E = \pm \frac{Q}{T} d T,$$

wenn man statt J den beliebigen Strom i setzt."

Ich bemerke, dass die bezügliche Gleichung für den „maximalen" Strom bei Hrn. Liebenow *nicht* wie vorstehend lautet, sondern

$$(\alpha) \qquad J d E = + \frac{Q}{T} d T;$$

das doppelte Vorzeichen wird von ihm ohne Begründung eingeführt.

Ein wenig weiter schliesst er „aus der Erfahrung", dass „für Metalle das negative Vorzeichen gilt", schreibt also bei Vertauschung von J und Q mit i und q gar nur

$$(\beta) \qquad i d E = - \frac{q}{T} d T,$$

1) Beiläufig möchte ich zu Obigem noch bemerken, dass es doch einigermaassen bedenklich ist, wenn Hr. Liebenow von *maximaler* elektromotorischer Kraft und *maximaler* Stromstärke spricht, die bei einem gewissen Temperaturgefälle eintreten, und darunter die Werthe von J und S versteht, die für $S_0 = 0$ resultiren. Einmal ist S unabhängig von S_0, und sodann kann S_0 ebensowohl das gleiche, als das entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie S, J also alle möglichen positiven und negativen Werthe annehmen.

was in unserer Bezeichnung lauten würde

$$(12) \qquad J S = + \frac{Q}{T} \frac{d T}{d s}.$$

Diese Schlussreihe ist mir nicht verständlich; ich will aber meine Bedenken gegen die Ableitung unterdrücken und nur die beiden Formeln (α) und (β), bez. die äquivalenten (6) und (12) für die elektromotorische Wirkung einer Wärmeströmung und für die thermomotorische Wirkung einer elektrischen Strömung combiniren. Sie scheinen mir miteinander nicht verträglich zu sein.

Greifen wir nämlich auf das im Eingang Gesagte zurück und bauen gemäss (1) und (2) den wirklichen complicirten Vorgang aus seinen Elementen auf, so wird nach Formel (6)

$$Q^{(1)} = - \frac{J^{(1)} S T}{d T / d s},$$

nach Formel (12)

$$J^{(2)} = \frac{Q^{(1)}}{T S} \frac{d T}{d s} = - J^{(1)},$$

somit wird $J^{(1)} + J^{(2)} = 0$, ebenso $J^{(3)} + J^{(4)} = 0$ etc. Es kommt nach Hrn. Liebenow's Theorie in Wirklichkeit also überhaupt kein elektrischer Strom zu stande. Aehnliche Ueberlegungen gelten in Bezug auf die resultirende Wärmeströmung.

2. Wenn nun auch im Vorstehenden der Nachweis dafür erbracht sein dürfte, dass die theoretischen Entwickelungen des Hrn. Liebenow nicht zu halten sind, so bleibt doch noch die immerhin überraschende Uebereinstimmung seiner Endformeln mit der Erfahrung zu erklären. Freilich bezüglich des auffallendsten Gesetzes (10) beschränkt sich nach der von den Herren Jaeger und Diesselhorst[1]) vorgenommenen Prüfung die Uebereinstimmung auf die *Grössenordnung*; die Vorzeichen der beobachteten und der berechneten Werthe differiren häufig, und die Unterschiede der absoluten Zahlen sind sehr beträchtlich. Aber immerhin wird man nach einer Erklärung dafür suchen, dass die bestrittenen Liebenow'schen Resultate anscheinend doch der Grössenordnung nach von der Erfahrung bestätigt werden.

---

1) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 38. p. 719. 1899.

Ich werde zur Aufdeckung dieser Beziehung auf die von mir entwickelte rein thermodynamische Theorie der Beziehungen zwischen Galvanismus und Wärme zurückgreifen, die Hrn. Liebenow entgangen sein dürfte. Dieselbe liefert als *Folgerungen*, was Hr. Liebenow als *Annahmen* einführt: die Existenz räumlicher elektromotorischer Kräfte, die von den Temperaturverhältnissen abhängen, und die scheinbare Mitführung von Wärme durch den elektrischen Strom.

Die Componenten X, Y, Z dieser elektromotorischen Kräfte sind innerhalb homogener isotroper Leiter gegeben durch die Formeln[1])

$$X = \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{d\Theta}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}, \ldots \tag{13}$$

wobei Θ eine der Substanz individuelle Function der Temperatur bezeichnet. Da X hier an der Stelle des früher benutzten S steht, so zeigt die Vergleichung dieser Formel mit (10), dass nach Hrn. Liebenow's Theorie

$$\frac{d\Theta}{dT} = \pm\sqrt{\frac{\varDelta}{\lambda T}} \tag{14}$$

sein müsste.

Die Componenten u, v, w der elektrischen Strömung haben die Werthe

$$u = \lambda(X + X_0), \ldots \tag{15}$$

wobei X_0, . . . die Componenten der elektromotorischen Kraft *nicht* thermoelektrischen Ursprunges bezeichnen; die Componenten U, V, W der gewöhnlichen Wärmeströmung sind

$$U = -\varDelta\frac{\partial T}{\partial x}, \ldots \tag{16}$$

die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ der elektrisch fortgeführten

$$\mathfrak{U} = -uT\frac{d\Theta}{dT}\ldots \tag{17}$$

Wir betrachten nun einen linearen Leiter, dessen Axe zur X-Axe gewählt werden möge, im stationären Wärmezustand. Dann muss gelten

$$\frac{\partial}{\partial x}(U + \mathfrak{U}) - uX_0 + \mathfrak{Q} = 0, \tag{18}$$

wobei uX_0 den von der elektromotorischen Kraft nicht-thermischen Ursprunges herrührenden Antheil der Joulewärme bezeichnet,

1) W. Voigt, l. c. p. 729.

den der Längeneinheit durch äussere Leitung entführten ärmebetrag. Die durch X bewirkte Joulewärme steckt beits in $\mathfrak{U}$.[1])

Den linearen Leiter denken wir von einem Punkte (1) t der Temperatur T_1 bis zu einem Punkte (2) mit der emperatur T_2 erstreckt und integriren die vorstehende Formel n dem Ende (1) bis zu einem beliebigen Punkte. Das Reltat ist

$$U + \mathfrak{U} = U_1 + \mathfrak{U}_1 + \int u X_0 \, d x - \int \mathfrak{Q} \, d x, \tag{9}$$

ıfür wir kürzer schreiben

$$U + \mathfrak{U} = - \omega . \tag{0}$$

Setzen wir die Werthe von U und $\mathfrak{U}$ aus (16) und (17) er ein, so erhalten wir

$$\left(A \frac{d T}{d x} + u T \frac{d \Theta}{d T} \right) = \omega . \tag{1}$$

iese Formel wollen wir auf die beiden homogenen Theile (′) ıd (″) eines wie p. 709 gedachten einfachsten linearen Leiter'eises anwenden, und indem wir hierfür x mit s, u mit j, $T/\partial x$ mit $d T/d s$ vertauschen, schreiben

$$\left\{ \begin{aligned} A' \frac{d T'}{d s'} + j' T' \frac{d \Theta'}{d T'} &= + \omega', \\ A'' \frac{d T''}{d s''} + j'' T'' \frac{d \Theta''}{d T''} &= - \omega''. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Verläuft s' im positiven Sinne von (1) nach (2), s'' im ıgativen Sinne, so entspricht $+ \omega'$ und $- \omega''$ für die beiden eitertheile genau dem oben definirten ω.

Ferner ist nach (15) und (13)

$$\left\{ \begin{aligned} j' &= \lambda' \frac{d}{d s'} (\Theta' - \Phi), \\ j'' &= \lambda'' \frac{d}{d s''} (\Theta'' - \Phi), \end{aligned} \right. \tag{3}$$

ɔbei Φ das elektrische Potential bezeichnet, also

$$\left\{ \begin{aligned} + \frac{\omega' - A' \, d T'/d s'}{\lambda' T' \, d \Theta'/d T'} &= \frac{d}{d s'} (\Theta' - \Phi), \\ - \frac{\omega'' + A'' \, d T''/d s''}{\lambda'' T'' \, d \Theta''/d T''} &= \frac{d}{d s''} (\Theta'' - \Phi); \end{aligned} \right. \tag{4}$$

1) W. Voigt, l. c. p. 730.

bei Integration dieser Formeln über s' bez. s'' und Summation fällt Φ heraus, und es resultirt

$$(25)\quad \int \frac{\omega' ds' - A' dT'}{\lambda' T' d\Theta'/d'T} - \int \frac{\omega'' ds'' + A'' d T''}{\lambda'' T'' d\Theta''/d T''} = |\Theta'| + |\Theta''|,$$

wobei die Ausdrücke rechts zwischen den Grenzen zu nehmen sind, die den Temperaturen T_1 und T_2 der Löthstellen entsprechen.

Nach dem oben für s' und s'' festgesetzten Richtungssinn gilt:

$$(26)\quad \begin{cases} |\Theta'| + |\Theta''| = |(\Theta_2' - \Theta_1') + (\Theta_1'' - \Theta_2''), \\ \qquad = (\Theta_2' - \Theta_2'') - (\Theta_1' - \Theta_1''). \end{cases}$$

Dabei ist beiläufig

$$(27)\quad \Theta_n' - \Theta_n'' = E_n$$

die elektromotorische Kraft der betrachteten Combination an der Löthstelle n, positiv gerechnet von (') zu (''); $|\Theta'| + \Theta''$ stellt also die aus den Messungen von Stromstärke und Widerstand zu schliessende elektromotorische Gesammtkraft des Kreises dar.

Die Formel (25) ist noch streng. Da es sich nur um die Frage der Grössenordnung handelt, so mag nunmehr eine *Annäherung* eingeführt werden, indem

$$T_2 - T_1 = \tau,$$

$$(28)\quad \Theta_2' - \Theta_1' = \frac{d\Theta'}{dT}\tau, \quad \Theta_2'' - \Theta_1'' = \frac{d\Theta''}{dT}\tau$$

gesetzt wird, und für T, $d\Theta/dT$ und ω unter den Integralen constante Mittelwerthe eingeführt werden. Dann resultirt

$$(29)\quad \frac{\omega' s' - A'\tau}{\lambda' T\tau d\Theta'/dT} - \frac{\omega'' s'' - A''\tau}{\lambda'' T\tau d\Theta''/dT} = \frac{d\Theta'}{dT} - \frac{d\Theta''}{dT}.$$

Diese Formel enthält die Antwort auf die gestellte Frage.

Sind nämlich ω' und ω'' bez. gleich $2A'\tau/s'$ und $2A''\tau/s''$, so wird die Gleichung befriedigt durch die Beziehungen

$$\left(\frac{d\Theta'}{dT}\right)^2 = \frac{A'}{\lambda' T}, \qquad \left(\frac{d\Theta''}{dT}\right)^2 = \frac{A''}{\lambda'' T},$$

welche dem Liebenow'schen Satze entsprechen. Sind ω' und ω'', von gleicher Grössenordnung, wie $2A'\tau/s'$ und $2A''\tau/s''$, so wird

auch der betreffende Satz *der Grössenordnung nach* erfüllt sein. Beachtet man, dass $\Delta \tau / s$ den Werth des mittleren thermischen Leitungsstromes angiebt, und dass ω das insgesammt der tieferen Löthstelle zufliessende Wärmequantum plus dem mittleren Werthe der Joulewärme $\int u X_0 \, d x$, minus dem mittleren Werth des Wärmeverlustes $\int \mathfrak{Q} \, d x$ darstellt, so kann man recht wohl verstehen, dass $2 \Delta \tau / s$ und ω die gleiche Grössenordnung haben.

Hiermit ist nach meiner Meinung die Erklärung dafür gegeben, dass die bestrittene Liebenow'sche Formel doch der Grössenordnung nach durch die Erfahrung bestätigt wird. —

Weit vollständiger, als der neue von Hrn. Liebenow gegebene Satz (10), ja sehr zufriedenstellend, werden die von ihm aus seiner Formel (β) abgeleiteten Folgerungen bezüglich des Peltier- und des Thomsoneffectes durch die Beobachtung bestätigt. Hier ist die Erklärung des Sachverhaltes überaus einfach.

Die Liebenow'sche Gleichung (β), bez. die damit äquivalente (12), ist nämlich, abgesehen vom Vorzeichen, identisch mit der ersten Formel des Systemes (17), das ich auf thermodynamischem Wege abgeleitet habe, und das, wie ich zeigte, die W. Thomson'schen Gesetze der umkehrbaren elektrischen Wärmeentwickelung nur in anderer Form enthält.[1])

In der That: wird s mit x, S mit X, J mit $u q$, Q mit $\mathfrak{U} q$ vertauscht, so folgt aus (12) zunächst

$$u X = \frac{\mathfrak{U}}{T} \frac{d T}{d x},$$

also bei Benutzung des Werthes (13) von X

$$\mathfrak{U} = u T \frac{d \Theta}{d T},$$

was nur im Vorzeichen von der ersten Formel (17) unterschieden ist.

Da aber dies Vorzeichen bei Hrn. Liebenow immer nach einer bestimmten Deutung der Erfahrungsthatsachen festgesetzt

---

1) Wie leicht zu erkennen, sind die von Hrn. Liebenow angestellten Ueberlegungen, *auf dies Problem übertragen*, den Thomson'schen sehr nahe verwandt.

wird, so macht der hier auftretende Gegensatz für die Benutzung der Formeln keinen Unterschied aus.

In der That sind die bezüglichen Liebenow'schen Resultate — abgesehen natürlich von dem durch den Satz (10) gegebenen Werth von S — mit den von W. Thomson herrührenden durchaus identisch, und da Hr. Liebenow bei der Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung auf jenen bedenklichen Satz nicht zurückgreift, so enthält seine Vergleichung überhaupt kein neues Moment; *sie bestätigt hier nur in alter Weise alte Resultate.*[1])

3. Abschliessend wendet Hr. Liebenow seinen Satz auf leitende Krystalle und auf beliebige schlechte Leiter an. Es braucht auf diese Ueberlegungen nach dem Vorstehenden genauer nicht eingegangen zu werden, doch mögen einige besondere Bemerkungen Platz finden.

Die Anwendung des Satzes (10)

$$S^2 = \frac{A}{\lambda T}\left(\frac{dT}{ds}\right)^2$$

auf leitende Krystalle zeigt dessen Unhaltbarkeit von einer neuen Seite. Denn bei Krystallen sind Gesetze für die Abhängigkeit der Grössen S, A, λ von der Richtung aufgestellt, die mit der Beobachtung vortrefflich stimmen. Aber diese Gesetze sind nicht von einer Form, welche das Bestehen der obigen Gleichung zuliesse.

Der Gedanke, dass in Dielektricis durch ein Temperaturgefälle eine elektromotorische Kraft hervorgerufen werde, entspricht ganz auch meinen Vorstellungen. Es ist aber unmöglich, durch eine solche Annahme, wie das Hr. Liebenow versucht, die Pyroelektricität der Krystalle zu erklären. Beim Turmalin, den Hr. Liebenow als Beispiel nennt, ist die elektrische Polarisation nicht die Wirkung eines Temperatur*gefälles* längs dessen Axe und kehrt sich nicht mit dessen Vorzeichen um, sondern wird durch eine *gleichförmige* Erwärmung hervorgerufen, wobei die Unsymmetrie des Krystalles die Richtung des elektrischen Momentes bestimmt.

---

1) Die Tabelle auf p. 321 der Liebenow'schen Arbeit stimmt z. B. mit der von Hrn. Jahn (Wied. Ann. 34. p. 755. 1888) gegebenen im Wesentlichen vollständig überein.

Ob die Reibungselektricität sich durch die Erwärmung r Reibungsfläche und die infolge davon auftretenden Temraturgefälle in der Nachbarschaft erklären lässt, scheint mir hr zweifelhaft. Jedenfalls ist das Resultat dieser Auffassung, lches Hr. Liebenow zu ihrer Bestätigung anführt, im Widerruch mit der Erfahrung: bei Reibung eines Metalles gegen ı Dielektricum wird *nicht* stets das Metall positiv.

Göttingen, im August 1899.

(Eingegangen 3. September 1899.)

---

12. *Bemerkung zur Abhandlung des Hrn. H. Th. Simon: „Ueber einen neuen Flüssigkeitsunterbrecher"; von W. Ziegler.*

In Bd. 68 p. 860 dieser Annalen beginnt Hr. H. Th. Simon seine Abhandlung „Ueber einen neuen Flüssigkeitsunterbrecher" folgendermaassen:

„Vor kurzem [1]) habe ich eine Theorie des Wehneltunterbrechers entwickelt, welche die Wirkungsweise dieses interessanten Apparates durch eine Localisation von Stromwärme erklärte, die eintreten muss, wenn man in einer elektrolytischen Zelle eine kleine Elektrode einer grossen gegenüberstellt. In diesem Falle ist der im übrigen grosse Querschnitt der leitenden Flüssigkeitssäule an der Oberfläche der kleineren Elektrode schroff auf einen relativ kleinen Betrag verengt, sodass die Stromdichte und damit die Entwickelung der Stromwärme dort ein scharf ausgeprägtes Maximum besitzt."

Der hierinliegende historische Anspruch scheint mir nicht ganz berechtigt, hat doch Hr. H. Th. Simon selbst in einer früheren Abhandlung über „das Wirkungsgesetz des Wehneltunterbrechers" erwähnt [2]):

„Wie ich nachträglich fand, wird meine Auffassung in erfreulicher Weise durch die Versuche und Ansichten gestützt, die Hr. Richarz [3]) über die Natur der an kleinen Platinelektroden auftretenden Uebergangswiderstände mitgetheilt hat." Auch Hr. Wehnelt selbst hatte in seiner ersten Mittheilung [4]) diese Arbeiten von Richarz und mir selbst nicht erwähnt, er hat aber dieses Versehen nachträglich berichtigt. [5])

Allerdings scheint Hr. Wehnelt anfänglich die Erhitzung der Elektrode selbst als den ersten Vorgang der Erscheinung aufgefasst zu haben, hat aber später jedenfalls, wie auch

1) H. Th. Simon, Wied. Ann. **68.** p. 273. 1899.

2) l. c. p. 275.

3) F. Richarz, Wied. Ann. **39.** p. 67 u. 201. 1890; **47.** p. 567. 1892; F. Richarz u. W. Ziegler, Wied. Ann. **63.** p. 261. 1897.

4) A. Wehnelt, Elektrotechn. Zeitschr. p. 76. Januar 1899.

5) l. c. p. 187. Februar 1899; Wied. Ann. **68.** p. 233. 1899; P. Spiess u. A. Wehnelt, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **1.** p. 53. 1899.

. H. Th. Simon, in Uebereinstimmung mit den Versuchen ı Richarz und mir erkannt, dass die Erhitzung der Flüssig-.t das Wesentliche ist.[1]) Richarz nahm auf Grund von obachtungen bei seinen Versuchen zur Bestimmung der .vanischen Polarisation bei grosser Stromdichtigkeit an, dass olge dieser grossen Stromdichtigkeit die Erwärmung des ektrolyten an der kleinen Drahtelektrode so gross werde, ss die Flüssigkeit in ihrer Nähe verdampfe und infolge der h bildenden Dampfhülle die Intensität auf ein Minimum rabsinke. Diese von F. Richarz ausgesprochene Ver-ıthung wurde auf seinen Vorschlag hin von mir experimen-l bestätigt, indem ich durch ein in die Nähe der kleinen ahtelektrode gebrachtes Thermoelement die Temperatur an rselben bestimmte und als Resultat erhielt, dass erstens in r That die Temperatur des Elektrolyten mit wachsender omstärke bis zum Siedepunkt steigt, und zweitens die ige Erscheinung jedesmal erst dann eintritt, wenn der Siede-nkt des Elektrolyten erreicht ist.[2])

Hiernach war auch weiter vorauszusehen, dass eine Ver-mpfung des Elektrolyten eintreten muss, wenn derselbe in-ge einer schroffen Querschnittsverengung an einer anderen elle als an der Elektrode von einem Strom grosser Dichte rchflossen wird, wie Hr. Wehnelt[3]) und Hr. H. Th. Simon[4]) chgewiesen haben.

Unberührt bleibt natürlich das Verdienst von Hrn. Weh-lt, gefunden zu haben, dass bei der ursprünglichen Form .nes Unterbrechers durch Einschaltung einer Selbstinduction den Stromkreis die Unterbrechungen einen *regelmässigen* *riodischen* Charakter erhalten, und dass dies in der modifi-ten Form auch schon ohne Selbstinduction im Stromkreise r Fall ist.[5])

Greifswald, den 25. August 1899.

1) A. Wehnelt, Wied. Ann. 68. p. 262. 1899.
2) W. Ziegler, Inauguraldissertation. Greifswald 1897; F. Richarz W. Ziegler, Wied. Ann. 63. p. 261. 1897.
3) A. Wehnelt, Wied. Ann. 68. p. 262. 1899.
4) H. Th. Simon, Wied. Ann. 68. p. 861. 1899.
5) A. Wehnelt, Wied. Ann. 68. p. 263. 1899.

(Eingegangen 27. August 1899.)

13. *Erwiderung*[1]; *von G. Jäger.*

Gegenüber den von Hrn. Voigt[2]) gemachten Bemerkungen möchte ich betonen, dass ich seine Ausführungen nicht anerkennen kann, indem ich darauf hinweisen könnte, dass man eine Zustandsgleichung, in der das bewusste σ fehlt, doch nicht als die Gleichung von van der Waals ansehen darf. Ich könnte daran erinnern, dass Hr. Voigt eine Reibungsformel benutzt hat, die in dieser Form nur aus der Annahme, die Molecüle seien starre Kugeln, für verdünnte Gase folgt etc. Indess unterlasse ich jede weitere Erörterung, da ich meine Anschauung in den früheren Abhandlungen vollständig dargelegt habe.

1) Da in der vorliegenden Discussion die verschiedenen Ansichten zur Geltung gekommen sind, glaubt die Redaction, die Discussion schliessen zu dürfen.

2) W. Voigt, Wied. Ann. **69**. p. 324. 1899.

(Eingegangen 12. October 1899.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1899. ANNALEN № 12.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 69.

1. *Ueber die höchsten hörbaren und unhörbaren Töne von $c^5 = 4096$ Schwingungen ($ut_7 = 8192$ v s), bis über f^9 (fa_{11}), zu 90 000 Schwingungen (180 000 v s), nebst Bemerkungen über die Stosstöne ihrer Intervalle, und die durch sie erzeugten Kundt'schen Staubfiguren;*

von Rudolph Koenig.

(Schluss von p. 660.)

II. Ueber die höchsten Töne, welche man ohne directes Stimmen mit den verschiedenen tönenden Körpern nach der Berechnung ihrer Dimensionen und auch durch mechanisch erzeugte Impulse herstellen kann.

Für die Herstellung von Tönen mit bestimmten Schwingungszahlen vermittelst des directen Stimmens sind die Stimmgabeln unbedingt die zweckmässigsten und bequemsten von allen Tonwerkzeugen, da man ihre Töne mit gleicher Leichtigkeit erhöhen, wie auch vertiefen kann, will man jedoch mit geringerer Mühe und Arbeit ohne directes Stimmen für praktische Zwecke noch hinreichend genaue Tonreihen herstellen, indem man nur den Ton eines einzigen Körpers direct stimmt und darauf nach seinen Dimensionen die Dimensionen gleichartiger Körper für alle andere Töne berechnet und in einem akustisch durchaus gleichen Material ausführt, so sind Stimmgabeln in diesem Falle wegen ihrer zu complicirten Form natürlich nicht anwendbar und man muss vielmehr Körper von möglichst einfacher Form benutzen, wie transversal und longitudinal schwingende Stäbe, Platten, Luftsäulen etc. Im Folgenden sollen nun die Eigenschaften jeder dieser Körperklassen untersucht werden, welche sie mehr oder weniger geeignet macht, die erforderten Bedingungen erfüllen zu können.

1. Transversal schwingende Stäbe.

Transversal schwingende Stäbe haben vor allen anderen Körpern den Vorzug voraus, dass sich bei ihnen der schädliche Einfluss der Befestigung so gut wie ganz vermeiden lässt, denn da sie bei der Erzeugung ihres tiefsten Tones mit zwei Knoten schwingen, so kann man sie an diesen beiden Stellen vollständiger Ruhe an Fäden oder dünnen Drähten aufhängen, ohne dadurch die Freiheit ihrer Schwingungen zu beeinträchtigen, weshalb ich auch ganz natürlich sie gewählt hatte, als ich im Jahre 1866 eine Reihe sehr hoher Töne ohne directes Stimmen herzustellen unternommen. Diese befand sich denn 1867 unter meinen Apparaten auf der Weltausstellung in Paris und ist seitdem allgemein bekannt geworden.[1]) Solche cylindrische Stäbe lassen beim Anschlagen immer Stösse hören, und ich habe in meiner Abhandlung „Ueber die Stösse und Stosstöne zweier in demselben Körper erregter Schwingungsbewegungen"[2]) beschrieben, wie sich mit Stäben von quadratischem oder rechtwinkeligem Querschnitt zwischen zwei rechtwinkelig zu einander erzeugten Schwingungsbewegungen ein Unisono ohne Stösse ebenfalls nicht erreichen lässt, was auch der Theorie vollständig entspricht, welche Lord Rayleigh und besonders seitdem Max Wien[3]) von diesen und ähnlichen Erscheinungen gegeben haben. Ausserdem entstehen aber gewöhnlich auch noch in cylindrischen Stäben direct zwei etwas voneinander verschiedene Töne zugleich, wegen der Ungleichheit ihrer beiden Elasticitätsaxen und der nicht absolut gleichen Länge der Diameter ihres Querschnittes in den verschiedenen Richtungen. Es sind also meistens mehrfache Ursachen, welche die Stösse beim Anschlagen der Stahlcylinder hervorrufen. weshalb es kaum möglich sein dürfte, experimentell ein allgemeines Verhältniss zwischen ihrer Frequenz und den absoluten Schwingungszahlen der Cylinder aufzufinden. Bei drei Cylindern beispielsweise, welche aus der gleichen Stahlstange geschnitten, die Längen von 771,5 mm, von 298,5 mm und von 146,5 mm hatten, waren die beobachteten Stösse der Grundtöne entsprechend 0,60; 0,67 und 3,00 in der Secunde,

1) R. Koenig, Cat. Nr. 51. 1889.
2) R. Koenig, Wied. Ann. **34.** p. 400. 1889.
3) M. Wien, l. c. **61.** p. 151. 1897.

worin sich offenbar keine Gesetzmässigkeit erkennen lässt. In jedem Falle können diese Stösse aber immer nur einen ganz geringen Einfluss auf die Bestimmung der Tonhöhe des Stabes ausüben, denn selbst wenn ihre Anzahl für den Grundton $c^5 = 4096$ Schwingungen bis zu 8 oder 10 in der Secunde steigen sollte, so möchte man doch noch immer den einen wie den andern der beiden sie hervorrufenden Töne für den Ton des Cylinders annehmen können, ohne dabei einen grossen Fehler zu begehen.

Die Längen der aus ein und derselben Stahlstange für bestimmte Töne geschnittenen Cylinder müssen zu einander im umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Schwingungszahlen dieser Töne stehen, um die Genauigkeit, welche man von der Anwendung dieses Gesetzes im allgemeinen zu erwarten berechtigt ist, zu prüfen, bestimmte ich die Schwingungszahlen einiger solcher nach demselben hergestellter Cylinder direct, und fand, dass bei ihnen nach der Höhe zu die Schwingungszahlen, wenn auch nur in sehr geringem Maasse, so doch immer mehr und mehr hinter den geforderten Werthen zurückblieben. So hätte nach einem Stahlcylinder von 771,5 mm Länge mit dem mittleren Grundton von 310 *v s* berechnet, ein Stahlcylinder für $c^3 = 2048$ *v s* die Länge von 300,16 mm haben sollen, er musste jedoch bis zu 298,5 mm verkürzt werden, um c^3 wirklich zu erreichen, und ebenso war es nöthig, die berechnete Länge eines Cylinders von 150,08 mm für $c^5 = 8192$ *v s* um 3,6 mm zu verkürzen, um mit ihm genau c^5 zu erhalten. Man kann die gleiche Beobachtung auch noch an den Tönen der Stahlstäbe von c^5 bis a^5 weiter verfolgen, da bei schnell aufeinander folgendem Anschlagen ihre Intervalle noch sehr gut die Stosstöne hören lassen und also vermittelst dieser auch noch direct gestimmt werden können. Die nach der Länge des für den Grundton c^5 direct gestimmten Cylinders berechneten Längen einer Reihe solcher Cylinder, und ihre beim directen Stimmen erhaltenen Längen, wie auch die allmählich nach der Höhe hin wachsenden Unterschiede zwischen beiden, lasse ich hier folgen:

	c^5	d^5	e^5	f^5	g^5	a^5
Berechnete Längen	**146,5 mm**	**138,1**	**131,0**	**126,9**	**119,6**	**113,5 mm**
Gefundene Längen		**137,7**	**130,3**	**125,8**	**118,3**	**112,1**
Nöthige Verkürzungen der berechn. Längen		**0,4**	**0,7**	**1,1**	**1,3**	**1,4 mm**

Der höchste Cylinder a^5, dessen beim directen Stimmen gefundene Länge um 1,4 mm kürzer ist, als seine berechnete, würde folglich bei seiner berechneten Länge 13318 *v s* statt der erforderten 13653 *v s* gemacht haben und somit um ungefähr einen Viertelton zu tief gewesen sein. Würde die Vertiefung der Cylindertöne nach der Höhe zu immer in gleicher Weise fortschreiten, so möchte sie dabei für die Töne zwischen c^7 und g^7 dann ungefähr drei Viertel eines Tones betragen, und dieses scheint wirklich der Fall zu sein, da bei einer directen Bestimmung der Schwingungszahl des Cylinders e^7 aus einer meiner Reihen, vermittelst der Staubfiguren, Schwendt den Ton desselben näher d^7 als e^7 gefunden hat, was er glaubte der Verstimmung dieses Cylinders zuschreiben zu dürfen, in der That aber offenbar in der beschriebenen experimentell festgestellten Abweichung der wirklichen Schwingungszahlen von den durch Berechnung nach der Formel $L : L' = \sqrt{N'} : \sqrt{N}$ gefundenen, seinen Grund haben muss, denn ich wüsste wirklich nicht, wodurch eine derartige Verstimmung bei einem solchen Stahlcylinder hätte bewirkt werden können. Da ich bei den bis jetzt von mir construirten Cylinderreihen die tiefsten Töne bis in die Mitte der Octave von c^5 bis c^6 immer vermittelst der Stosstöne corrigirt und dann erst über diese Grenze hinaus das Längengesetz ohne Correctur angewendet, so dürfte die regelmässig fortschreitende Vertiefung bei allen bis zu den Tönen zwischen c^7 und g^7 gewöhnlich nur einen halben Ton erreichen, und auch dieser Fehler wird sich nun in der Folge noch zum grössten Theile durch eine kleine Correctur der berechneten Längen der Cylinder, nach den experimentell gefundenen Forderungen, vermindern lassen.

Was die Hörbarkeit der Töne dieser Stahlcylinder anlangt, deren ganze Reihe von c^5 bis c^8 reicht, so ist sie fast eben so gut wie die der Stimmgabeln, sodass man mit ihnen bei Untersuchungen über die Hörgrenze bei verschiedenen Personen auch gewöhnlich die gleichen Resultate wie mit den letzteren erhält. Die Cylinder von c^5 bis c^7 können dabei auf ihrem Untersatze aufgehängt bleiben und da angeschlagen werden, wie Fig. 8 zeigt; die von d^7 bis e^8 müssen jedoch, an ihren beiden Fäden hängend, dicht vor dem Ohre gehalten werden, während man sie mit dem Hammer in ihrer Mitte

anschlägt. — Der Einwurf aber, welchen man gegen die Brauchbarkeit dieser Stahlcylinder für die Bestimmung der Hörgrenze mitunter hat machen wollen, dass man bei den nicht gehörten Tönen der kleinsten Cylinder gar nicht mehr

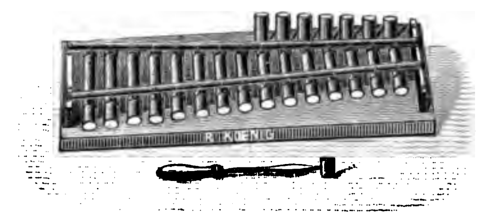


Fig. 8.

wissen könne, ob diese überhaupt noch vibriren, ist bekanntlich schon lange dadurch beseitigt worden, dass Ed. Hagenbach-Bischoff gezeigt hat, dass sich die Existenz ihrer unhörbaren Töne vermittelst der sensitiven Flammen sichtbar nachweisen lässt.[1])

2. Longitudinal schwingende Stäbe.

Die longitudinal schwingenden Stäbe werden schon in der Octave von c^5 bis c^6 zu kurz, um noch durch Anstreichen in ihrer Längenrichtung, sei es an einem Ende für den Grundton, sei es in ihrer Mitte für die Octave, bequem zum Tönen gebracht werden zu können, wo dann also nur übrig bleibt, sie durch Anschlagen einer ihrer Endflächen in der Richtung der Axe zu erregen. Hier ist es dann schon sehr schwer, die Stäbe in ihrer Mitte stark genug zu befestigen, um sie kräftig mit einem Stahlhammer anschlagen zu können, und ohne dabei ihre Tonhöhe beträchtlich zu verändern und auch ihre Schwingungsdauer in sehr hohem Grade zu beeinträchtigen, nur wenn man sie in ihrer Mitte blos zwischen zwei Fingerspitzen hält, vibriren sie noch gut. Immer stellt sich bei ihnen aber der Uebelstand ein, dass beim Anschlagen zugleich mit dem Longitudinaltone auch ihr zweiter Transversalton mit drei Knoten entsteht, und zwar gewöhnlich mit einer solch grossen Intensität, dass er die Beobachtung des ersteren bei den tieferen Tönen schon sehr stark beeinträchtigt, bei den höheren aber in vielen Fällen sogar geradezu unmöglich macht, weil er

1) J. Violle, Cours de Physique 2. p. 26.

nämlich dann schon selbst so hoch geworden ist, dass man nicht mehr wissen kann, mit welchem der beiden Töne man es eigentlich zu thun hat, wie sich aus folgendem Beispiele ersehen lässt. Ein Stab von 316 mm Länge und 20 mm Durchmesser giebt den Longitudinalton c^6, und den zweiten Transversalton zwischen d^4 und e^4, um die Hälfte verkürzt sollte er also den Longitudinalton c^7 und den Transversalton mit drei Knoten zwischen d^6 und e^6 hören lassen, schlägt man aber diesen Stab von 158 mm Länge und 20 mm Durchmesser an einer seiner Endflächen in seiner Längenrichtung an, so hört man zwar einen tieferen, schnell verschwindenden Ton, und auch einen hohen starken, der für seine Höhe recht lange fortklingt, und hat auch durchaus den Eindruck, nun einen Transversalton des Stabes und seinen hohen Longitudinalton zu vernehmen; untersucht man jedoch die Sache näher, so findet man, dass der tiefere Ton, der tiefste Transversalton mit zwei Knoten des Stabes ist, der so schnell verschwindet, weil der Stab in der Mitte, also gerade in seinem Schwingungsbauche, mit den Fingern gehalten wird, der hohe vermeintliche Longitudinalton aber dem Transversalton mit drei Knoten entspricht, wovon man sich sofort dadurch überzeugen kann, dass man mit dem Stahlhammer den Stab transversal an einer Reihe dicht aufeinander folgender Punkte in seiner ganzen Länge anschlägt, wo man dann diesen Ton an seinen drei Knotenstellen vollständig verschwinden hört, während er an allen anderen immer stark, und an seinen beiden Enden und in der Mitte zwischen zweien seiner Knoten mit grösster Intensität hervorgerufen wird. Statt der beiden erwarteten Töne c^7 und dem Tone zwischen d^6 und e^6 hört man also den Transversalgrundton, welcher etwas höher als a^4 ist, und den Ton zwischen d^6 und e^6, aber Nichts von dem Longitudinalton c^7, da dieser wahrscheinlich von dem starken Transversaltone mit drei Knoten vollständig übertönt wird. Es ist also schon in dieser Gegend der Tonhöhen nichts Brauchbares mehr von den Longitudinaltönen zu erwarten, obgleich hier der Abstand des Transversaltones von dem Longitudinaltone doch noch immer etwa eine Septime beträgt, wollte man aber gar den Cylinder noch weiter verkürzen, um schliesslich seinen Longitudinalton c^8 zu erreichen, so würde der Transversalton sich nicht nur

bald seinem Longitudinaltone bis zum Unisono genähert haben, sondern sogar auch, wenn der Longitudinalton c^8 geworden wäre, über ihn schon um eine kleine Terz hinausgegangen sein. —

Soweit sich aber der Longitudinalton mit Sicherheit ohne Verwechselung beobachten lässt, also etwa bis in die Mitte der Octave von c^6 bis c^7, zeichnet er sich vor den Tönen gleicher Höhe der transversal schwingenden Stäbe und auch der Stimmgabeln durch eine beträchtlich längere Dauer aus, und man erhält auch bei der Anwendung des Gesetzes, nach welchem die Längen der longitudinal schwingenden Stäbe im umgekehrten Verhältnisse ihrer Schwingungszahlen zu einander stehen, was die Richtigkeit der Tonhöhe anlangt, mit den berechneten Längen der Stäbe sehr gute Resultate, denn beispielsweise liessen drei Stäbe, deren Längen nach der Länge eines für c^4 gestimmten Stabes von 1250 mm Länge, für die Töne e^4, g^4, c^5 berechnet waren, e^4+2, g^4+4 und c^5+8 *v d* hören, sodass sie also nur in sehr geringem Grade nach der Höhe zu höher als die absolut richtigen Schwingungszahlen wurden. Beiläufig sei denn auch noch bemerkt, dass bei den ersten vier harmonischen Longitudinaltönen einer Stahlstange von 3,086 m Länge, welche 836 Schwingungen machte, sich gar keine Abweichung von den erforderten Schwingungszahlen nachweisen liess. —

3. Platten.

Um die Leistungsfähigkeit der Platten prüfen zu können, hatte ich eine Reihe von Quadratscheiben construirt, und die alle aus demselben etwa 1 mm dicken Messingbleche geschnitten waren, und deren tiefste bei der Figur des Diagonalenkreuzes direct auf c^1 gestimmt, etwa 112 mm Seitenlänge hatte und die dann für die Berechnung der Seitenlängen aller anderen als Grundlage gedient hatte.

Es ist sehr schwer, bei solch kleinen dünnen Platten die Tonhöhe mit grosser Genauigkeit zu bestimmen, denn erstens verändert sich dieselbe schon unter sonst gleichen Umständen beträchtlich mit der Amplitude der Schwingungen, sodass z. B. bei der Platte c^2 der Ton von ihrer grössten Schwingungsweite bis zur geringston beim vollständigen Verklingen sich etwa um 8 bis 10 Schwingungen, bei der Platte c^3 um 4—5

vertiefte, und ferner treten bei ihnen auch noch ganz ebenso wie bei den transversal schwingenden Stäben, und aus denselben Gründen oft Stösse auf. Der grösste Uebelstand aber, auf welchen man stösst, wenn man mit Platten feste Töne herzustellen versucht, ist die bei ihnen sehr grosse Abhängigkeit ihrer Tonhöhe von der Art ihrer Befestigung. Um diese klar darzustellen, benutzte ich eine Platte c^3, welche bequem in einer Zwinge zwischen drei Paaren kleiner runder Scheiben von 6, von 8 und von 10 mm Durchmesser festgeschraubt werden konnte. Diese Scheiben hatten alle eine durchaus gleiche Dicke, sodass bei gleicher Einstellung der pressenden Schraube die Platte zwischen ihnen sich immer unter demselben Drucke befand. Die Scheiben, wie die Platten waren in ihrer Mitte mit einem Löchelchen durchbohrt, durch welches ein auf der Unterlage befestigtes Stahlstäbchen von der Dicke einer etwas starken Nähnadel gerade hindurchgesteckt werden konnte, wodurch die richtige Lage der Scheiben und der Platte zu einander und zu der Mitte der pressenden Schraube immer gesichert war. Absolut genaue Tonbestimmungen konnten natürlich aus den schon angegebenen Gründen nicht erhalten werden, dann aber auch, weil in den meisten untersuchten Fällen der Ton der Platten nur während der Wirkung des Bogens dauerte und nicht frei nachtönte, und es immer äusserst schwer ist, während der Wirkung des Bogens einen Ton mit so durchaus isochronen Schwingungen ohne plötzliche Phasensprünge zu erhalten, dass er mit einer frei schwingenden Stimmgabel regelmässige Stösse bilden kann, doch waren die Mittelwerthe, welche ich erhielt, folgende. Die Platte auf die Spitze des Mittelfingers gelegt, mit der Spitze des Daumens gehalten, und nach dem Anstreichen durch Aufheben des Daumens in ihren grösstmöglich freien Schwingungszustand versetzt, machte 1028 Schwingungen; wurde sie dann der Reihe nach zwischen den Platten von 6, von 8 und 10 mm Durchmesser mit möglichst schwachem, aber immer gleichem Drucke eingeschoben, so waren ihre Schwingungszahlen entsprechend 1030, 1060 und 1096, und bei einem mittleren und dann stärksten Drucke wuchsen sie von 1030 bis zu 1040, von 1060 bis zu 1080 und von 1096 bis zu 1144, oder vom schwächsten bis zum stärksten Drucke um 10, um 20 und

um 48 Schwingungen, sodass demnach der Unterschied zwischen den Tönen der möglichst frei schwingenden, und der unter stärkstem Drucke zwischen zwei Scheiben von etwa einem Sechstel ihrer Seitenlänge im Durchmesser vibrirenden Platte fast einen ganzen Ton betrug.

Bei möglichst freischwingenden und auch nachklingenden Platten bestätigt sich aber allerdings das Gesetz, nach welchem ihre Schwingungszahlen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Oberflächen, oder der Quadrate ihrer Seitenlängen zu einander stehen, sehr wohl, denn von zwei Platten nach demselben für c^2 und c^4 construirt, schwankte der Ton der ersteren zwischen ungefähr 512 und 504, und der letzteren zwischen 2045 und 2046 Schwingungen bei den verschiedenen Amplituden, es ist aber eben nicht möglich, sehr kleine Platten mit sehr hohen Tönen gut in Schwingungen zu versetzen, ohne sie stark zu befestigen, und auch wenn dieses möglich wäre, würden sich Platten doch noch immer nicht zur Herstellung von Reihen fester Töne eignen, welche zur Bestimmung der Hörgrenze dienen sollen, wegen der Schwäche ihrer Töne, die für Ohren, welche sonst noch c^7 und d^7 gut hören können, schon in dem untersten Theile der Octave von c^6 bis c^7 unvernehmbar werden.

Sehr gut eignen sich dagegen kleine Platten dazu, um überhaupt die Existenz vollständig unhörbarer Töne bequem zur Darstellung zu bringen, denn man erhält ohne Schwierigkeit beim einfachen Anstreichen mit dem Bogen das Kreuz der Diagonalen noch auf Quadratscheiben, deren Seitenlänge nicht mehr als 9,9 mm beträgt, und deren Ton c^8 wohl für alle Ohren schon vollständig unhörbar sein dürfte. Ich habe dieses Diagonalkreuz sogar noch auf einer Quadratscheibe von 8,85 mm Seitenlänge erhalten, deren Ton also e^8 sein musste, was aber schon etwas schwieriger war. Man hat übrigens für dieses Experiment gar keine besondere Platte nöthig, sondern kann dazu irgend ein kleines Geldstück trotz seiner geprägten Oberfläche verwenden, denn Silbermünzen von 10 und 4 Sous, 4 Pfennigen und 3 Pence gaben mir ganz gleich gute Resultate. Die kleine Münze wurde dabei zwischen den zwei sich gegenüberstehenden abgeplatteten Spitzen zweier Schrauben in einer kleinen Zwinge eingeklemmt, welche selbst in einem Schraubstock befestigt war, und ausserdem auch noch, um ihre Drehung

um ihren Befestigungspunkt während des Anstreichens zu verhindern, ein Punkt auf ihrer Oberfläche nahe am Rande mit einer Stahlspitze festgelegt. —

Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch eine Beobachtung, welche ich an kleinen Platten gemacht, obgleich sie eigentlich nichts mit den höchsten Tönen zu thun hat, hier mittheilen, da sie, wie ich glaube, noch nie beschrieben worden ist. Man kann nämlich auf kleinen Platten ausser den bei grösseren für ihre tiefsten Töne bekannten Chladni'schen Figuren, die bei Kreisscheiben aus zwei sich rechtwinklig schneidenden Diametern, und auf Quadratscheiben in einem Kreuze zweier durch ihren Mittelpunkt parallel zu ihren beiden Seiten laufenden Linien bestehen, auch noch Schwingungsformen mit nur einer einzigen geraden Linie erhalten, welche auf der Kreis-

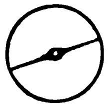
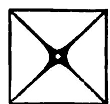
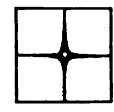
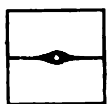
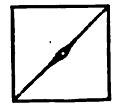
    

Fig. 9.

scheibe die Lage irgend eines ihrer Durchmesser haben kann, auf der Quadratscheibe eine Diagonale, oder eine ebenfalls durch ihren Mittelpunkt gehende Parallellinie zu einer Seite bildet. So erhält man auf einer Quadratscheibe von 19,8 mm Seitenlänge, welche für das Diagonalenkreuz auf den Ton c^6 (ut_8) zugeschnitten war, wenn sie mit dem Kreuz der zu ihren Seiten parallelen Linien schwingt, natürlich f^5 (fa_7), dann aber auch noch bei der Bildung nur einer Diagonale f^4 (fa_6) und bei nur einer Parallellinie zu einer Seite fis^4 ($fa\sharp_6$) (Fig. 9). In diesen beiden letzten Fällen schwingen die beiden gleichen Hälften der Platte, in welche sie durch die gerade Linie getheilt wird. mit gleichen Zeichen, wie die beiden Zinken einer schwingenden Stimmgabel sich gleichzeitig einander nähern und von einander entfernen, und wie es auch ein kleiner schmaler Stab von der Dicke der Platte und der Länge ihrer Seite thut, der in seiner Mitte in gleicher Weise wie die Platte festgeschraubt ist und an einem seiner Enden angestrichen wird, der dann auch nur eine durch seinen Mittelpunkt gehende Querlinie zeigt und auch den gleichen Ton wie die Platte mit nur einer

Querlinie giebt. Die Platte bildet also bei der Theilung durch nur eine gerade Linie gleichsam eine Stimmgabel mit Zinken, deren innere Flächen in derselben Ebene liegen, und deren Stiel durch die Klemmschrauben gebildet wird.

Mit zunehmender Grösse der Platte wird es immer schwerer, die Figuren mit einer einzigen Linie zu erhalten, und nimmt auch die Schärfe derselben mehr und mehr ab, sodass schon auf einer Quadratscheibe von 80 mm Seitenlänge sie sich nur noch sehr unvollkommen bilden.

4. Orgelpfeifen.

Nach Cavaillé Coll soll die Länge der offenen rechteckigen Orgelpfeifen gleich der halben theoretischen Wellenlänge ihres Tones weniger ihrer doppelten Tiefe sein, und die der gedeckten Pfeifen gleich der theoretischen Viertelwelle, ebenfalls weniger ihrer doppelten Tiefe. Dieses, obgleich nur durch die Erfahrung gefundene und vollständig empirische Gesetz bestätigt sich in der Praxis dennoch ganz vortrefflich, wie man sich davon z. B. durch eine Reihe von neun Orgelpfeifen überzeugen kann, welche nach diesem Gesetze construirt sind, und von denen fünf bei gleicher Tiefe verschiedene Längen haben und die Töne c', d', e', f'', g' geben, vier aber gleich lang und verschieden tief, d', e', f'', g', hören lassen.[1]) Die gute Uebereinstimmung dieses Gesetzes mit den Beobachtungen lässt sich ebenso auch noch bis zu c^5 direct ohne jede Schwierigkeit nachweisen, und es ist daher kein Grund vorhanden, weshalb es nicht auch noch für höhere Töne sollte gelten können. Ich construirte also im Jahre 1876 für die Ausstellung in Philadelphia nach diesem Gesetze und unter der Annahme einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von 340 m, eine Reihe von 19 offenen Orgelpfeifen für die Töne der diatonischen Tonleiter von c^5 bis g^7, deren tiefste eine Länge von 33,5 bei 4 mm Tiefe hatte, deren höchste g^7, aber 5 mm lang und 0,9 mm tief war. Diese Pfeifen, welche ich noch besitze, tönen am besten, wenn sie von c^5 bis e^6 unter einem Wasserdrucke von 80 mm angeblasen werden, von e^6 bis a^6 unter einem von 100 mm und

1) Cat. Nr. 97. 1889.

von a^6 bis g^7 unter einem von 120 mm. Ihre Töne sind in sehr hohem Grade von der Stärke des Anblasens abhängig, sodass z. B. der Ton der Pfeife c^5 beim Anblasen unter fortschreitendem Wasserdrucke von 35 bis zu 120 mm um ungefähr 150 Schwingungen, also etwa um einen halben Ton stieg. Infolge dessen reichen schon sehr geringe Druckveränderungen während des Anblasens hin, die Töne dieser Pfeifen beständig höher und tiefer werden zu lassen, wie das in auffälliger Weise sich durch die grossen Schwankungen der Tonhöhe der Stosstöne zu erkennen giebt, welche sich bei den Intervallen der Pfeifen von c^5 bis a^5 gut beobachten lassen.

Wollte man nun die Richtigkeit des betreffenden Gesetzes auch noch für die höchsten Töne prüfen, so könnte man dieses natürlich thun, indem man die Tonhöhe aller dieser Pfeifen vermittelst der schon einmal erwähnten Methode von Lord Rayleigh mit der sensitiven Flamme oder vermittelst der Staubfiguren bestimmte, eine solche specielle Untersuchung lag jedoch nicht im Plane dieser Arbeit, und so begnügte ich mich damit, nur die Töne der Pfeifen von c^5 bis a^5 noch vermittelst der Stosstöne zu bestimmen, welche jede dieser Pfeifen, unter möglichst gut regulirtem constanten Drucke angeblasen, mit Stimmgabeln von genau bekannter Tonhöhe hören liess, und ich fand dabei, dass nach den erhaltenen Mittelwerthen sämmtliche Pfeifen von c^5 bis a^5 etwas zu hoch waren, ungefähr im Verhältniss von 25:26, und dass diese Erhöhung constant zu sein schien und kein regelmässiges Steigen oder Abnehmen nach der Höhe zu erkennen liess.

Man kann, denke ich, hiernach wohl annehmen, dass in keinem Falle die noch höheren Pfeifen plötzlich eine grosse Vertiefung erfahren sollten, besonders da ihre Dimensionen noch alle für Orgelpfeifen gut passende Verhältnisse haben, indem selbst bei g^7 sich die Tiefe zur Länge noch wie 1:5.5 verhält, und dass folglich auch noch die für c^7 bis g^7 construirten Pfeifen wirklich noch ziemlich genau diese Töne geben dürften, dann aber würden sie die wichtige Thatsache sehr klar beweisen, dass die Hörbarkeit der höchsten Töne nicht allein von ihrer Schwingungszahl und Intensität, sondern auch noch beträchtlich von ihrer Dauer abhängt, denn Personen, die sonst nur c^7 und d^7 noch gut hören, vernehmen

die Pfeifentöne noch bis g^7, wenn auch nicht immer gleich im Augenblicke, in welchem die Pfeife anspricht, aber nachdem ihr Ton schon einige Zeit auf das Ohr gewirkt hat.

5. Saiten und Membranen.

Die durch Spannung elastischen Körper, die Saiten und Membranen, sind für die Erzeugung der höchsten Töne durchaus unbrauchbar. Eine Claviersaite, welche auf einem Monocord bei einer Länge von 1 m c (ut_2) giebt, müsste für die Töne c^5, c^6, c^7 entsprechend schon bis zu 31,2, 15,6 und 7,8 mm verkürzt werden, also bis zu Längen, bei denen die Stahlsaite schon durchaus nicht mehr die nöthige Geschmeidigkeit besitzt, um auf sie noch die allgemeinen Schwingungsgesetze der Saiten anwenden zu können, da selbst ein 200 bis 250 mm langes Stück derselben, an einem seiner Enden in horizontaler Lage befestigt, in dieser noch durch eigene Steifheit bis zu seinem anderen Ende verbleiben kann. Die Membranen sind aber ganz unfähig, sehr hohe Töne hervorzubringen, wenn sie auch durch solche noch in Mitschwingungen versetzt werden können, wie der auf runde Membranen von Goldschlägerhaut aufgestreute Sand zeigt, indem er in Bewegung geräth und sich in Linien zu lagern sucht, wenn die Membranen in einiger Entfernung über hohen Pfeifen gehalten werden. Eine Membrane von 20 mm Durchmesser zeigte in dieser Weise ihr Mitschwingen bis e^7 (mi_9) an, und eine von 15 mm bis g^7 (sol_9). Dass es in diesem Falle aber wirklich die Töne waren, welche die Bewegung des Sandes verursachten, und nicht etwa der aus dem offenen Ende der Pfeife austretende Luftstrom, davon konnte man sich dadurch zweifellos überzeugen, dass beim directen Anblasen mit continuirlichem Luftstrome die Membranen in vollständiger Ruhe blieben.

6. Mechanisch erzeugte Impulse.

Um Töne vermittelst mechanisch erzeugter Impulse hervorzubringen, hat man Zahnräder und Sirenen angewendet, von welchen letztere mir durchaus den Vorzug zu verdienen scheinen. Die Sirenenscheibe, welche ich für die höchsten Töne construire[1]) hat einen Durchmesser von 1 m bei einer

1) Cat. Nr. 52. 1889.

Dicke von 1,5 mm und trägt zehn Kreise von 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 640, 768 und 1024 Löchern, sodass die Töne, welche sich mit ihr bei gleicher Rotationsgeschwindigkeit erzeugen lassen, einen Umfang von sieben Octaven haben, wodurch es leicht wird, selbst bei Anwendung eines Rotationsapparates ohne directes Zählerwerk, in allen Fällen die Schwingungszahlen ihrer höchsten Töne durch die immer leicht zu schätzende Tonhöhe ihrer tieferen zu bestimmen. Die absolute Höhe der Töne dieser Scheibe kann natürlich soweit getrieben werden, als die Leistungen des Rotationsapparates, über den man verfügen kann, gestatten, die Intensität und Hörbarkeit derselben hängt aber in hohem Grade von der Stärke des anblasenden Windes ab, und ich glaube, dass man dieses oft beim Experimentiren ausser Acht gelassen hat, indem man annahm, dass beim Anblasen mit jeder Windstärke immer nothwendig ein der angeblasenen Löcherzahl entsprechender Ton entstehen müsse. Die Tonbildung beruht aber bei der Sirene darauf, dass der anblasende Wind durch die an der Windröhre vorbeigehenden Löcher durchfahren und somit auf der freien Seite der Scheibe Explosionen bewirken könne. Wenn man nun aber z. B., um c^8 zu erhalten, eine Reihe von 32768 Löchern mit Zwischenräumen, welche ihrem Diameter gleich sind, in einer Secunde anblasen will, so würde der Wind an der Stelle, wo er in die Oeffnungen eindringt, schon die Schnelligkeit von 32768 . 1,5 mm = 49 m, 1520 in der Secunde, haben müssen, um nur überhaupt in sie bis zur anderen freien Seite der Sirenenscheibe einzudringen, und folglich eine noch viel grössere, um auf dieser Seite noch heraustreten zu können, um Tonimpulse zu erzeugen.

Es ist sehr schwer, Scheiben von dem angegebenen grossen Durchmesser und verhältnissmässig geringer Dicke so eben herzustellen, dass ihre Ränder bei der Drehung ohne jede oscillirende Bewegung bleiben sollten, doch verschwindet diese bei einer grossen Rotationsgeschwindigkeit fast ganz, indem bei ihr die Scheibe durch die Centrifugalkraft zu einer wirklich ganz ebenen Fläche gemacht wird. Wenn der Rotationsapparat es gestattet, kann man die Sirenenscheibe auch auf demselben zwischen zwei starken, ganz ebenen Holzscheiben von 0,50 m Durchmesser einspannen, über die dann

nur der 250 mm breite Rand mit den zehn Löcherreihen hervorragt, wodurch dann auch schon bei langsamer Rotationsbewegung die Oscillationen der Ränder fast ganz beseitigt werden.

Die Resultate der im Vorhergehenden mitgetheilten Untersuchungen sind also der Hauptsache nach die folgenden:

I.

1. Man kann vermittelst der Stosstöne Stimmgabeln mit grosser Genauigkeit für Töne von c^5 bis fis^7 stimmen, wenn diese Stimmgabeln stark genug sind und eine gute Schwingungsfähigkeit haben.

Die Stosstöne kann man mit Stimmgabeln von c^5 bis a^5 noch gut durch Anschlagen erzeugen, über a^5 hinaus muss man aber die beiden Gabeln immer zugleich mit demselben Bogenstriche zum Vibriren bringen.

2. Die Intervallweite, in deren Grenzen Stosstöne für einen gegebenen Grundton möglich sind, nimmt mit der Höhe desselben immer mehr ab und beträgt schliesslich für den Grundton f^7 nur noch einen halben Ton.

Die Intervallweiten der Grundtöne vom gr. C bis f^7 lassen sich in einer ununterbrochenen Curve darstellen (Fig. 1).

Stosstöne können auch noch gehört werden, wenn die sie erzeugenden primären Töne schon über der Grenze der Hörbarkeit liegen.

Die Hörbarkeit der oberen Stosstöne der ersten Periode, wie die der unteren Stosstöne der zweiten hängt wie bei den anderen von dem absoluten Abstande des primären höheren Tones vom Grundtone ab, während seine Stellung zur Octave dieses Grundtones gleichgültig ist.

Bei den Sechstenintervallen 3 : 5, mit den hohen Grundtönen c^6 und d^6 gebildet, wird der obere Stosston nur noch allein, und zwar sehr stark, gehört.

Als Hülfsmittel beim praktischen Stimmen hat man nur die unteren Stosstöne der ersten Periode, deren Schwingungszahl gleich der Differenz der Schwingungszahlen ihrer primären Töne ist, anzuwenden, und welche am deutlichsten bei

denjenigen Intervallen entstehen, deren oberer primärer Ton etwa in die Mitte der ganzen Intervallweite für Stosstöne des Grundtones fällt.

Die Tonhöhe der Stosstöne kann man in diesen hohen Lagen wegen ihrer kurzen Dauer nur durch ihre Vergleichung mit Hülfsstimmgabeln vermittelst des musikalischen Gehörs bestimmen, ein hierbei begangener Irrthum entspricht aber immer nur einem sehr viel kleineren Fehler in der Stimmung der primären Töne.

3. Vermittelst der Kundt'schen Staubfiguren lassen sich auch die Tonhöhen von Stimmgabeln bestimmen, welche viel zu schwach sind, um Stosstöne erzeugen zu können.

Man kann mit Hülfe der Staubfiguren Stimmgabeln für alle Töne von c^5 bis über f^9 hinaus zu 90000 Schwingungen (180000 *v s*) mit grosser Genauigkeit stimmen (Fig. 2, 3, 4, 5).

4. Die angewendeten Röhren können für die Töne von c^6 bis c^7 noch eine Länge von 100 Halbwellen haben, müssen aber über c^7 hinaus einer immer kleineren Anzahl von Halbwellen entsprechen, welche schon in der Mitte der Octave von c^8 bis c^9 nicht mehr 40 überschreiten darf.

Der Durchmesser der Röhren kann für den Ton c^5 gleich der Länge seiner Viertelwelle sein, muss dann aber von c^5 bis zu c^6 bis zur Länge einer Halbwelle heranwachsen und über diesen Ton hinaus bis zu den höchsten Tönen hinauf, dann aber nur noch bis zu ungefähr zwei Drittel der ganzen Wellenlänge zunehmen.

In einer zu weiten Röhre bilden sich die Rippen der Staubwellen nicht mehr senkrecht zu ihrer Axe, sondern neigen sich periodisch den beiden entgegengesetzten Richtungen zu.

Bei einem zu kleinen Durchmesser der Röhre bilden sich die Staubwellen nur noch gut in dem ihrem geschlossenen Ende zunächst liegenden Theile derselben, sind unregelmässiger und haben eine durchschnittlich geringere Länge, welche auch noch von der Intensität des Tones sehr abhängig ist (Fig. 6).

5. Die Prüfung einer vermittelst der Stosstöne gestimmten Stimmgabelreihe von c^6 bis f^7 mit der Methode der Staubfiguren zeigt, dass beide Methoden für diese Töne fast gleiche Resultate geben.

II.

1. Transversal schwingende Stäbe werden weniger als alle anderen Körper durch die Art ihrer Befestigung in der Freiheit ihrer Schwingungen beeinträchtigt.

Die Stösse, welche sie immer beim Anschlagen hören lassen, kann man bei der Bestimmung ihrer Tonhöhe ausser Acht lassen.

Die nach den berechneten Längen hergestellten Stäbe lassen nach der Höhe zu eine Vertiefung erkennen, welche für ein Sechstenintervall etwa einen Viertelton zu betragen scheint.

Die Hörbarkeit der Töne dieser Cylinder ist fast ebenso gut, wie die der Stimmgabeln und auch die höchsten, unhörbaren der Reihe, welche bis c^8 reicht, schwingen noch wirklich beim Anschlagen.

2. Longitudinal schwingende Stäbe können schon von etwa g^5 oder a^5 ab nur noch durch Anschlagen erregt werden, wobei immer starke Transversaltöne störend mit auftreten.

Schon zwischen c^6 und c^7 hört die Möglichkeit auf, die Longitudinaltöne noch mit Sicherheit beobachten zu können, so weit sie aber erkennbar sind, haben sie eine grössere Stärke und eine längere Dauer als die Töne gleicher Höhe aller anderen festen Körper.

Die nach dem Längengesetze zugeschnittenen Stäbe lassen nach der Höhe zu nur eine ganz geringe Erhöhung wahrnehmen und die longitudinalen Theiltöne einer langen Stahlstange scheinen sogar in den absolut rein harmonischen Verhältnissen zu ihrem Grundtone zu stehen.

3. Die Töne der Platten hängen sehr von der Amplitude ihrer Schwingungen ab und sind in sehr hohem Grade durch die Befestigungsart in der Freiheit ihrer Schwingungen beeinträchtigt, auch sind ihre Töne zu schwach, um zur Bestimmung der Hörgrenze dienen zu können.

An kleinen Platten lässt sich die Existenz unhörbarer Töne hübsch demonstriren, auch kann man an ihnen eine besondere Schwingungsart beobachten, welche grössere Platten nicht zeigen (Fig. 9).

4. Die Töne der hohen Orgelpfeifen von c^5 bis g^6 sind sehr von der Windstärke beim Anblasen abhängig, doch scheint

sich auch bei ihnen das empirische Gesetz von Cavaillé Coll gut zu bewähren.

Man kann an ihnen wahrnehmen, wie sehr die Hörbarkeit eines Tones auch von seiner Dauer abhängt.

5. Saiten und Membranen sind für die Erzeugung höchster Töne unbrauchbar.

6. Bei grossen Sirenenscheiben wird die Grenze ihrer höchsten Töne nicht nur durch den Rotationsapparat bedingt, sondern auch noch durch die Stärke und somit auch Geschwindigkeit des Windes, welche immer gross genug sein muss, dass derselbe auch wirklich durch die Löcher der Scheibe hindurchdringen kann.

Paris, Juni 1899.

(Eingegangen 7. Juli 1899.)

---

2. *Experimentelle Untersuchungen über die Geschwindigkeit und die magnetische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen;*
von E. Wiechert.

(Aus den Nachrichten der Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, Heft 3. p. 260. 1898, in etwas veränderter Form mitgetheilt vom Verfasser.)

---

§ 1. Vorwort.

Den Anlass für die weiterhin beschriebenen Versuche gab Röntgen's Entdeckung der nach ihm benannten Strahlen. Aus der Art ihrer Entstehung und aus ihrem Verhalten glaubte ich schliessen zu dürfen, dass sie elektromagnetische Wellen von sehr kurzer Schwingungsdauer oder — noch wahrscheinlicher — von stossartigem Charakter sind, die durch Zusammenprallen der von der Kathode fortgeschleuderten Theilchen der Kathodenstrahlen mit entgegenstehenden materiellen Theilchen verursacht werden. Diese Ansicht, die ich in einer im Frühjahr 1896 veröffentlichten Abhandlung[1]) näher ausführte, verlangt die Richtigkeit der Emissionshypothese der Kathodenstrahlen und setzt in diesen weit grössere Geschwindigkeiten voraus, als in den Wärmebewegungen selbst bei den höchsten unseren Beobachtungen zugänglichen Temperaturen im Mittel vorkommen. Ich musste daher versuchen, die damals noch vielfach und von hervorragenden Physikern angegriffene Emissionshypothese zu stützen und ein Urtheil über die Geschwindigkeit der Strahlen zu gewinnen. Indem ich für diesen Zweck Beobachtungen über das Potentialgefälle im Entladungsrohr und über die magnetische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen combinirte[2]), ergaben sich ausserordentlich hohe Werthe für die Geschwindigkeit, Werthe, die hinter der Lichtgeschwindigkeit nicht gar weit zurückblieben. Dies ist freilich in vortrefflicher Uebereinstimmung mit der Ausgangs-

---

1) E. Wiechert, Abh. d. Physikal.-ökonom. Gesellsch. in Königsberg i. Pr. 37. p. 1. 1896.

2) Vgl. den weiter unten citirten Vortrag vom 7. Januar 1897.

hypothese über die Röntgenstrahlen; es ergab sich nun aber weiter, dass die Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen weit grösser ist, als möglich wäre, wenn sie aus Strömen der gewöhnlichen chemischen Atomen oder Atomgruppen beständen. Sollte die Emissionshypothese überhaupt beibehalten werden, so blieb nur übrig, zu schliessen, dass die von der Kathode fortgeschleuderten Theilchen vielmals geringere Masse als die Wasserstoffatome besitzen. Hierdurch gewann die Frage nach der Natur der Kathodenstrahlen für die von mir in naher Uebereinstimmung mit H. A. Lorentz vertretene Theorie der Elektrodynamik eine fundamentale Bedeutung, denn es drängte sich die Vermuthung auf, dass in den Strahlen eben jene elektrischen speciellen materiellen Atome sich frei bewegen, deren die Theorie bedarf, um die metallische Leitung und die Aenderung der molecularen Ladung in ihr System befriedigend einzureihen.

Unter solchen Umständen stellte ich mir die Aufgabe, die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen direct, ohne Benutzung der Emissionshypothese, zu messen, um so die neu gewonnene Anschauung einer entscheidenden Prüfung zu unterziehen.

Meine Arbeiten im mathematisch-physikalischen Institut der Königsberger Universität, die Anfang 1897 abgebrochen werden mussten, führten zunächst noch nicht zum Ziel. Es gelang nur sicherzustellen, dass die Geschwindigkeit jedenfalls so gross ist, dass die Annahme gewöhnlicher chemischer Ionen völlig ausgeschlossen wird. Ueber die vorläufigen Resultate und die sich anschliessenden Folgerungen berichtete der Vortrag[1]): I. *Ueber das Wesen der Elektricität*, II. *Experimentelles über die Kathodenstrahlen*, am 7. Januar 1897. Hier folgerte ich, dass die Masse der Theilchen in den Kathodenstrahlen 2000—4000 mal kleiner sei, als die der Wasserstoffatome. —

Dank dem Entgegenkommen von Hrn. Geheimrath Prof. Dr. Voigt und der Unterstützung der Königl. Gesellschaft der

1) Vollständig abgedruckt in den Sitzungsber. d. Physikal.-ökonom. Gesellsch. zu Königsberg i. Pr. **38.** p. 1—16. 1897; im ersten Theile abgedruckt in der Naturwissenschaftl. Rundschau, Mai 1897. — Ein Referat geben die Beibl. **21.** p. 443. 1897. (Am Schlusse steht hier zweimal irrthümlich 200 an Stelle von 2000.)

Wissenschaften in Göttingen konnte ich die Experimente im Sommer 1897 wieder aufnehmen und hatte dieses Mal den gewünschten Erfolg: *Es wurde möglich, die Geschwindigkeit zu messen, und die erhaltenen Werthe lagen wirklich in dem von den theoretischen Erwägungen vorgesehenen Intervalle.*

Auf der *Naturforscherversammlung in Braunschweig*, September 1897, gab ich einen vorläufigen Bericht[1]); eine ausführlichere Mittheilung, die auch spätere Beobachtungen berücksichtigt, folgt weiterhin. Insbesondere wurden genauere Messungen über die magnetische Ablenkbarkeit hinzugefügt, um ein schärferes Urtheil über die Masse der bewegten Theilchen zu gewinnen als in der ersten Veröffentlichung vom 7. Januar 1897.

Durch das positive Resultat der Untersuchung (in Verbindung mit den neueren hierher gehörigen Entdeckungen und Messungen von anderer Seite) wird eine sichere experimentelle Stütze für die folgenden Ansichten gewonnen, welche ich in früheren Arbeiten[2]) nur mit grösster Zurückhaltung aussprechen durfte:

Die „elektrische Ladung" eines jeden materiellen Theilchens bedeutet eine elektrodynamische Verkettung mit dem Aether, welche in der Eigenart des Theilchens fest begründet ist und sich niemals ändert. Jede Aenderung der Ladung eines materiellen Körpers ist zugleich eine Aenderung seines materiellen Bestandes und jeder elektrische Strom eine Convection der Elektricität durch materielle Theile. Bei der metallischen Leitung bewegen sich gewisse elektrische Atome, welche neben den Atomen der Chemie vorhanden sind, und diese besonderen Atome werden ausgetauscht, wenn bei elektrolytischen Vorgängen die molecularen Ladungen sich ändern. — *Die „Elek-*

---

1) E. Wiechert, Verhandl. d. Gesellsch. Deutscher Naturforscher u. Aerzte, Vers. zu Braunschweig, 2. Theil, I. Hälfte p. 50—52. 1897.

2) E. Wiechert, Sitzungsber. d. Physikal.-ökonom. Gesellsch. zu Königsberg i. Pr. **35.** p. [4]. 1894; Abh. ders. Gesellsch. **37.** p. 1. 1896; Naturwissenschaftl. Rundschau **11.** Nr. 47. 1896. — Vgl. auch die neueren Arbeiten: Nachrichten d. Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, p. 1. 1898, und Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmales in Göttingen. II. Theil. Leipzig bei Teubner. 1899.

tricität" wird so gewissermaassen zur Materie selbst, bez. zu einer Erscheinungsform der Materie. —

Durch die Kathodenstrahlen wird nur die Existenz besonderer *negativer* Atome angezeigt. Wir besitzen, so weit ich sehe, kein bestimmtes Anzeichen dafür, dass es auch eine entsprechende Art positiver Atome giebt. Selbst das Hallphänomen in Metallen verlangt diese Annahme nicht, denn zu seiner Erklärung ist es nicht nothwendig, eine fortschreitende, sondern es genügt eine hin- und hergehende Bewegung von positiven Theilchen anzunehmen. — Natürlich ist trotzdem selbst die weitest gehende Hypothese denkbar, dass die Materie sich ganz in zwei Arten von elektrischen Atomen, eine negative und eine positive, auflösen lässt. —

Es gereicht mir zu hoher Freude, den Directoren der physikalischen Institute in Königsberg und Göttingen, den Herren Professoren Volkmann, Voigt und Riecke, sowie der *Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* für die gütige Unterstützung meiner Arbeit an dieser Stelle meinen tiefgefühlten Dank aussprechen zu können.

§ 2. Methode der Geschwindigkeitsmessung.

Frühere Schätzungen und Messungen der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen ohne Benutzung der Emissionshypothese liegen vor von Goldstein[1]), Spottiswoode und Fletcher Moulton[2]), J. J. Thomson[3]) und Th. Des Coudres.[4]) Die Methoden von Goldstein und von Spottiswoode und Fletcher Moulton, welche die Deflexion der Kathodenstrahlen an einer zweiten Kathode benutzen, können nach unseren heutigen Kenntnissen nicht als einwandfrei anerkannt

---

1) E. Goldstein, Monatsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin Jahrg. 1880. p. 122; Wied. Ann. **12**. p. 101. 1880.

2) W. Spottiswoode u. Fletcher Moulton, Phil. Trans. Roy. Soc. **171**. p. 627. 1880.

3) J. J. Thomson, Phil. Mag. **38**. p. 358. 1894.

4) Th. Des Coudres, Verhandl. d. physikal. Gesellsch. zu Berlin **14**. p. 86. 1895; **16**. p. 157. 1897; Verhandl. d. Gesellsch. Deutscher Naturforscher u. Aerzte, Vers. zu Frankfurt a. M., 2. Theil, I. Hälfte p. 69. 1896.

werden[1]), so gilt denn das Gleiche auch von ihren Resultaten. Nach Goldstein wäre die Geschwindigkeit grösser als 800000 m/sec, nach Spottiswoode und Fletcher Moulton erheblich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. — J. J. Thomson benutzte den rotirenden Spiegel, um die Zeitdifferenz des Aufleuchtens zweier in verschiedener Entfernung von der Kathode befindlichen phosphorescirender Flächen zu beobachten. Er fand eine Geschwindigkeit von 200000 m/sec, hat dieses Resultat aber neuerdings selbst als viel zu klein aufgegeben. Th. Des Coudres wendete zur Zeitmessung elektrische Schwingungen an und stellte fest, dass die Geschwindigkeit jedenfalls grösser als 2000000 m/sec ist; über die Methode werden weiterhin noch nähere Angaben gemacht werden.

Für meine eigenen Messungen schien mir der rotirende Spiegel im Hinblick auf die zu erwartenden ausserordentlich hohen Geschwindigkeiten zu wenig Aussicht auf Erfolg zu bieten, und ich entschloss mich daher, nach dem Vorgang von Des Coudres, die elektrischen Schwingungen zu verwerthen.

Die Geschwindigkeitsmessung verlangt, das Zeitintervall festzustellen, in dem eine gewisse Strecke von den Strahlen durchlaufen wird. In unserem Falle muss hierzu Beginn und Ende des Laufes auf die Schwingungsphasen des messenden elektrischen Systemes bezogen werden. In Bezug auf den Beginn ist das Nächstliegende jedenfalls, ebenso wie Des Coudres bei seinen wirklichen Messungen, die Beobachtungsmethode dadurch zu vereinfachen, dass man die Aussendung der Kathodenstrahlen dem messenden System selbst überträgt. Dann kann der Anfang der Messstrecke an die Elektrode selbst gelegt werden, und der Beginn des Laufes der Strahlen ist dadurch bestimmt, dass er vor sich geht, während das System negative Elektricität zur Elektrode schickt. Zur zeitlichen Festlegung der Ankunft der Strahlen kann man entweder, wie Des Coudres, das Verhalten der Strahlen gegen die magnetische Einwirkung eines stromführenden Theiles des messenden Systemes, oder das Verhalten gegen die elektrische Einwirkung einer zweiten Elektrode benutzen.

---

1) Vgl. die eingehendere Besprechung in der Originalabhandlung, Gött. Nachrichten, Math.-phys. Klasse, Heft 1. 1898.

Experimente dieser Art im Herbst 1896 zeigten mir, dass wenig Aussicht vorhanden ist, so zum Ziele zu kommen, denn es war nicht möglich, auch nur annähernd genügend lange Kathodenstrahlen zu erhalten. Im Interesse des Folgenden ist nöthig, dieses etwas näher auseinanderzusetzen.

T sei die Dauer einer vollständigen Schwingung des messenden Systemes, L die Wellenlänge der zugehörigen elektrodynamischen Wellen, sodass

$$L = TV$$

ist, wenn V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Es sei ferner l die Länge der von den Kathodenstrahlen durchlaufenen und zur Messung der Geschwindigkeit verwertheten Bahnstrecke, t das zugehörige Zeitintervall, dann ist

$$l = tv,$$

wenn v die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen bedeutet, und wir erhalten:

$$\frac{v}{V} = \frac{l}{L} \cdot \frac{T}{t}.$$

l und L sind leicht festzustellen, um also den gesuchten Quotienten v/V zu bestimmen, ist erforderlich t/T zu messen, d. h. den Werth der Wegzeit t in Einheiten der Periode T aufzusuchen.

t darf gegenüber T nicht zu klein sein, denn die Beobachtung kann nur dann zu einem positiven Resultat führen, wenn die Einwirkung des messenden System am Ende der Bahn merklich anders ist als am Anfang, wenn also nach Verlauf der Zeit t die Phase der Schwingungen sich merklich geändert hat. Man kann hoffen, mit einer Viertelperiode auszukommen; verlangen wir demgemäss $t \gtreqless \frac{1}{4} T$, so ergiebt sich als Bedingung für die Brauchbarkeit der experimentellen Anordnung:

$$l \geqq \frac{L}{4} \cdot \frac{v}{V}.$$

Erzeugt man die Kathodenstrahlen mittels der Entladungen von Leydener Flaschen unter Benutzung des Teslatransformators, so kann mit der Wellenlänge L des elektrischen Systemes auf 60 m bequem herabgegangen werden. Setzen wir ferner, entsprechend meinen Vorversuchen, $v \geqq \frac{1}{10} V$, so müsste für die

Bahn der Kathodenstrahlen mindestens die Länge $l = 1{,}5$ m verlangt werden. Für $v = \frac{1}{6} V$ wäre schon $l = 3$ m nothwendig.

Bei der gewöhnlichen Erzeugungsweise der Kathodenstrahlen mittels eines Funkeninductors ist es nun freilich nicht schwierig, die Kathodenstrahlen meterweit zu verfolgen, wenn man nur die Vorsicht gebraucht, durch passend aufgestellte Magnete die ablenkende Wirkung des Erdmagnetismus aufzuheben; ganz anders aber gestaltet sich die Sache bei den schnellen Schwingungen des Teslatransformators. Einmal werden weit grössere Gasdichten im Entladungsrohr nothwendig, was stärkere Absorption zur Folge hat, dann aber, und das ist die Hauptsache, wird bei schnellen Schwingungen der Gang der Kathodenstrahlen schon in verhältnissmässig geringen Entfernungen von der Kathode unregelmässig, sodass sie für die Beobachtung verloren gehen. Wie es scheint, stellt sich die regelmässige Vertheilung der elektrischen Kräfte, welche für einen geradlinigen oder nur schwach gekrümmten Verlauf der Kathodenstrahlen nöthig ist, im Innern der Entladungsröhre von den Elektroden aus erst allmählich her, sodass mit schneller werdenden Schwingungen der Bereich der regelmässigen Fortpflanzung sich nach der Kathode hin mehr und mehr verkleinert.

Bei meinen Versuchen im Herbst 1896 gelang es mir nicht, die Kathodenstrahlen mittlerer Steifigkeit[1]) ($Hr = 200$—400) weiter als 30 oder 40 cm mit hinreichender Intensität zu erhalten, sodass die nothwendige Bahnlänge nicht entfernt erreicht wurde.

Unter solchen Umständen schien es erforderlich, zur allgemeineren Methode zurückzukehren und darauf zu verzichten, dem messenden System auch die Aussendung der Kathodenstrahlen zu übertragen. Es entsteht dann eine Complication insofern, als noch besonders dafür gesorgt werden muss, den Eintritt der Kathodenstrahlen in die Messstrecke auf die

---

1) Unter „*Steifigkeit*“ ist das bekanntlich für eine jede Art von Kathodenstrahlen charakteristische Product Hr zu verstehen, wobei r den Krümmungsradius der Bahn, H die ablenkende magnetische Kraft bedeutet; $1/Hr$ ist entsprechend als „*Ablenkbarkeit*“ zu bezeichnen.

Schwingungen des messenden Systemes zu beziehen. Für diesen Zweck ist es nöthig, die Anfangsstelle mittels des messenden Systemes durch eine Hülfselektrode oder einen stromführenden Draht elektrischen oder magnetischen Kräften auszusetzen, um so künstlich die zur Geschwindigkeitsmessung nothwendige Periodicität des weiteren Verlaufes der Strahlen herzustellen, die sich von selbst einstellt, wenn im vorhin betrachteten einfacheren Falle das messende System selbst die Strahlen erregt.

Die eigentliche Schwierigkeit der Anordnung liegt in dem schnellen Abklingen der Schwingungen von so kurzwelligen elektrischen Systemen, wie sie zur Geschwindigkeitsmessung gebraucht werden. Es hat dieses zur Folge, dass nur Kathodenstrahlen für die Messung in Betracht kommen, die während eines ausserordentlich kleinen Zeitintervalles ausgeschickt werden. Bei einer Wellenlänge von 10 m z. B., der eine Periode von $^1/_{30}$ Mikrosecunde entspricht, bieten die ersten zehn vollständigen Schwingungen, die bei guter Anordnung wohl noch verwendet werden können, für die Messung nur ein Intervall von $^1/_3$ Mikrosecunde. — Um trotzdem an das Ziel zu gelangen, kann man entweder daran denken, das messende System ausserordentlich oft in der Secunde auszulösen, oder man muss versuchen, die Hauptmenge der Kathodenstrahlen in das kleine Intervall hineinzudrängen, in dem die Schwingungen des messenden Systemes stark genug sind. Da der erste Weg zu grosse experimentelle Schwierigkeiten zu bieten schien, habe ich nur den zweiten verfolgt. Als brauchbar fand ich dabei die directen Entladungen einer Leydener Batterie bei kurzem Schliessungskreis und die durch Batterieentladungen bewirkten Teslaströme. Die zunächst vielleicht gefährlich scheinende Bedingung, dass die zur Messung der Geschwindigkeit und zur Aussendung der Kathodenstrahlen dienenden beiden Systeme genau zusammenstimmend ausgelöst werden müssen, liess sich erfüllen, *indem ich den Kunstgriff anwandte, beiden Systemen die gleiche auslösende Funkenstrecke zu geben;* im übrigen müssen und können sie dabei völlig unabhängig voneinander sein.

Man wird bemerken, dass es wiederum, gerade ebenso wie bei der zuerst besprochenen vereinfachten Methode, darauf ankommt, für die Erzeugung der Kathodenstrahlen schnell

arbeitende Systeme zu benutzen. So findet man sich denn auch jetzt bei gegebenem messenden System in der erreichbaren Länge der Kathodenstrahlen beschränkt, und wiederum wird die Länge um so kleiner, je schneller das messende System schwingt. Immerhin aber ist man gegen früher weit im Vortheil, weil das aussendende System langsamer sein darf als das messende, — und in der That wird es bei sorgfältiger Anordnung des Versuches ohne grosse Schwierigkeiten möglich, die Geschwindigkeitsmessung auszuführen.

§ 3. Versuchsanordnung für die Geschwindigkeitsmessung.

Dem messenden System gab ich Wellenlängen zwischen ca. 6 und 20 m. Bei der Construction musste zunächst darauf Bedacht genommen werden, die Schwingungen einheitlich zu machen, also Oberschwingungen zu vermeiden. — Ich wählte darum die Lecher'sche Anordnung, bei der zwei Condensatoren *C*, *C*, Fig. 1, einerseits durch die auslösende Funkenstrecke *F*, andererseits metallisch miteinander verbunden werden.

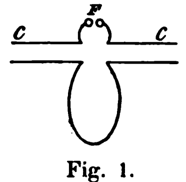


Fig. 1.

Ferner mussten recht grosse Stromstärken erstrebt werden, um die Wirkung auf die Kathodenstrahlen gross zu machen. — Zu diesem Zweck wurde den Condensatoren möglichst grosse Capacität und dafür den Verbindungen zwischen ihnen möglichst kleine Selbstinduction gegeben.

Endlich war es nöthig, die Dämpfung der Schwingungen möglichst herabzusetzen, um so den zeitlichen Messbereich möglichst gross zu machen. — Dieses Gesichtspunktes wegen benutzte ich für die Messung nicht die elektrische Einwirkung auf die Kathodenstrahlen, wodurch stark dämpfende, zum messendem System gehörige Elektroden im Entladungsrohr nothwendig geworden wären, sondern die magnetische Einwirkung, für welche es genügt, stromführende Drähte des messenden Systemes an das Entladungsrohr heranzubringen.

Das Entladungsrohr erhielt eine Hohlspiegelkathode (*K*, Fig. 2); die Entladungen wurden so regulirt, dass die Kathodenstrahlen einen schlanken Kegel mit ziemlich feiner Spitze bildeten, wie dies in der schematischen Fig. 2 angedeutet ist. Da der Weg der Strahlen sich im Innern des Rohres durch

Aufleuchten des Gasinhaltes kennzeichnete, war er wenigstens bis zur Spitze und eine Strecke darüber direct sichtbar.

Bei der Spitze des Strahlenkegels erhielt die Röhre eine Metallblende B_1 mit einer kleinen, der Spitze entsprechenden Oeffnung. In einer wechselnden Entfernung hinter B_1 wurde eine zweite Blende B_2 mit einem Schlitz und ein paar Centimeter hinter dieser ein Glasstreifen G quer zum Schlitz aufgestellt. Die durch B_1 und B_2 hindurchtretenden Kathodenstrahlen erzeugten auf G einen grünen Fluorescenzfleck.

Um mit Hülfe des messenden Systemes magnetisch auf die Kathodenstrahlen einzuwirken und so zunächst den Anfang der Messstrecke festzulegen, wurde ein Verbindungsdraht der Condensatoren C (Fig. 1) an das Rohr so herangebracht, wie es Fig. 3 in *a b c d e* des näheren zeigt. Der Theil *a b c d* ist

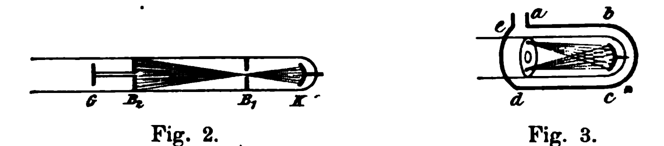


Fig. 2. Fig. 3.

eben und liegt in einem Schnitt durch die Axe des Rohres. Um die Darstellung bequemer zu machen, wollen wir annehmen, dass dieser Schnitt horizontal verläuft. Die Wechselströme, welche das messende System durch *a b c d* hindurchschickt, bewirken dann ein wechselndes magnetisches Feld, dessen Kraftlinien die horizontale Mittelebene des Rohres vertical durchsetzen; die Ablenkungen des Strahlenbündels erfolgen daher in der Horizontalebene. Indem man *a b c d* immer näher an das Rohr heranbiegt und so die Wirkung allmählich verstärkt, bemerkt man zunächst, dass die Spitze sich in der horizontalen Ebene verbreitert. Bei stärkerer Wirkung und passender Regulirung der ganzen Einrichtung scheint das Bündel sich in zwei zu zerspalten, wie in Fig 3 angedeutet ist. Die Zertheilung ist eine Täuschung, die sich leicht erklärt, wenn man bedenkt, dass das pendelnde Bündel die Mittellage mit grösster Geschwindigkeit passirt und bei den Endlagen während verhältnissmässig langer Zeiten nur geringe Verschiebungen erleidet. Offenbar zeigt die Theilung an, dass im wesentlichen nur Kathodenstrahlen ausgesandt werden,

während das messende System kräftig schwingt, und dass während dieser Zeit die Amplitude der Schwingungen nicht erheblich abnimmt. Findet die Aussendung der Strahlen während einer längeren Periode statt, so erscheint auch der Raum zwischen den Grenzlagen der Spitze mit kräftigem Licht erfüllt; wird endlich ein grosser Theil der Strahlen noch ausgeschickt, während das messende System schon unwirksam ist, so sieht man in der Mitte ein stark leuchtendes unabgelenktes Strahlenbündel und seitlich schwächer leuchtend die abgelenkten Theile. Die letzteren verschwinden, sobald das messende System ausser Thätigkeit gesetzt wird. Da die nicht abgelenkten Kathodenstrahlen für die Messung unbrauchbar und störend sind, muss man sie durch zweckmässige Anordnung des die Strahlen liefernden Systemes möglichst zu vermeiden suchen.

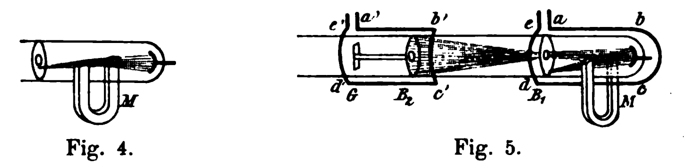


Fig. 4. Fig. 5.

Denken wir uns um das Rohr in Fig. 2 den Draht *a b c d* gelegt. Zum Glasstreifen *G* gelangen dann nur die nicht abgelenkten Strahlen. Wegen der vorhin beschriebenen Eigenart der Bewegung des pendelnden Strahlenbündels sind das nur wenige Strahlen, solange das messende System kräftig einwirkt. In dem besonders günstigen Falle, wenn keine unnöthigen Kathodenstrahlen vorhanden sind und das Bündel getheilt erscheint, zeigt sich dieses augenfällig darin, dass der Glasstreifen *G* dunkel wird. Da die Einwirkung des messenden Systemes nicht nur am Anfang, sondern auch am Ende der Bahn der Kathodenstrahlen beobachtet werden muss, ist unsere Anordnung hiernach unzweckmässig.

Um sie zweckmässiger zu machen, bringen wir an das Rohr zwischen K und B_1 einen kleinen Hufeisenmagneten M, Fig. 4 und 5, heran. Wirkt, wie in Fig. 4 angenommen, das messende System nicht ein, so trifft die Spitze des Strahlenbündels nun nicht mehr die Oeffnung von B, der Luminescenzfleck auf G erlischt. Wird dann das messende System eingeschaltet (Fig. 5), so gehen bei passender Stellung von M

die durch *a b c d* entgegengesetzt wie durch *M* abgelenkten Strahlen durch B_1 und B_2 und erhellen *G*. Damit ist dann eine Anordnung hergestellt, die auf das bequemste für unsere Geschwindigkeitsmessung brauchbar ist.

Um noch die Zeit der Ankunft der Strahlen bei B_2, *G* festzustellen, wird an das Rohr bei B_2 und *G* ein weiterer zum messenden System gehöriger Draht *a' b' c' d' e'* in ähnlicher Weise herangebracht wie *a b c d e*, und seine Einwirkung auf die Lage des Luminescenzfleckes auf *G* beobachtet, — etwa indem man ihn bald an das Rohr heranbiegt, bald abbiegt.

Wir wollen eine solche Anordnung annehmen, dass die Wechselströme in *a' b' c' d'* stets ebenso verlaufen, wie in *a b c d*. Dann müsste, wenn die Geschwindigkeit für unsere Versuchsanordnung unmessbar gross sein sollte, offenbar die Einwirkung von *a' b' c' d'* die gleiche sein, wie die von *a b c d*. In dem in Fig. 5 dargestellten Falle also müsste der Fleck auf *G* unter der Einwirkung von *a' b' c' d'* nach der Seite von *a' b'* hin wandern. *Eine Abweichung hiervon würde anzeigen, dass die Geschwindigkeit im Messbereich der experimentellen Anordnung liegt.*

Bei meinen Beobachtungen, bei denen B_2, *G* und *a' b' c' d'* verschiebbar waren, ergab sich folgendes:

Lagen *a' b' c' d'* und B_2, *G* sehr nahe bei *a b c d*, so verursachte *a' b' c' d'* die gleiche Ablenkung wie *a b c d*. Wurde der Magnet *M* umgekehrt, so kehrte sich dementsprechend auch die Verschiebung des Phosphorescenzfleckes auf *G* um.

In einer gewissen grösseren Entfernung des Systemes (B_2, *G*, *a' b' c' d'*) wurde der Fleck nach beiden Seiten gleichmässig in die Breite gezogen oder in zwei Theile getheilt; dies Phänomen änderte sich nicht, wenn *M* umgekehrt wurde. *Es konnte geschlossen werden, dass die Kathodenstrahlen dann die Strecke von a b c d bis a' b' c' d' in der Zeit durchliefen, in der das messende System ein Viertel der vollständigen Schwingung vollführte*, sodass die Kathodenstrahlen, welche an *a b c d* während der Zeit der grössten Stromstärke vorübergingen, in *a' b' c' d'* die Zeit des Stromumkehres antrafen. Dass eine Verbreiterung des Luminescenzfleckes oder gar eine Zweitheilung eintrat, hängt mit der schon besprochenen Eigenart der Pendelschwingungen des Strahlenbündels zusammen. Ihretwegen gehen ja während einer verhältnissmässig langen Zeit Strahlen

durch B_1 hindurch, — während einer Zeit, die bei meinen Versuchen meist auf etwa $^1/_4$ Periode des messenden Systemes zu schätzen war.

Je nachdem das System von der neutralen Stelle nach der einen oder der anderen Seite verschoben wurde, überwog die Ablenkung nach der einen oder anderen Seite. *Bei Vergrösserung der Entfernung kam es schliesslich dahin, dass die Ablenkung wiederum ganz nach einer Seite erfolgte und zwar im entgegengesetzten Sinne wie bei a b c d.* Dann ergab die Umkehrung des Magneten M wiederum eine Umkehrung der Ablenkung. *Die Kathodenstrahlen fanden nun in a' b' c' d' die entgegengesetzte Phase vor wie bei a b c d.*

Das Experiment bei der beschriebenen einfachsten Anordnung so weit zu verfolgen, verlangte viel Vorsicht und sorgfältigste Abstimmung aller Versuchsbedingungen, weil andernfalls die Intensität der nach G gelangenden für die Beobachtungen tauglichen Kathodenstrahlen zu schwach wurde, um sie bei dem nicht zu vermeidenden Nebenlicht noch deutlich bemerkbar zu machen. Bei weitem intensiver und in der That sehr leicht beobachtbar werden die Erscheinungen, wenn man magnetische Kräfte zur Hülfe nimmt, um die Zerstreuung der Strahlen zwischen B_1 und B_2 möglichst herabzuzetzen. Zu diesem Zwecke umgab ich die Glasröhre zwischen B_1 und B_2 mit einer Drahtspirale, durch die ein kräftiger elektrischer Strom geschickt wurde. Das im Innern des Entladungsrohres entstehende magnetische Feld mit seinen parallel der Axe des Rohres verlaufenden Kraftlinien nöthigt dann die nur wenig gegen die Axe geneigten Strahlen in langgezogenen Spiralen durch das Rohr zu gehen, sodass ein grosser Theil nach B_2 gelangt, der sonst die Glaswand getroffen hätte. Die geringfügige Vergrösserung des Weges kommt wegen der immerhin ziemlich groben Natur der Versuche nicht in Betracht.

Unter Benutzung der magnetischen Spirale und wiederum bei sorgfältigster Abstimmung der Versuchsbedingungen gelang es — in etwa 1 m Entfernung von K — auch den zweiten von der Theorie vorgesehenen neutralen Punkt zu erreichen und deutlich zu überschreiten. —

Ehe im folgenden Paragraphen die detaillirte Beschreibung der verwendeten Apparate begonnen wird, sollen nun noch ein

paar Worte über die allgemeine Anordnung der beiden elektrischen Systeme und ihre Verbindung gesagt werden.

Da eine möglichst geringe Selbstinduction des messenden Systemes erstrebt werden muss, wäre es unpraktisch, die Drähte *a b c d e* und *a' b' c' d' e'* in einer und derselben Leitung zwischen den Condensatoren *C* hintereinander zu schalten. Besser ist es, zwei getrennte, parallel geschaltete Leitungen zu benutzen. In meinem Falle waren diese nahe gleich beschaffen und lagen symmetrisch zur Funkenstrecke.

Für das zweite elektrische System benutzte ich in beiden Fällen — bei Anwendung von Teslaströmen sowie bei der Anwendung directer Batterieentladungen — eine Fig. 1 entsprechende Anordnung.

Für den Fall der Teslaströme wird das *vollständige Schema des Experimentes* dann durch Fig. 6 dargestellt. Es sind dabei *L*, *L* zwei isolirt aufgestellte Leydener Flaschen, deren äussere Belegungen durch die Funkenstrecke *F*, und deren innere Belegungen durch die primäre Spule *PP* des Teslatransformators verbunden sind. Von der secundären Spule *SS* des Transformators führen Drähte zu den Elektroden des Entladungsrohres. — Sollen die directen Entladungen benutzt werden, so wird *SS* fortgelassen und den Elektroden des Entladungsrohres die Elektricität durch Drähte zugeführt, die von der Verbindungsleitung der inneren Belegungen zu beiden Seiten der eingefügten Spirale *PP* ausgehen. Diese Spirale auszuschalten, und die inneren Belegungen der Leydener Flaschen nur durch das Entladungsrohr zu verbinden, ist unpraktisch, weil dann bei der Ladung der Batterie vor der Auslösung und bei der Entladung nach der Auslösung zu viel nicht für die Messung verwerthbare Elektricität durch das Rohr hindurchgeht, und so das Phänomen, auf welches es ankommt, zu sehr verdeckt wird.

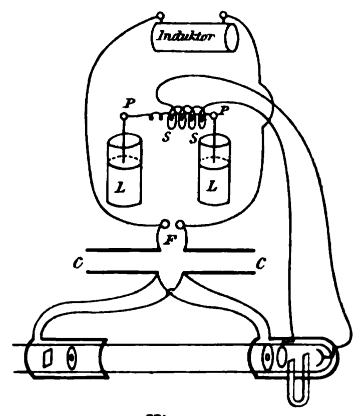


Fig. 6.

Bei der gewählten Anordnung finden in dem die Kathodenstrahlen liefernden System Schwingungen statt. Bemerkenswertherweise habe ich meist nur dann die für die Versuche nothwendigen in einem Kegel geordneten Kathodenstrahlen erhalten, wenn nicht die erste durch den Funken F eingeleitete, sondern erst die zweite Schwingung negative Elektricität zu der Hohlspiegelelektrode K führte; die Wirkung des Drahtes *abcd* zeigte dann, dass diese zweite Schwingung auch die einzige blieb, bei der das kegelförmige Bündel ausging. Es scheint hiernach, als ob das Rohr einer gewissen Vorbereitung bedarf, bevor die Kathodenstrahlen sich in der hier gebrauchten regelmässigen Weise entwickeln, und dass die nothwendigen Bedingungen bald wieder verloren gehen.

§ 4. **Apparate zur Geschwindigkeitsmessung.**

Das *Entladungsrohr* für die definitiven Beobachtungen erhielt folgende Einrichtung:

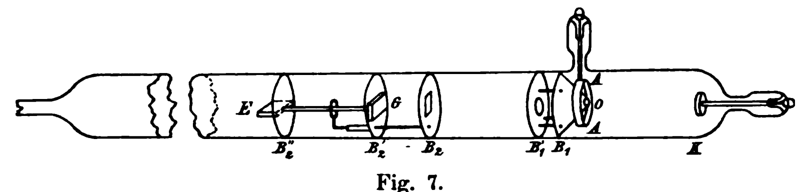


Fig. 7.

Ein Glasrohr von ca. 40 mm lichter Weite trägt an einem Ende, dem „Kopf", zunächst die Hohlspiegelelektrode K von ca. 20 mm Durchmesser, 2 mm Dicke und ca. 10 cm Krümmungsradius. Durch Abschleifen auf einem Brillenglas war es leicht, die richtige Form mit der hier erforderlichen Genauigkeit zu erhalten.

Die 4 mm weite Oeffnung O der Blende B_1 ist 8 cm von K entfernt und steht an der Stelle, wo das Kathodenstrahlenbündel seine grösste Einschnürung zeigt. Dass diese nicht erst im Convergenzpunkt der geometrischen Normalen, also 10 cm vor K, zu stande kommt, erklärt sich der Rechnung nach vollständig durch die magnetische Einwirkung des sehr bedeutenden Stromes, welcher während der Erzeugung der Kathodenstrahlen das Rohr durchsetzt. Man kann über seine Intensität leicht ein Urtheil gewinnen, wenn man die magnetische Einwirkung des zu K führenden Drahtes auf das

Kathodenstrahlenbündel untersucht und mit der Einwirkung bekannter magnetischer Kräfte vergleicht. Bei meinen Versuchen fand ich Werthe von 20—40 Ampère.

Da die Anode einen störenden Einfluss auf Entwickelung und Fortpflanzung der Kathodenstrahlen zeigte, gab ich ihr die Form eines Ringes $A\,A$ und setzte sie in die Ebene von O. Um dieses möglich zu machen, musste die Blende B_1 die Form eines Kegels erhalten. — Der mit B_1 vereinigte Ring B_1' hat nur den Zweck, B_1 eine gesicherte Lage zu geben.

Sobald die Elektroden der Glaswand zu nahe kommen, bilden sich während des Durchganges der Elektricität in dem Zwischenraum leuchtende Punkte, von denen sehr störende Sonderentladungen ausgehen; es wurde darum Sorge getragen, dass um die Elektroden überall ein freier Raum von einigen Millimetern blieb.

Als Material für die Elektroden nahm ich Aluminium, als Material für die Blenden Messing. Es ist nicht zweckmässig, neue Elektroden sogleich den heftigen für die Experimente gebrauchten Entladungen auszusetzen, weil dann in der Regel einzelne Punkte sich hervorthun, von denen die Entladung vornehmlich und in einer unbrauchbaren Form ausgeht; es empfiehlt sich vielmehr, zunächst eine Zeit lang die directen Entladungen eines Funkeninductors durch das Rohr hindurchzuschicken.

Jenseits B_1 liegt im Rohr leicht verschiebbar ein System von drei Messingscheiben B_2, B_2', B_2''. B_2 enthält in der Mitte ein rechteckiges Loch von 4 mm × 7 mm; B_2' trägt quer zur Längsrichtung der Oeffnung in B_2 einen Streifen G von Thüringer Glas, hergestellt durch Zusammendrücken eines Röhrchens oder Stäbchens; B_2'' trägt ein flaches Eisenstäbchen E. B_2' und B_2'' sind durch einen Messingdraht fest verbunden; von B_2 aus geht ein Draht frei durch ein an B_2' gelöthetes Röhrchen, das als Führung dient, und klammert sich lose um den Verbindungsdraht von B_2' und B_2'', sodass B_2 gegen das System B_2', B_2'' ohne wesentliche Drehung verschiebbar ist. Mittels eines kleinen Elektromagneten kann man durch Vermittelung des Eisenstückchens auf B_2'' das System von aussen bewegen, und es gelingt dabei leicht, B_2 an eine beliebige Stelle und G in einem gewünschten Abstand dahinter zu bringen.

Das Entladungsrohr blieb bei meinen Versuchen stets durch eine Glasfeder mit der (Quecksilber-)Luftpumpe in Verbindung. Es ruhte dabei auf einem Hartgummilager bei B_1', wo es zur grösseren Sicherheit noch festgebunden war, und wurde im übrigen nur durch die ihrerseits von einem Stativ gehaltene Glasfeder und eine Bindfadenschlinge getragen. Die letztere hing von einem primitiven Waagebalken herab und trug die Last des Rohres auf der Seite der Feder.

Zur Verbindung des Rohres mit der Glasfeder benutzte ich anfänglich Siegellack, später, als ich im Winter durch immer wiederkehrende Undichtigkeiten bei zu starken Abkühlungen des Zimmers schlechte Erfahrungen gemacht hatte, nur noch directe Verschmelzung von Glasröhren, die mit einer guten Bunsenflamme sehr leicht herzustellen ist.

Zur *Füllung des Rohres* wurde stets Wasserstoff benutzt, weil dieser wegen der geringeren Absorption der Kathodenstrahlen sich bei weitem günstiger als andere Gase erwies. Der Druck variirte etwa von $^1/_{10}$ bis $^1/_2$ mm.

Die *Magnetspirale* zum Zusammenhalten der Kathodenstrahlen jenseits B_1 war aus einzelnen getrennten Theilen zusammengesetzt. Für das vorhin beschriebene Entladungsrohr bestand jeder der Theile aus einem 10 cm langen Stück eines Messingrohres von ca. 55 mm lichter Weite mit umgekanteten Rändern, auf das ein baumwollumsponnener Kupferdraht von 0,8 mm Dicke in drei Lagen aufgewickelt war. Die Theile umgaben das Entladungsrohr, ohne es zu berühren, und erhielten ihren Halt durch eine Holzlatte unter dem Entladungsrohr, auf der sie beliebig verschoben werden konnten.

Ich benutzte für die Spirale Ströme von 2—4 Ampère, wodurch im Innern Magnetfelder von 60—120 Einheiten entstanden.

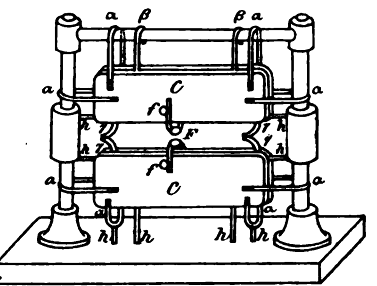


Fig. 8.

Das schon in Figg. 1 und 6 schematisch skizzirte *messende System* wurde aus zwei Luftcondensatoren zusammengesetzt. Bei dem für die definitiven Experimente benutzten System, das in Fig. 8 dargestellt ist, bestand jeder der Condensatoren

aus drei ebenen, parallel und vertical gestellten Messingplatten von 3 mm Dicke, 15 cm Höhe und 50 cm Breite mit abgerundeten Kanten und Ecken. Die beiden äusseren Platten, unter sich durch die Messingbügel α und f verbunden, bilden dabei zusammen die eine Condensatorfläche, die in der Mitte dazwischenstehende dritte Platte die andere. Ihren Halt finden die Blechplatten auf der hölzernen Grundplatte des ganzen Systemes und an dem aus Glasröhren und paraffinirtem Holz gebildeten Rahmen R durch Vermittelung der Bügel α, von denen zwei sich auf zwei Hartgummistäbchen h stützen, während die übrigen einfach um die Glasröhren des Rahmens gelegt sind. Die inneren Platten werden durch Blechhaken β und Hartgummistäbchen h gehalten.

Die Verbindungsbügel f haben unter den Befestigungsschrauben Schlitze und können darum ein wenig auf und ab verschoben werden; auf diese Weise wird die auslösende Funkenstrecke, die sich zwischen zwei in die Bügel f eingefügten abgerundeten Zinkstücken befindet, um einige Millimeter regulirbar. Ich gab ihr in der Regel eine Länge von ca. 7 mm. Auf der Seite, welche in der Figur vom Beschauer abgewandt ist, der „Rückseite", tragen die Bügel f Klemmschrauben für die Verbindungsdrähte mit dem elektrischen System zur Erzeugung der Kathodenstrahlen.

Der Abstand der Platten voneinander betrug in der Regel 1 cm; für die Versuche mit besonders kurzen Wellenlängen ($6^1/_2$ m), bei denen es gelang, auch den zweiten neutralen Punkt zu überschreiten, wurde er durch Biegen der Klammern α auf 2 cm vergrössert.

Von den beiden inneren Blechplatten gehen je zwei ca. 20 mm breite Blechstreifen γ, γ' nach innen und vorne. Die gegenüberstehenden Streifen γ, γ und γ', γ' werden einander schliesslich parallel und enthalten hier Löcher für Schrauben, durch welche die zu den Drähten $abcde$ und $a'b'c'd'e'$ führenden beweglichen Leiter befestigt werden. Diese bestehen aus je einem oder zwei Glieder der in Fig. 9 dargestellten Art: Zwei 20 mm breite Kupferblechstreifen, die an dem einen Ende etwas auseinander gebogen sind und an dem anderen

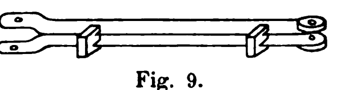


Fig. 9.

Ende aufgelöthete Messingscheiben mit Schraubenlöchern tragen, werden durch festaufgesteckte Hartgummiklammern in ca. 7 mm Abstand gehalten. An γ, γ oder γ' γ' wird das erweiterte Ende des ersten und eventuell einzigen Gliedes geschraubt; das andere Ende trägt dann entweder das nächste Glied oder den Draht *a b c d e*, bez. *a' b' c' d' e'*. — Man wird erkennen, dass diese Construction Beweglichkeit neben nahezu constanter und sehr geringer Selbstinduction gewährleistet.

Für das *System zur Aussendung der Kathodenstrahlen* benutzte ich zwei auf Paraffin oder Glas isolirt aufgestellte Leydener Flaschen aus Flintglas mit 40 cm hohen, 13 cm weiten, etwa 2 mm dicken Gläsern und etwa 13 qdm grossen Stanniolbelegungen. Um überall zuverlässige Contacte zu erreichen, erhielten die Belegungen je einen 2 cm breiten federnden, mit Stanniol umwickelten Messingring. Bei den äusseren Belegungen bestehen die Ringe aus *einem* Stück und üben selbst die nöthige Federkraft aus; bei den inneren Belegungen ist jeder Ring aus vier getrennten Stücken zusammengesetzt, die durch vier von einer Klemme ausserhalb der Flasche ausgehenden federnden Drähten fest an die Flasche gedrückt werden.

Von den äusseren Ringen gehen 2 mm dicke, und 60 cm lange Kupferdrähte zu der Funkenstrecke *F*, Fig. 6, bez. zu den Bügeln *f* des Systemes *CC* in Fig. 8. Für die Versuche mit sehr kurzen Wellenlängen wurde jede der Verbindungen durch mehrere — bis sechs — parallele Drähte hergestellt, um so die Selbstinduction möglichst herabzusetzen. Die Zuleitungsdrähte vom Funkeninductor (Fig. 6) können irgendwo an die äusseren Ringe der Leydener Flaschen angelegt, oder in die angeschlossenen Drähte eingehakt werden.

Die Spirale *PP* (Fig. 6) wurde aus 2 mm dickem Kupferdraht gewunden und mit den gerade gelassenen Enden in den Klemmen der inneren Armaturen von *L*, *L* befestigt. Die Länge des ganzen verwendeten Drahtstückes betrug in der Regel 1 m, der Durchmesser der Windungen 3 cm, ihre Anzahl 10, die Länge der eigentlichen Spirale 5 cm; doch waren bedeutende Variationen erlaubt. Für die Versuche mit sehr kurzen Wellenlängen wurden nur fünf Windungen in einer Spiralenlänge von 3 cm genommen. Sollten Teslaströme verwendet werden, so wurde über die Spirale ein enge anliegendes

reichlich 2 mm dickes Glasrohr geschoben, welches die secundäre Spirale *SS* des Transformators trug. Diese hatte etwa gleiche Länge wie die primäre Spirale, bestand aus enge aneinander liegenden Windungen eines gewöhnlich 0,8 mm dicken, mit Baumwolle übersponnenen Kupferdrahtes und zwar zur Erhöhung der Isolation mit Paraffin getränkt. Es kam zuweilen vor, dass das Glasrohr der secundären Spirale durchschlagen wurde; in solchen Fällen genügt es meist, die Löcher mit Klebwachs zu verschliessen.

Der *Funkeninductor*, von der Firma Max Kohl in Chemnitz bezogen, hat eine nominelle Schlagweite von 30 cm. Ich benutzte einen „rotirenden Quecksilberunterbrecher" der gleichen Firma und regulirte die Geschwindigkeit auf 15—20 Unterbrechungen in der Secunde. Der Stromverbrauch des Inductors war dann etwa 6 Ampère. —

Zum Schluss mögen nun noch einige Worte über die *gesammte Anordnung der Apparate* gesagt werden.

Das Entladungsrohr war in der Nähe und parallel der vorderen Kante des Experimentirtisches horizontal in 30 cm Höhe über der Tischplatte befestigt. Darunter befanden sich, dem Experimentirenden bequem zur Hand, der Regulirungswiderstand des Funkeninductors und der Schalter für die Magnetisirungsspirale. Dahinter, in etwa 20 cm Abstand, waren die beiden elektrischen Systeme aufgestellt und zwar am Kopfende des Entladungsrohres zunächst das die Kathodenstrahlen aussendende System, daneben dann das in Fig. 8 skizzirte messende System. Die Stellung des letzteren musste so abgepasst werden, dass seine durch *F* gehende Mittellinie mit der Mittellinie des Entladungsrohres in gleiche Höhe kam, weil die sich an γ, γ und γ', γ' ansetzenden Arme im Wesentlichen nur in einer horizontalen Ebene beweglich sind. Der Inductionsapparat mit seinem Unterbrecher stand zur Verhütung von magnetischen Störungen mehrere Meter weit von dem Entladungsrohr entfernt auf einem besonderen Tisch.

§ 5. Messung der magnetischen Ablenkbarkeit.

Wie im nächsten Paragraphen dargelegt werden wird, ergeben sich mit den vorstehend beschriebenen Apparaten für die Geschwindigkeit v der Kathodenstrahlen Werthe, die unter-

halb der Lichtgeschwindigkeit V liegen, sodass wir auf die Emissionshypothese verwiesen werden. Um die Messungen für diese zu verwerthen, muss α, d. i. das auf 1 Elektron der Ladung kommende Moleculargewicht für die sich bewegenden Theilchen, festgestellt werden. Die Theorie ergiebt bei magnetischer Ablenkung:

$$\alpha \frac{v}{V} = 3 \,.\, 1{,}073 \,.\, 10^{-7}(r\,H)\,; \quad \alpha\, v = 0{,}965 \,.\, 10^4 (r\,H)$$

und bei elektrischer Ablenkung:

$$\alpha \left(\frac{v}{V}\right)^2 = 1{,}073 \,.\, 10^{-9}(r\,R)\,; \quad \alpha\, v^2 = 0{,}965 \,.\, 10^{12}(r\,R)\,,$$

r bedeutet den Krümmungsradius, H die ablenkende magnetische, R die elektrische Kraft in Volt/Centimeter. Die Masse eines Sauerstoffatomes ist dabei gleich 16 gesetzt, und es ist angenommen, dass durch 1 Coulomb also $\frac{1}{10} V$ elektrostatische Elektricitätseinheiten $0{,}8288 \,.\, 10^{-4}$ g Sauerstoff elektrolytisch abgeschieden werden, woraus folgt:

$$\alpha = \frac{m}{e} \cdot 0{,}9653 \,.\, 10^4\, V,$$

wenn m die Masse und e die elektrostatisch gemessene Ladung der Theilchen bedeutet.

Nach den Formeln lässt sich α berechnen, wenn ausser der Geschwindigkeit v noch die magnetische oder die elektrische Steifigkeit $r\,H$ oder $r\,R$ bekannt ist. Ich wählte die weit bequemere Messung der magnetischen Steifigkeit.

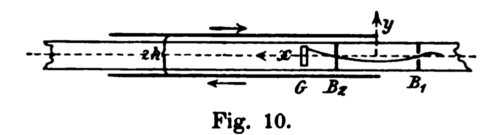


Fig. 10.

Da es nicht unmöglich schien, dass die Geschwindigkeit und damit die Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen von der Kathode ab bis zur Blende B_1 variirt, hielt ich es für rathsam, die Ablenkbarkeit erst hinter B_1 festzustellen, und verwendete dabei folgende Methode, welche bei verhältnissmässig einfachen Rechnungen vollständig übersehbare Verhältnisse bietet.

In der Weise, wie es Fig. 10 deutlich machen wird, wurde ein elektrischer Strom in geraden, parallelen Leitungen zu

beiden Seiten des Entladungsrohres entlang geführt und zwar in solcher Anordnung, dass nur diese Leitungen für die magnetische Ablenkung in Betracht kamen. Die Strahlen krümmten sich so, wie es die Figur in übertriebener Weise zeigt; mittels einer Theilung in Form eines sägeartig gefeilten Messingbleches, das den Glasstreifen zum Theil bedeckte, wurde die Verschiebung des Schattens eines über die Oeffnung der Blende B_2 gespannten Drahtes auf dem Glasstreifen G beobachtet. — Zur Feststellung der Stromstärke dienten dabei sorgfältig geaichte Ampèremeter.

Bei der Beobachtung wurden stets nur solche Stromstärken angewandt, dass die zu G gelangenden Strahlen sehr wenig gebogen waren; es darf daher für die Bahn geschrieben werden:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{H}{S},$$

wobei S die magnetische Steifigkeit der Strahlen und H die Intensität des Feldes auf der Geraden durch B_1 und B_2 bedeutet. In H zeigt sich die vereinigte Wirkung beider Drähte. Wir können für die Rechnung entsprechend Fig. 11 nur einen Draht annehmen, wenn wir ihn von der Linie $y = 0$ in den mittleren Abstand der wirklich verwendeten Drähte stellen und ihm die Summe ihrer Stromintensitäten geben. Ist i diese Summe, so folgt nach dem Biot-Savart'schen Gesetz:

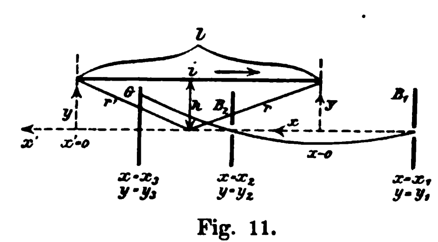


Fig. 11.

$$H = \frac{i}{h}\left(\left(1 + \frac{x}{r}\right) - \left(1 + \frac{x'}{r'}\right)\right),$$

wobei die Abstände r, r' (im Gegensatz zu x) stets positiv zu rechnen sind. Hiernach ist:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{i}{h S}\left(\left(1 + \frac{\xi}{\varrho}\right) - \left(1 + \frac{\xi'}{\varrho}\right)\right),$$

wenn gesetzt wird:

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \varrho = \frac{r}{h}, \quad \xi' = \frac{x'}{h}, \quad \varrho' = \frac{r'}{h}.$$

Durch Integration ergiebt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i}{S}\left((\xi + \varrho) - (\xi' + \varrho')\right) + c$$

und weiter:

$$y = \frac{ih}{2S}(Y - Y') + ch\xi + C,$$

wenn:

$$Y = (\varrho + \xi)\xi + \log\operatorname{nat}(\varrho + \xi),$$

$$Y' = (\varrho' + \xi')\xi' + \log\operatorname{nat}(\varrho' + \xi').$$

Von den beiden Integrationsconstanten c und C bedeutet c den ideellen Werth von dy/dx für $\xi = -\infty$, $x = -\infty$ und wird bestimmt durch die Bedingung, dass $y_1 = y_2$ sein soll; hieraus folgt nämlich:

$$c = -\frac{i}{2S}\frac{(Y_2 - Y_1) - (Y_2' - Y_1')}{\xi_2 - \xi_1}.$$

C lässt sich mittels der Bedingung $y_2 = 0$ eliminiren. Es ergiebt sich dann für die gesuchte magnetische Steifigkeit:

$$S = \frac{ih}{2y_3}\left\{\left((Y_3 - Y_2) - (Y_3' - Y_2')\right) - \frac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_2 - \xi_1}\left((Y_2 - Y_1) - (Y_2' - Y_1')\right)\right\}.$$

Sind die Drähte einigermaassen lang, sodass noch x_3' mehrere Mal grösser ist als h, so genügt es völlig, in Annäherung zu setzen:

$$Y_3' - Y_2' = 2\frac{x_2' - x_3'}{x_2' + x_3'}, \quad Y_2' - Y_1' = 2\frac{x_1' - x_2'}{x_1' + x_2'}. —$$

Bei meinen Versuchen wurden zur Stütze der Leitungen für i zwei mittels Zapfen zusammensteckbare Holzrahmen benutzt (vgl. Fig. 12), auf deren Innenflächen dicht beieinander je zwei Drähte liefen. Auf diese Weise wurde der Strom an jeder Seite des Rohres im Ganzen 4 mal entlang geführt. Ist J der Strom des einzelnen Drahtes in Ampère, so ergiebt sich demgemäss für die in C.G.S.-Einheiten zu rechnende Stromstärke i der Werth

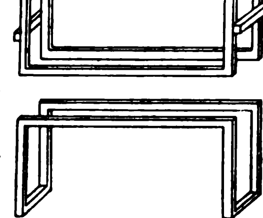


Fig. 12.

$$i = \frac{8}{10}J.$$

h war $= 3{,}00$ cm, l, die Länge der Stromstücke, $= 40$ cm. Der Fehler, den die hier nicht berücksichtigten Leitungen verursachten, betrug der Rechnung nach noch nicht 1 Proc. und konnte darum vernachlässigt werden.

§ 6. Die Beobachtungen.

Bei allmählicher Verdünnung des Wasserstoffgases im Entladungsrohr trat das conische Kathodenstrahlenbündel schon auf, wenn der Druck auf etwa 4 mm gesunken war, doch hatten die Strahlen dann noch nicht die Kraft, das Glas merklich zum luminesciren anzuregen, waren also für die Beobachtung noch unbrauchbar; brauchbar wurden sie erst etwa bei $^1/_2$ mm Druck; bei etwa $^1/_{10}$ mm Druck begann das Bündel seine scharfe Spitze zu verlieren, sodass die Beobachtung bald unmöglich wurde. Die magnetische Steifigkeit ($S = Hr$) variirte in dem brauchbaren Bereich etwa von 200 bis 450. Wenn diese Grenzen inne gehalten wurden, war es leicht, mit dem zweiten Draht ($a' b' c' d'$) Entfernungen zu erreichen, in welchen seine Einwirkung der des ersten Drahtes ($a b c d$) entgegengesetzt war, d. h. es konnte der erste Umkehrpunkt leicht erreicht und weit überschritten werden. In genauer Uebereinstimmung mit der Emissionstheorie wurde beobachtet, dass der Umkehrpunkt um so weiter rückte, je höher die magnetische Steifigkeit anwuchs. Auch die Lage des zweiten Umkehrpunktes, so weit sie festgestellt werden konnte, entsprach vollständig der Theorie, denn der Abstand vom Anfang der Messstrecke war dreimal grösser als beim ersten Umkehrpunkt.

Für die Berechnungen wurde nur der bei weitem sicherer zu bestimmende erste Umkehrpunkt verwerthet. Bedeutet λ seinen Abstand vom Beginn der Messstrecke, L wiederum die Wellenlänge des messenden Systemes, so ergiebt die Formel

$$\frac{v}{V} = \frac{4\lambda}{L}$$

die Geschwindigkeit v in Theilen der Lichtgeschwindigkeit V. — L wurde in der gebräuchlichen Weise mittels Resonanz von Drähten bestimmt.

Das Verhältniss der elektrischen Ladung e der Theilchen zu ihrer Masse m ergiebt sich mittels

$$\frac{e}{m} = \frac{V^2}{S}\frac{v}{V} \quad \text{oder} \quad \frac{e}{m} = \frac{V}{S}\frac{v}{V},$$

je nachdem e elektrostatisch oder elektromagnetisch gemessen wird. α folgt dann mittels

$$\alpha = \frac{m}{e} \cdot 0{,}9653 \,.\, 10^4\, V,$$

oder kann auch direct mittels

$$\alpha = 3{,}22 \,.\, 10^{-7} \frac{S}{\frac{v}{V}}$$

berechnet werden. (Vgl. § 5).

Bei der Beurtheilung von λ macht sich störend bemerkbar, dass wegen der langsamen Bewegung des pendelnden Strahlenbündels bei den äussersten Ausschlägen während einer verhältnissmässig langen Zeit Kathodenstrahlen durch die Blende B_1 hindurchgehen. Infolge dessen beobachtet man mit dem System $a'\ b'\ c'\ d'$, B_2, G schon erheblich vor dem ersten Umkehrpunkt neben den noch in gleichem Sinne wie durch $a\,b\,c\,d$ abgelenkten Strahlen auch solche, die gar nicht, oder schon entgegengesetzt abgelenkt sind; und ähnlich ist es hinter dem Umkehrpunkt. So fällt es denn schwer, ein Urtheil über die Lage des Umkehrpunktes zu gewinnen, und man kommt leicht in die Gefahr, sich einem systematischen Irrthum hinzugeben, der bei allen Beobachtungsreihen λ in gleicher Weise zu gross oder zu klein erscheinen lässt. — Hiergegen ist die nothwendiger Weise recht beträchtliche Ausdehnung der Systeme K, B_1, $a\ b\ c\ d$ und B_2, G, $a'\ b'\ c'\ d'$, um deretwegen die Beurtheilung von λ ebenfalls unsicher wird, verhältnissmässig unschädlich. Indem ich als Anfang der Messstrecke einen Punkt nahm, der in $^1/_3$ der Entfernung K—B_1 vor K lag, und als Ende die inmitten des Drahtes $a'\ b'\ c'\ d'$ stehende Blende B_2, werde ich den Verhältnissen in *dieser* Hinsicht wohl genügend Rechnung getragen haben.

Wegen der zu fürchtenden systematischen Fehler will ich das Beobachtungsmaterial hier nicht häufen, sondern mich

darauf beschränken, zwei Beobachtungsreihen anzuführen, die mir besonders zuverlässig erscheinen.

Der Abstand der Condensatorplatten war ca. 1 cm; für jede der Leitungen wurde nur je ein Zwischenglied der in Fig. 9 dargestellten Art benutzt. Bei der Reihe I entsprachen die ablenkenden Drähte genau der Fig. 6, bei der Reihe II wurden sie zweimal in der gezeichneten Weise um das Rohr herumgeführt, sodass die Einwirkung auf die Kathodenstrahlen verdoppelt wurde. Die grössere Selbstinduction der Leitungen bei II bewirkte eine grössere Wellenlänge des messenden Systemes, nämlich $L = 1140$ cm gegen $L = 940$ cm bei I.

Nach Regulirung des Gasdruckes mit Hülfe der Luftpumpe wurde bei jeder Messung die magnetische Steifigkeit S, dann die Geschwindigkeit v und dann wieder die magnetische Steifigkeit S beobachtet. Ueber die Bestimmung von S ist im vorigen Paragraphen das Nöthige gesagt. Bei der Bestimmung von v, bezüglich von λ erhielt die Messstrecke l nacheinander verschiedene Werthe, und es wurde in jedem Falle aus der Einwirkung des Drahtes $a'\,b'\,c'\,d'$ geschlossen, ob und wie viel das Ende der Messstrecke vor oder hinter dem ersten Umkehrpunkt lag, d. h. ob und wie viel l kleiner oder grösser war als λ.

Von den beigefügten Tabellen enthält die Tab. I die directen Beobachtungsdaten; in der Tab. II sind die Ergebnisse zusammengestellt, wobei für die magnetische Steifigkeit das arithmetische Mittel der jedesmaligen beiden Werthe genommen wurde.

Der Gasdruck war bei den ersten Versuchen der beiden Reihen $^1/_4$ bis $^1/_3$ mm und bei den letzten ungefähr $^1/_{10}$ mm.

Nach den Beobachtungen erscheinen etwa

$$\alpha = \frac{1}{1300},$$

$$\left(\frac{e}{m}\right)_{\text{elektrost.}} = 3{,}77 \,.\, 10^{17}, \quad \left(\frac{e}{m}\right)_{\text{elektromagn.}} = 1{,}26 \,.\, 10^{7}$$

als die wahrscheinlichsten Werthe für das auf O = 16 bezogene und auf ein Elektron kommende Atomgewicht α und für das Verhältniss e/m von Ladung in elektrostatischen oder elektromagnetischen Einheiten und Masse in Grammen. Im

Tabelle 1.

	Bestimmung der magnetischen Steifigkeit						Bestimmung des ersten Umkehrpunktes U_1					
	J (Amp.)	x_1	x_2 (Centimeter)	x_3	y_3	S		(Centimeter)				λ
				I. $L = 940$ cm, $h = 3$ cm								
vorher	3,0	−14,5	+6,4	+12,7	0,30	278	Einstellung	21	31	41	—	31
nachher	6,4	−13,5	+5,0	+10,0	0,40	281	Beobachtung	v. U_1	u.	h. U_1	—	
vorher	6,4	−13,5	+5,0	+10,0	0,30	374	Einstellung	21	31	41	51	36
nachher	6,3	−14,0	+6,0	+12,1	0,46	349	Beobachtung	e. v. U_1	v. U_1	h. U_1	e. h. U_1	
vorher	6,3	−14,0	+6,0	+12,1	0,40	402	Einstellung	—	32	42	52	39
nachher	6,3	−15,9	+7,0	+13,8	0,47	439	Beobachtung	—	v. U_1	w. h. U_1	h. U_1	
				II. $L = 1140$ cm, $h = 3$ cm								
vorher	4,9	−13,0	+6,3	+12,5	0,40	326	Einstellung	24	34	44	54	39
nachher	4,9	−13,0	+6,8	+13,2	0,435	326	Beobachtung	e. v. U_1	v. U_1	h. U_1	c. h. U_1	
vorher	4,9	−13,0	+6,8	+13,2	0,38	373	Einstellung	28	38	48	58	43
nachher	4,9	−12,5	+6,8	+13,1	0,39	354	Beobachtung	e. v. U_1	v. U_1	h. U_1	e. h. U_1	
vorher	6,5	−12,5	+6,8	+13,1	0,46	398	Einstellung	28	38	48	58	48
nachher	6,5	−12,5	+6,8	+13,0	0,44	407	Beobachtung	e. v. U_1	v. U_1	u.	h. U_1	

Abkürzungen: e. v. U_1 = erheblich vor U_1, v. U_1 = vor U_1, u. = unsicher ob vor oder hinter U_1, w. h. U_1 = wenig hinter U_1, h. U_1 = hinter U_1, e. h. U_1 = erheblich hinter U_1.

Tabelle II.

S	$\frac{v}{V}$	α	$\frac{e}{m}$ elektrostatisch	$\frac{e}{m}$ elektromagn.
		I. $L = 940$ cm		
279	0,132	$\frac{1}{1470}$	$4,25 . 10^{17}$	$1,42 . 10^{7}$
362	0,153	$\frac{1}{1310}$	$3,80 . 10^{17}$	$1,27 . 10^{7}$
420	0,166	$\frac{1}{1230}$	$3,56 . 10^{17}$	$1,19 . 10^{7}$
		II. $L = 1140$ cm		
326	0,137	$\frac{1}{1300}$	$3,78 . 10^{17}$	$1,26 . 10^{7}$
364	0,151	$\frac{1}{1290}$	$3,73 . 10^{17}$	$1,24 . 10^{7}$
403	0,168	$\frac{1}{1290}$	$3,75 . 10^{17}$	$1,25 . 10^{7}$

Hinblick auf die zu fürchtenden systematischen Beobachtungsfehler müssen für α die Werthe

$$\frac{1}{1600} \text{ und } \frac{1}{1050}$$

noch als recht wohl möglich bezeichnet werden; die Werthe

$$\frac{1}{1900} \text{ und } \frac{1}{900}$$

dagegen sind schon sehr unwahrscheinlich. Entsprechend ergeben sich für e/m bei elektrostatischem oder elektromagnetischem Maass die Werthe

$$4,64 . 10^{17} \text{ und } 3,04 . 10^{17},$$
$$1,55 . 10^{7} \text{ und } 1,01 . 10^{7}$$

als gut möglich, die Werthe

$$5,51 . 10^{17} \text{ und } 2,61 . 10^{17},$$
$$1,84 . 10^{7} \text{ und } 0,87 . 10^{7}$$

dagegen als sehr unwahrscheinlich.

(Eingegangen 6. September 1899.)

3. *Ueber die Abhängigkeit des elektrischen Leitvermögens vom Druck;*
von G. Tammann.

Wie früher gezeigt wurde, kann man den Druckeinfluss auf das Leitvermögen verdünnter Lösungen bis zu Drucken von 500 Atm. in guter Uebereinstimmung mit der Erfahrung unter gewissen Voraussetzungen, die sich zum Theil aus den allgemeinen Anschauungen über die Elektrolyse ergeben, berechnen.[1] Sowohl über die Abhängigkeit des Druckeinflusses vom Dissociationsgrad der Elektrolyte, als auch über die Abhängigkeit desselben von der Concentration, der Temperatur und der Natur des Lösungsmittels sind wir einigermaassen entweder durch die directe Erfahrung oder durch Folgerungen aus den allgemeinen Anschaunngen über Elektrolyse, die bisher durch die directe Erfahrung bestätigt wurden, unterrichtet.

Ganz unbekannt war bisher der Einfluss höherer Drucke, über 1000 Atm., auf das Leitvermögen. Diese Lücke ist durch die im Folgenden mitgetheilten Versuche über den Einfluss des Druckes auf die Lösungen eines fast vollständig und eines wenig dissociirten Elektrolyten, auf je eine verdünnte Lösung von Chlornatrium und Essigsäure, bis zu Drucken von 3600 Atm. gefüllt worden.

Mit der Frage nach dem Druckeinfluss auf das Leitvermögen von Lösungen hängt eng zusammen die Frage nach dem Druckeinfluss auf die Zähigkeit des Wassers und seiner Lösungen, und die nach der Abhängigkeit der Zähigkeit einer Lösung von ihrer Concentration. Auch auf diese Fragen soll im Folgenden etwas näher eingegangen werden.

---

1) Zeitschr. f. phys. Chem. **17.** p. 726. 1895; **27.** p. 457. 1898.

Versuchsresultate.

Das Widerstandsgefäss, das am besten die Wirkung hoher Drucke ohne erhebliche Capacitätsänderung vertrug, hatte die früher beschriebene Form.[1]) Der Abstand der Elektroden voneinander betrug nur 0,4 cm. Durch Drucksteigerung auf 3500 Atm. wurden dieselben um 2 Proc. ihres ursprünglichen Abstandes einander genähert, wenn die Spannweite des Glasbogens, in dem die Platindrähte eingeschmolzen sind, 1 cm beträgt. Die durch diesen Umstand bedingten Correctionen sind nicht angebracht worden, weil ihre Beträge wahrscheinlich durch Streckung der Platindrähte, an denen die Elektroden befestigt waren, nicht unerheblich herabgedrückt werden. Diese den Resultaten noch anhaftende Unsicherheit kann ihrer Grösse nach die weiteren Folgerungen kaum beeinflussen. Widerstandsgefässe anderer Form und grösserer Capacität mit ins Gefäss führenden, eingeschmolzenen oder eingekitteten Elektrodendrähten konnten nicht verwandt werden, weil hier entweder die Eintrittsstellen zerdrückt oder die Elektroden verschoben wurden. Die Zuleitungsdrähte wurden, wie früher[2]), isolirt aus dem Druckcylinder geführt. Ueber den Druckapparat selbst und die Manometercorrectionen ist in diesen Annalen[3]) nachzusehen. Die Widerstandsbestimmungen wurden nach der bekannten Methode von F. Kohlrausch ausgeführt. Der Widerstand der Zuleitung betrug 0,015 Ohm, der Widerstand der Lösung 50—100 Ohm. Anfänglich, beim Druck einer Atmosphäre, wurde gegen den Widerstand der Lösung ein gleicher Widerstand geschaltet und derselbe während einer Versuchsreihe nicht geändert. Die Einstellung aufs Telephonminimum konnte immer bis auf 0,2 Theilstriche der Brückenwalze, also auf 0,001 des Widerstandes, genau ausgeführt werden. Zum Schluss, nach Erreichung des höchsten Druckes, wurde nochmals der Widerstand bei gewöhnlichem Druck bestimmt. Die Differenz beider Bestimmungen betrug bei den

1) Vgl. A. Bogojawlensky u. G. Tammann, Fig. 1, Zeitschr. f. physik. Chem. **27**. p. 467. 1898.

2) Vgl. Fig. 2, l. c.

3) Wied. Ann. **68**. p. 557. 1899.

r mitgetheilten Bestimmungen höchstens 0,002 des Wider-
ndes. Die Temperaturabgaben beziehen sich auf die Scala Physikalischen Reichsanstalt. Die Badtemperatur wurde auf 0,02° während Festlegung einer Isotherme constant alten. Nach einer Druckänderung von 500 kg wurde 20 Min. zur Vornahme der endgültigen Einstellungen des Telephon-
ιimums gewartet.

In folgender Tabelle sind die Resultate der Messungen, corrigirten Drucke, gemessen in Kilogramm pro 1 qcm l die zu diesen gehörigen Verhältnisse der Widerstände beim ıck $p = 1$ kg und p kg, $R_p / R_{p=1}$, nach Anbringung der ibercorrectionen des Drahtes der Brückenwalze aufgeführt. ın folgen beistehend die für Drucke von 500 zu 500 kg phisch interpolirten Werthe von $R_p / R_{p=1}$.

Chlornatriumlösung $^1/_{10}$-normal.

$t = 0{,}06°$				$t = 20{,}05°$			
[illegible]	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$	p kg	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$	p kg	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$	p kg	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$
[illegible]	1,000	1	1,000	1	1,000	1	1,000
[illegible]	0,904	500	0,925	774	0,941	500	0,956
[illegible]	0,875	1000	0,889	1250	0,924	1000	0,932
[illegible]	0,862	1500	0,869	1725	0,914	1500	0,918
[illegible]	0,856	2000	0,858	2216	0,911	2000	0,912
[illegible]	0,854	2500	0,854	2713	0,911	2500	0,910
[illegible]	0,856	3000	0,855	3222	0,911	3000	0,910
[illegible]	0,856	3500	0,857	3720	0,913	3500	0,912
		4000	0,858			4000	0,915

$t = 40{,}07°$

p kg	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$	p kg	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$
1	1,000	1	1,000
776	0,962	500	0,973
1237	0,953	1000	0,958
1723	0,945	1500	0,949
2214	0,944	2000	0,943
2693	0,944	2500	0,944
3192	0,949	3000	0,947
3710	0,953	3500	0,952
		4000	0,956

Essigsäurelösung $^{1}/_{10}$-normal.

$t = 0{,}11^{0}$				$t = 20{,}14^{0}$			
p kg	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$	p kg	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$	p kg	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$	p kg	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$
1	1,000	1	1,000	1	1,000	1	1,000
777	0,787	500	0,855	787	0,784	500	0,855
1259	0,687	1000	0,734	1252	0,692	1000	0,738
1729	0,615	1500	0,644	1725	0,619	1500	0,650
2218	0,554	2000	0,582	2211	0,550	2000	0,582
2720	0,497	2500	0,526	2709	0,510	2500	0,526
3214	0,478	3000	0,487	3210	0,468	3000	0,487
3714	0,447	3500	0,460	3714	0,482	3500	0,447
		4000	0,430			4000	0,410

$t = 40{,}07^{0}$			
p kg	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$	p kg	$\frac{R_p}{R_{p=1}}$
1	1,000	1	1,000
776	0,793	500	0,862
1250	0,698	1000	0,742
1713	0,627	1500	0,653
2219	0,562	2000	0,588
2671	0,518	2500	0,532
3214	0,472	3000	0,490
3712	0,439	3500	0,454
		4000	0,420

Wie vorauszusehen, beeinflusst der Druck den Widerstand der verdünnten Chlornatrium- und Essigsäurelösungen in ganz verschiedener Weise (vgl. Fig. 1). Der Widerstand der Essigsäurelösung nimmt mit steigendem Druck langsamer als proportional dem Druck ab und übertrifft diese Abnahme bei gleichen Drucken die der Widerstände der Chlornatriumlösung recht erheblich. Die Widerstandscurven der Essigsäure für 0°, 20° und 40° liegen nahe zusammen, die für 0° und 20° schneiden sich mehrmals, die für 40° überlagert bis 3000 kg die beiden anderen, über 3000 kg schneidet sie die Curve für 0°. Ganz anders ist das Verhalten des Widerstandes der Chlornatriumlösung, hier nimmt mit steigendem Druck der Widerstand zuerst ab, erreicht ein Minimum und nimmt schliesslich viel langsamer, als anfangs ab, wieder zu. Das Minimum des Widerstandes verschiebt sich mit der Temperatur. Für 0° liegt das Minimum bei ca. 2600, für 20° bei ca. 2700 kg und für 40° bei 2000 kg. Gleichzeitig nimmt mit steigender Temperatur der Einfluss des

bei gleichen Drucken ab, und die Curven werden in uf eine durch das Minimum gehende Symmetrieaxe scher.

keit der Ionenreibung und der Zähigkeit vom Druck.

Dissociation in einer Lösung ist bekanntlich im Gegen- Dissociation in Gasen, soweit die Erfahrung reicht, on einer Contraction be- mentsprechend muss die- Lösungen mit steigendem nehmen, in Gasen aber oder, falls keine Volumen- die Gasreaction begleitet, ;ig vom Druck sein.

den Dissociationsgrad t vollständig dissociirten ten, wie Chlornatrium in alerLösung ($\alpha = 0,9$), kann ksteigerung von 1 auf eine Vergrösserung des ionsgrades um höchstens hervorrufen, wenn die inderung bei der Disso- ines g-Molecüles Chlor- 10 ccm beträgt. Nun letztere Grösse sicher be- kleiner und beträgt in keit vielleicht nicht mehr ner. Dass diese Volumen- sehr gering ist, folgt aus len eines Einflusses der ion auf den Binnendruck

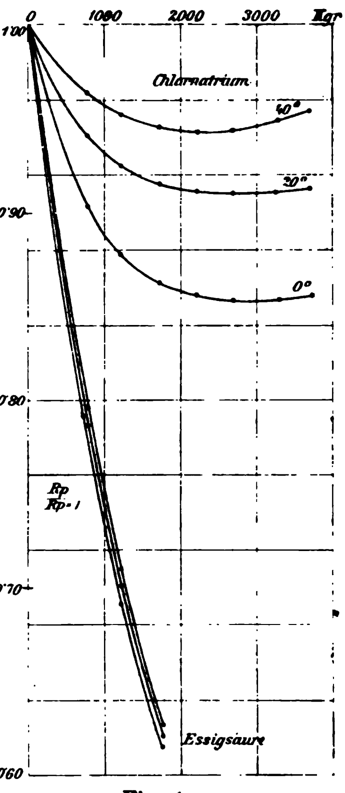


Fig. 1.

natriumlösungen. Infolge dessen kann man den Druck- uf den Dissociationsgrad der Chlornatriumlösungen ver- gen, und erhält nahezu den Druckeinfluss auf die ung η, wenn man von der Druckänderung des Wider- ?, die der Volumenänderung $\varDelta v$, der Lösung subtrahirt:

$$\frac{1}{\eta_{p=1}} \frac{\varDelta \eta}{\varDelta p} = \frac{1}{R_{p=1}} \frac{\varDelta R}{\varDelta p} - \frac{1}{v_{p=1}} \frac{\varDelta v}{\varDelta p}.$$

Man findet die zur Ausführung dieser Rechnung nothwendigen Daten in folgender Tabelle. Zuerst für die Drucke p die Werthe $\Delta R / R_{p=1}$, dann die Werthe $\Delta v / v_{p=1}$, interpolirt aus der Tabelle Amagat's und schliesslich die Differenzen beider Werthe, die Druckänderungen der Ionenreibung $\Delta \eta / \eta_{p=1}$.

	$t = 0{,}0^{\circ}$			$t = 20{,}0^{\circ}$		
p kg	$-\frac{\Delta R}{R_{p=1}}$	$-\frac{\Delta v}{v_{p=1}}$	$\frac{\Delta \eta}{\eta_{p=1}}$	$-\frac{\Delta R}{R_{p=1}}$	$-\frac{\Delta v}{v_{p=1}}$	$\frac{\Delta \eta}{\eta_{p=1}}$
500	0,075	0,023	— 0,052	0,044	0,021	— 0,023
1000	0,111	0,043	— 0,068	0,068	0,039	— 0,029
1500	0,131	0,059	— 0,071	0,082	0,055	— 0,027
2000	0,142	0,074	— 0,068	0,088	0,069	— 0.019
2500	0,146	0,088	— 0,058	0,090	0.082	— 0.008
3000	0,145	0,095	— 0,050	0,090	0,094	+ 0,004
3500	0,143	0,110	— 0,033	0,088	0,104	+ 0,016
4000	0,142	0,120	— 0,022	0,085	0,113	+ 0,028

	$t = 40{,}0^{\circ}$		
p kg	$-\frac{\Delta R}{R_{p=1}}$	$-\frac{\Delta v}{v_{p=1}}$	$\frac{\Delta \eta}{\eta_{p=1}}$
500	0,027	0,020	— 0,007
1000	0,042	0,038	— 0,004
1500	0,051	0,053	+ 0,002
2000	0,057	0,068	+ 0,011
2500	0,056	0,080	+ 0,024
3000	0,053	0,092	+ 0,039
3500	0,048	0.102	+ 0,054
4000	0,044	0,111	+ 0,067

Die Druckänderungen der inneren Reibung sind Fig. 2 graphisch dargestellt. Die Minima der Ionenreibungsisotherme sind viel deutlicher ausgesprochen als die der Widerstandsisothermen und liegen natürlich bei kleineren Drucken als diese. Auch die Verschiebung der Minima der Ionenreibungsisothermen mit steigender Temperatur zu niederen Drucken tritt deutlicher auf. Bei ca. 50—60° würde das Minimum bei gewöhnlichem Druck liegen, von dieser Temperatur an würde sich das Wasser auch in dieser Beziehung wie die übrigen Flüssigkeiten verhalten.

Um den Vergleich zwischen den Druckänderungen der Ionenreibung einer verdünnten Lösung und der Zähigkeit des

reinen Wassers durchzuführen, tragen wir in das Diagramm jener auch diese ein.

Ueber den Einfluss des Druckes auf die Zähigkeit des Wassers sind von Röntgen[1]), Warburg und Sachs[2]) und schliesslich von R. Cohen[3]) Versuche angestellt worden. Von

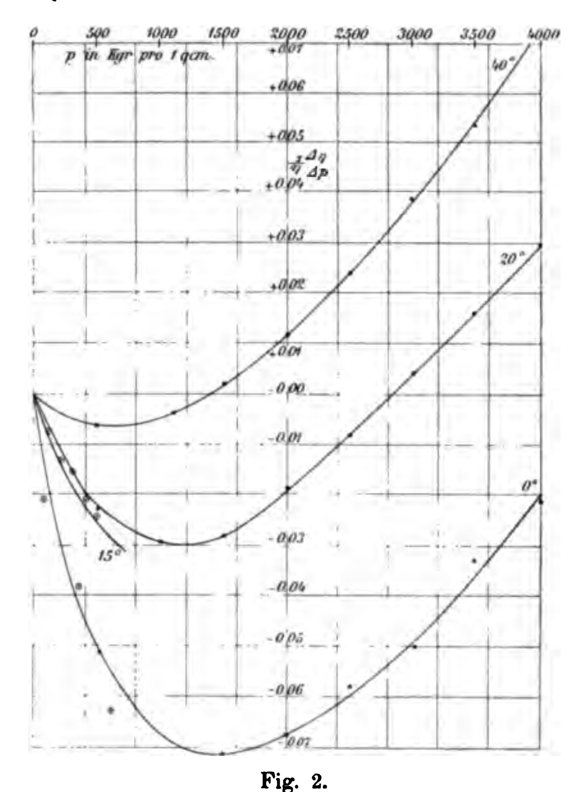


Fig. 2.

den ersten Beobachtern wurde constatirt, dass die Zähigkeit des Wassers mit steigendem Druck abnimmt, dass dagegen die Zähigkeit anderer Flüssigkeiten mit steigendem Druck zunimmt. Von R. Cohen wurden die Untersuchungen über den Einfluss des Druckes auf die Ausflusszeit von Wasser aus einem Glasrohr auf grössere Druck- und Temperaturgebiete

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 22. p. 510. 1884.

2) E. Warburg u. J. Sachs, l. c. p. 518.

3) R. Cohen, Wied. Ann. 45. p. 666. 1892.

ausgedehnt. Man findet in der Arbeit R. Cohen's die relativen Aenderungen der Ausflusszeiten $T - (T_{p=1} - T_p)/T_{p=1}$ — für $+15^0$ bis zu 900 Atm. und für $+1^0$ bis zu 600 Atm. Wie man aus den einzelnen Bestimmungen der Ausflusszeit ersieht, kann der Fehler der relativen Aenderung derselben bis 0,01 steigen. Da bei der Temperatur 23^0 nur wenige Beobachtungen vorliegen und hier der mögliche Fehler grösser ist als die gemessene Aenderung, so sind die bei 23^0 angestellten Beobachtungen ihrer grossen relativen Fehler wegen nicht weiter berücksichtigt worden. Die Mittel der bei $+1^0$ und $+15^0$ ca. 5 mal wiederholten Bestimmungen mögen schliesslich mit einem Fehler von $\pm 0{,}002$ behaftet sein.

Druckänderungen der Ausflusszeiten des Wassers nach R. Cohen.

$t = +1^0$		$t = +15^0$	
p Atm.	$\frac{T_{p=1} - T_p}{T_{p=1}}$	p Atm.	$\frac{T_{p=1} - T_p}{T_{p=1}}$
100	0,021	100	0,007
300	0,038	200	0,013
600	0,063	300	0,015
		400	0,021
		500	0,025

Da die Zähigkeit proportional der Ausflusszeit ist, so kann man, um den Vergleich zwischen der Abhängigkeit der Zähigkeit und der Ionenreibung vom Druck durchzuführen, die Daten obiger Tabelle in das Diagramm, Fig. 2, eintragen. Die von Kreisen umzogenen Kreuze beziehen sich auf die letzteren. Man übersieht nun sofort, dass die Ionenreibung einer verdünnten Lösung und die Zähigkeit des Lösungsmittels sich, soweit die Erfahrung reicht, in gleicher Weise mit dem äusseren Druck ändern. Man kann also die *Isothermen der Ionenreibung auch als die der Zähigkeit des Wassers* betrachten. Man ersieht, dass das Wasser betreffs Abhängigkeit seiner Zähigkeit vom Druck sich abweichend von anderen Flüssigkeiten nur in einem Zustandsgebiet, das sich von ca. 50^0 über 0^0 hinaus und den entsprechenden Drucken von 1 und 1450 Atm. erstreckt, verhält.

Berechnung des Druckeinflusses auf die Zähigkeit von Chlornatriumlösungen.

Macht man Gebrauch von dem Satze, dass die Druck-ıderungen der Eigenschaft einer Lösung gleich sind denen ɜs Lösungsmittels unter einem äusseren Druck, der gleich t der Binnendrucksdifferenz $\varDelta K$ zwischen der Lösung und ɜm Lösungsmittel unter gleichem äusseren Druck, so kann an den Druckeinfluss auf die Zähigkeit verdünnterer Lö-ıngen in ganz befriedigender Uebereinstimmung der Zähig-ɜitsisotherme des Lösungsmittels entnehmen. R. Cohen hat ıch den Druckeinfluss auf die Zähigkeit einiger Chlornatrium-sungen bestimmt und gefunden, dass derselbe mit steigender ɔncentration von negativen in positive Werthe übergeht. Ver-ılten sich nun Chlornatriumlösungen verschiedener Concen-ation wie Wasser unter verschiedenen äusseren Drucken, so lgt das Resultat R. Cohen's direct aus der Gestalt der ähigkeitsisotherme des Wassers.

In folgender Tabelle sind erstens die Concentrationen der ın R. Cohen untersuchten Chlornatriumlösungen aufgeführt, ınn folgen unter $\varDelta K$ die Unterschiede zwischen den Binnen-rucken des Wassers und der Chlornatriumlösungen[1]), ferner ıter a die Differenzen der Werthe $1/\eta_{p=1}$, $\varDelta\eta/\varDelta p$ für die rucke $\varDelta K + 1$ und $\varDelta K + 310$ kg und unter b die von . Cohen gefundenen Aenderungen der Zähigkeit bei Druck-eigerung von 1 auf 310 kg, schliesslich wiederholen sich die-lben Daten für den Zuwachs des äusseren Druckes von $K + 1$ auf $\varDelta K + 620$ kg und von 1 auf 620 kg.

Druckeinfluss auf die Zähigkeit von Chlornatriumlösungen.

Proc.-Gehalt	4 %	8 %	13,8 %	25,7 %
$\varDelta K$ in kg	444	887	1264	2345
bei 0° a	—	− 0,012	− 0,005	+ 0,007
bei +2 b	—	− 0,015	− 0,008	+ 0,021
bei 20 a	—	+ 0,000	+ 0,002	+ 0,007
bei 14,5 b	—	+ 0,002	+ 0,008	+ 0,022
bei 0 a	− 0,021	− 0,006	—	+ 0,016
bei +2 b	− 0,028	− 0,007	—	+ 0,041
bei 20 a	+ 0,001	+ 0,007	—	+ 0,014
bei 14,5° b	+ 0,003	+ 0,017	—	+ 0,044

1) Zeitschr. f. physik. Chem. **13.** p. 174. 1894.

Bis zur Concentration 15 Proc. ist die Uebereinstimmung eine befriedigende. Bei 25 Proc. ist der berechnete Zuwachs der Zähigkeit kleiner als der gefundene, was durch eine schnellere Zunahme des Druckeinflusses auf die Zähigkeit des gelösten Stoffs bedingt ist.

Die Druckänderung der Zähigkeit von Lösungen wechselt bei derjenigen Concentration ihr Vorzeichen, deren Binnendruckdifferenz gleich ist dem äusseren Druck, bei dem die Zähigkeitsisotherme des Wassers ein Minimum hat.

Abhängigkeit der Zähigkeit wässeriger Lösungen von der Concentration.

Man ersieht sofort, dass, wenn die Zähigkeit des gelösten Stoffs sich von der Zähigkeit des Lösungsmittels nicht unterscheidet, die Zähigkeit einer solchen Lösung sich mit der Concentration, entsprechend der Aenderung des Binnendruckes, ändern wird. Ist diese Aenderung des Binnendruckes in ihr Abhängigkeit von der Concentration im speciellen Falle bekannt, so hat man für die entsprechenden ΔK-Werthe die Zähigkeiten der Lösungen unter dem Drucke 1 Atm. der Zähigkeitsisotherme des Lösungsmittels zu entnehmen. Dieser ideale Fall wird wohl aber kaum vorkommen. In vielen Fällen wird die Abhängigkeit der Zähigkeit des Lösungsmittels vom Binnendruck ganz von der Zähigkeitsänderung durch den gelösten Stoff verdeckt, und nur bei starken Verdünnungen kann dann die Verminderung der Reibung des Wassers zum Vorschein kommen. Diese Verminderung der Zähigkeit des Wassers durch geringe Salzzusätze muss bei Abnahme der Temperatur (von 50—0°) bei gleichen Zusätzen wachsen.

Ueberblickt man die von A. Sprung[1]) gegebenen Tafeln, auf denen die Abhängigkeit der Zähigkeit für mehrere Salzlösungen in Wasser von der Concentration dargestellt ist, so findet man unter den Curven mehrere, die für Ammoniumchlorid, -bromid, -nitrat und die für Kaliumchlorid, -bromid, -jodid, -nitrat, welche der Zähigkeitsisotherme des Wassers sehr ähnlich sind und mit steigender Temperatur ihre Gestalt in ganz ähnlicher Weise wie die Zähigkeitsisotherme des Wassers ändern. Stellt man für Chlorammonium die Zähigkeiten gra-

1) A. Sprung, Pogg. Ann. **159**. p. 1. 1876. **Taf. I.**

phisch in Abhängigkeit von der Binnendrucksdifferenz ΔK dar, so fällt die Zähigkeitscurve der Chlorammoniumlösungen für 20^0 mit der Zähigkeitsisotherme des Wassers für 20^0 bis zur Concentration 16 Proc., entsprechend dem ΔK-Werth 930 kg, zusammen. Die Zähigkeitscurve der Chlorammoniumlösungen für 0^0 liegt dann unterhalb und die für 40^0 oberhalb der entsprechenden Zähigkeitsisotherme des Wassers. Die Abhängigkeit der Zähigkeit des gelösten Chlorammoniums von der Temperatur ist also von der des Wassers merklich verschieden. Aehnliches findet man bei den Lösungen des Kaliumjodids.

Die Abhängigkeit des Dissociationsgrades der Essigsäure vom Druck.

Unter zwei Voraussetzungen kann man aus den Messungen des Druckeinflusses auf den Widerstand der Essigsäurelösung den Druckeinfluss auf den Dissociationsgrad der gelösten Essigsäure ableiten. Die erste dieser Voraussetzungen ist die, dass sich die Volumina der $^1/_{10}$-normalen Essigsäure und der $^1/_{10}$-normalen Chlornatriumlösung mit dem Druck so ändern, wie das Volumen des Wassers. Der höchstmögliche Fehler dieser Annahme übersteigt nicht 1 Proc. der Volumenänderungen. Das Zutreffen der zweiten Voraussetzung, dass die Ionenreibungen in beiden Lösungen in gleicher Weise vom Druck abhängen, ist fraglich. Eine Entscheidung über diese Frage könnten Untersuchungen über die Abhängigkeit der Ionenreibung des Natriumacetats vom Druck bringen.

Unter diesen Voraussetzungen kann man den Einfluss des Druckes auf den Dissociationsgrad α der Essigsäure erfahren, wenn man von den relativen Widerständen der Chlornatriumlösungen die der Essigsäurelösungen unter gleichen Drucken subtrahirt:

$$(1) \quad \left(\frac{R_p}{R_{p=1}}\right)_{\text{NaCl}} - \left(\frac{R_p}{R_{p=1}}\right)_{\text{Essigsäure}} = \frac{\dfrac{1}{\alpha_{p=1}} - \dfrac{1}{\alpha_p}}{\dfrac{1}{\alpha_{p=1}}} = \frac{\alpha_p - \alpha_{p=1}}{\alpha_p}.$$

Diesen Quotienten kann man auch noch auf anderem Wege berechnen. Bekanntlich gilt nach M. Planck die Beziehung:

$$(2) \qquad \frac{d \log_{\text{nat}} K}{d p} = - \frac{\Delta v}{1000\, R\, T},$$

wo K die Dissociationsconstante und Δv die Volumenänderung bei der Dissociation der Essigsäure in $^1/_{10}$-normaler Lösung bedeutet. Um diese Gleichung integriren zu können, machen wir die Annahme, dass Δv vom Druck, wie das Volumen des Wassers und von der Temperatur, wie die Volumenänderung bei der Neutralisation[1]) abhängt. Als Werth von Δv bei 20° nehmen wir 10,3 ccm an.[2]) Berechnet man dann für von 1000 zu 1000 kg steigende Drucke die Werthe $\Delta v/1000\,RT$, so erhält man folgende Interpolationsgleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} 0^0 \; \dfrac{d \log K}{d p} = 0{,}0002073 - 7{,}15 \times 10^{-9} p + 4{,}5 \times 10^{-13} p^2 \\ 20^0 \; \dfrac{d \log K}{d p} = 0{,}0001809 - 7{,}20 \times 10^{-9} p + 5{,}5 \times 10^{-13} p^2 \\ 40^0 \; \dfrac{d \log K}{d p} = 0{,}0001622 - 7{,}00 \times 10^{-9} p + 6{,}5 \times 10^{-13} p^2. \end{cases}$$

Integrirt man diese Gleichungen, so erhält man die Gleichungen für die Werthe $\log(K_p/K_{p=1})$, mit deren Hülfe die Werthe $\log(K_p/K_{p=1})$ von 1000 zu 1000 kg berechnet wurden. Schliesslich ergeben sich mit Hülfe der Gleichung

$$(4)\qquad \alpha = \frac{K v}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{K v}} - 1\right)$$

die Werthe α_p.

In folgender Tabelle sind die so erhaltenen Quotienten $(\alpha_p - \alpha_{p=1})/\alpha_p$ unter ber. verzeichnet, unter gef. findet man die aus den Messungen des elektrischen Widerstandes mit Hülfe der Beziehung (1) abgeleiteten Werthe $(\alpha_p - \alpha_{p=1})/\alpha_p$. Diese Werthe sollten übereinstimmen. Doch findet man eine ziemlich befriedigende Coincidenz nur bei einer Temperatur bei 20°, bei 0° sind die gefundenen Werthe kleiner als die berechneten und bei 40° findet man das umgekehrte Verhältniss. Man ersieht aus Formel (2), dass der Druckeinfluss auf die Dissociationsconstante für die Dissociation im Wasser und wohl auch in anderen Lösungsmitteln mit steigender Temperatur abnehmen muss, weil T im Nenner zunimmt und Δv im Zähler für das Lösungsmittel Wasser von 0—50° ebenfalls abnimmt. Die nach (1) abgeleiteten Aenderungen des Dissociationsgrades

1) Zeitschr. f. physik. Chem. **16.** p. 142. 1895.

2) l. c. **27.** p. 461. 1898.

ben aber ein Anwachsen desselben mit steigender Temperatur. :r Grund hierfür ist wahrscheinlich der, dass die Reibung : Ionen der Essigsäure nicht so wie die der Chlornatrium-ıen von der Temperatur und dem Drucke abhängt. Man ısste, um ein besseres Resultat zu erhalten, in Gleichung (1) :ht die Druckabhängigkeit der Widerstände der Chlornatrium-ung, sondern die der äquivalenten Natriumacetatlösung ein-ıren.

$$\frac{\alpha_p - \alpha_{p=1}}{\alpha_p}$$

p kg	*t* = 0°	20°	40°	
500	—	0,100	0,076	ber.
		0,103	0,111	gef.
1000	0,190	0,169	0,153	ber.
	0,155	0,194	0,216	gef.
2000	0,341	0,304	0,277	ber.
	0,276	0,330	0,355	gef.
3000	0,464	0,417	0,383	ber.
	0,368	0,423	0,457	gef.
4000	0,562	0,504	0,472	ber.
	0,428	0,505	0,536	gef.

Beim Drucke von 3600 kg enthält die Essigsäurelösung derselben Gewichtsmenge doppelt so viel Ionen als unter wöhnlichem Druck. In demselben Verhältniss ändert sich ch ihre Avidität der Salzsäure gegenüber (J. Thomsen-Arrhenius). Bei anderen Stoffen, wie beim Ammoniak und r Kohlensäure, deren Δv ca. 2,5 mal grösser ist als das der sigsäure, würde die Verdoppelung der Ionenzahl schon bei vas über 1000 kg erreicht werden. Dem grossen Druck-ıfluss auf die wenig dissociirten Elektrolyte steht die Un-hängigkeit des Dissociationsgrades stark dissociirter Elek-ılyte gegenüber.

Bei Aenderung des Druckes in Flüssigkeiten um wenige mosphären darf man Aenderungen der Gleichgewichte zwischen n gelösten Stoffen und durch diese bedingte Aenderungen r Reactionsgeschwindigkeiten, die durch die gewöhnlichen :thoden der Concentrationsbestimmung wahrnehmbar sind, :ht erwarten. Dagegen könnte in tiefen Meeren der Einfluss s Druckes auf Reactionen im Meerwasser schon merklich

werden. In der Tiefe von 5000 m (550 kg) wäre der Dissociationsgrad der gelösten Kohlensäure ungefähr 1,4 mal und in der Tiefe von 10000 m 1,7 mal so gross als an der Oberfläche. Dementprechend würde auch die Lösungsgeschwindigkeit des neutralen kohlensauren Kalkes mit der Tiefe zunehmen. In der That finden sich Calciumcarbonatablagerungen nur bis ca. 5000 m Meerestiefe.

Ueber den Einfluss des Druckes auf das chemische Gleichgewicht in Flüssigkeiten und die hiermit zusammenhängenden Aenderungen der Reactionsgeschwindigkeit sind unrichtige Ansichten, die sich zum Theil auf eine unrichtige Interpretation von Versuchsresultaten stützen, sehr verbreitet. Soll untersucht werden, ob zwei Stoffe aufeinander einwirken, so werden sie gewöhnlich in einem geeigneten Lösungsmittel gelöst und, nachdem die Mischung einige Zeit bei Zimmertemperatur verblieb, auf eventuelle Veränderungen der ursprünglichen Stoffe gefahndet. Bleibt eine solche aus, so wird die Mischung auf der Temperatur des Siedepunktes der Lösung unter Luftdruck erhalten, bleibt auch hier die gewünschte Reaction aus, so wird schliesslich das Gemisch im geschlossenen Glasrohr auf ca. 130° erwärmt. Häufig wird die erwartete Reaction unter diesen Bedingungen deutlich merkbar. Ist nun das erste Temperaturintervall grösser als das zweite, so glaubt man sich besonders berechtigt, der geringen Drucksteigerung von 10 bis 20 Atm. im Schiessrohre einen ganz erheblichen Einfluss auf die Reactionsgeschwindigkeit zuschreiben zu dürfen. Das Anwachsen der Reactionsgeschwindigkeit ist hier aber einzig und allein der Temperatursteigerung und nicht der Drucksteigerung zuzuschreiben.

(Eingegangen 25. September 1899.)

---

4. *Ueber einen experimentellen und theoretischen Trugschluss in der Elektricitätslehre; von Ernst Lecher.*

(Nach den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien Bd. CVIII, Abth. IIa, 13. Juli 1899, bearbeitet vom Hrn. Verfasser.)

W. König[1]) hat ein Verfahren beschrieben, welches eine fortdauernde Drehung eines Magnetpoles um einen stromdurchflossenen Leiter hervorbringt. Er bezieht sich dabei auf p. 160 des bekannten Werkes von Ebert „Magnetische Kraftfelder“. — Ich hingegen leugnete seinerzeit[2]) die Thatsache, dass ein stromdurchflossener Leiter einen Magnetpol constant längst den Stromkraftlinien herumrotiren lasse. —

Der entsprechende alte Pohl'sche (?) Versuch ist in fast allen Lehrbüchern der Elektricitätslehre beschrieben und wird gewöhnlich als äusserst bequemer Ausgangspunkt für weitere Schlüsse benutzt, trotzdem er theoretisch und experimentell falsch ist, wie sich durch folgende einfache Abänderung dieses Versuches leicht zeigen lässt.

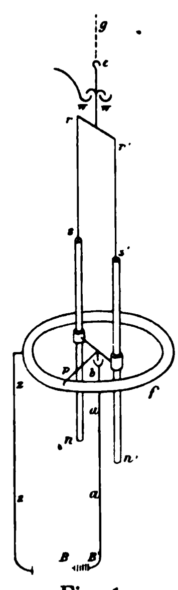


Fig. 1.

Die beiden Magneten $s\,n$ und $s'\,n'$ hängen mittels des zweimal rechtwinklig gebogenen Drahtes $s\,r\,r'\,s'$ an dem Faden $e\,g$. — In der Mitte von $r\,r'$ sind zwei Zacken angelöthet, welche in die kleine Quecksilberrinne $w\,w$ eintauchen. $B\,B'$ ist die Batterie. Der eine Pol B' bleibt dauernd mit dem möglichst langen verticalen Drahte a verbunden. Am oberen Ende dieses Drahtes ist das Quecksilbernäpfchen b. — Von da kann der Strom in zweierlei Weise weitergehen.

1) W. König, Wied. Ann. 60. p. 519. 1897.

2) E. Lecher, Wied. Ann. 54. p. 282. 1895.

Er fliesst entweder über den horizontalen Draht *p* in die Quecksilberrinne *f* und über den Draht *z* zur Batterie *B* zurück. Es ist das die alte Schaltung und der allbekannte, nach meiner Ansicht falsche Versuch. Oder aber man verbindet *B* nicht mit *z*, sondern in weitem Bogen mit der oberen, kleinen Quecksilberrinne *w*; dann fliesst der Strom wieder durch den geraden Draht *a*, das Quecksilbernäpfchen *b*, geht jedoch nun in die oberen Hälften der beiden Magnete und über *s r w* und *s' r' w* zu *B* zurück. Bei der ersten Schaltung genügt eine Stromstärke von 1,5 Amp., um die bekannte Drehung hervorzubringen. — Bei der zweiten Schaltung aber ist bei dem Maximum der Stromstärke, die ich ohne Gefährdung des Apparates anwenden konnte, bei ca. 30 Amp. keine Spur einer Bewegung zu bemerken. Wenn nun die Bewegungsursache bei der ersten Schaltung durch die Wirkung des Drahtes *a* auf die Pole *n* und *n'* gegeben ist, so müsste diese Wirkung auch bei der zweiten Schaltungsweise vorhanden sein und das ist, wie der Versuch zeigt, nicht der Fall.

Somit ist die Ursache der Rotation auch bei der ersten Schaltungsweise nicht im Drahte a, sondern im Drahte z zu suchen.

Die behauptete Drehung ist aber auch theoretisch unmöglich. Vom Standpunkte der Fernwirkungstheorie aus bewies dies schon Margules.[1] Aber auch die neue Kraftlinientheorie erbringt gar keinen Grund für eine derartige Rotation.

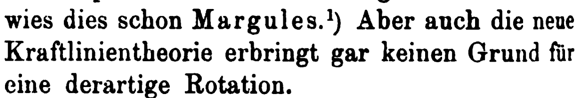


Fig. 2.

Ueberblicken wir etwas eingehender den Verlauf der Kraftlinien in Fig. 2. Es sei *n* der zu betrachtende Pol, dem irgendwo ein entsprechender *s*-Pol zugeordnet sein muss. Der Leiter, der die Rotation hervorbringen soll, sei *a a'*. Derselbe wird nun von den Kraftlinien des Magneten (punktirt gezeichnet) einmal geschnitten. Für den Zweck der Betrachtung ist es gleichgültig, ob wir die Kraftlinien fest mit dem Magnete verbunden denken oder ob wir die ursprüngliche Anschauung Faraday's einführen, welche ich in der früher citirten Arbeit vertreten habe, wonach die Kraftlinien im Raume, aber nicht

1) M. Margules, Wied. Ann. 6. p. 59. 1879.

am Magneten haften. Nie kann bei einer Rotation von *n s* um *a a'* ein Schneiden von Kraftlinien stattfinden, es ist daher eine Rotation infolge des Stromes in *a a'* unmöglich.

Wenn man sich nicht mit einem so qualitativen Experiment, wie es in Fig. 1 geschildert ist, begnügen will, so zeigt es sich, dass die Durchführung eines quantitativ genaueren Versuches auf einige Schwierigkeiten stösst.

Ich versuchte experimentell die ablenkende Wirkung eines Stromes auf einen Magnetpol nach dem Oerstedt'schen

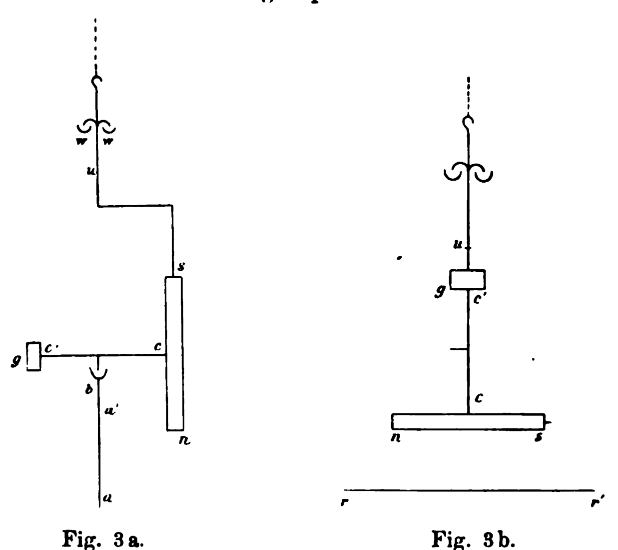


Fig. 3a. Fig. 3b.

und dem in Frage stehenden Principe zu vergleichen. Der Magnet *n s* (Fig. 3a) ist fest verbunden mit dem Drahte *c c'*, der in seiner weiteren Verlängerung das Gegengewicht *g* trägt. Der Strom geht durch *a a'* über das Quecksilbernäpfchen *b*, dann durch die eine Magnethälfte über *s* nach dem Punkte *u* in die kleine Quecksilberrinne *w*. Das ganze System hängt an einem Coconfaden und besitzt eine Spiegelablesung. Indem man zwei Schrauben bei *s* und *u* löst, kann man dann den Magneten an dieselbe Aufhänge- und Ablesevorrichtung in horizontaler Lage hängen (Fig. 3b) und unten horizontal einen Stromleiter *r r'* vorbeiführen. Wenn die Entfernung des Poles *n* vom Stromleiter die gleiche ist, so ist in beiden Versuchen alles gleich bis auf die Hebelarme und den Umstand, dass im

zweiten Falle zwei Pole wirken. Bei einer so feinen Anordnung zeigt sich nun das merkwürdige Resultat, dass auch in der ersten Stellung (Fig. 3a) immer eine Ablenkung eintritt, die aber in ihrer Grösse mit der zweiten Ablenkung (Fig. 3b) absolut nicht stimmen will. Sie ist meist kleiner und auch im Zeichen oft entgegengesetzt. Die Fehlerquelle ist leicht zu finden. Wenn aa' nicht genau centrirt ist oder wenn dieser Draht irgendwo kleine Verbiegungen besitzt, dann werden bei der Rotation Kraftlinien geschnitten und das ist die Ursache der Ablenkung. Wenn aber der Draht aa' während der Beobachtung mechanisch um die eigene Axe rotirt wird, so verschwindet jede Ablenkung. Dasselbe tritt ein, wenn der Magnet ns in zwei Lagen beobachtet ist, welche um 180° verschieden sind, also einmal rechts und einmal links vom Drahte und wenn in mehreren Azimuthen die entsprechenden Beobachtungen zu einem Mittelwerthe combinirt werden. Ebenso verschwindet jede Drehung fast ganz, wenn man — der gebräuchlichen Anordnung entsprechend — zwei gegenüberstehende Magnete verwendet. Die reducirte Ablenkung bei Fig. 3a ist dann etwa 1000 mal kleiner, als die nach Fig. 3b. Diese restlichen Impulse rühren wohl von dem gegenseitigen elektrodynamischen Einflusse der Leitertheilchen her, welche sich kaum ganz vermeiden lassen.

Es liegt, wie ich glaube, in der historischen Entwickelung unserer Anschauungen über Kraftlinien, dass die Idee der Rotation eines Poles um den Strom sich so lange erhalten konnte. Faraday nämlich beschäftigte sich mit dieser Rotation lange Zeit vor Conception seines Kraftlinienbegriffes. Damals — 1821 — spricht Faraday von den Polen als selbstständigen Existenzen, er betrachtet damals den Pol als blossen Wirkungsmittelpunkt.[1]) Damals sagte er z. B.[2]), dass Eisenfeilicht, über die Stromspirale gestreut, „sich sehr bald über dem Magnet in krummen, von dem einen Ende zum andern gehenden Linien anordnen und den *Weg* angeben, *den der Pol nehmen würde*". Seine bekannten Rotationsversuche unternimmt er von dieser Voraussetzung aus, die sehr einfach und

1) Vgl. Uebersetzung von Kalischer 2. p. 116 u. 137. 1891.
2) l. c. p. 127.

verlockend erscheint. Die Entdeckung von Oersted und die Arbeiten von Biot und Savart schienen alle mit dieser Voraussetzung in bester Uebereinstimmung. Dass Faraday erst später — 1831 — zu einem genaueren Begriffe der Kraftlinien kam, sagt er selbst gelegentlich in einem Briefe an Tyndall[1]): „Es sind nun heutzutage 24 Jahre her, dass ich zum ersten Male die Aufmerksamkeit auf diese Linien lenkte." In späteren Jahren giebt Faraday zu wiederholten Malen Definitionen von Kraftlinien, z. B. 1851[2]) und fast identisch 1852.[3]) — In diesen Definitionen fehlt die bis heute oft ausgesprochene Vorstellung, dass die Kraftlinien Linien seien, längst welchen sich ein Pol bewegen müsse. Faraday war eben inzwischen zu einer bestimmteren Vorstellung gekommen[4]): „Absoluter oder beziehungsloser Nord- und Südmagnetismus ist unmöglich." In dieser späteren Zeit kam aber Faraday nicht mehr auf den in Rede stehenden Rotationsversuch zurück. Und da dieser Versuch zur Anschauung der Fernwirkungstheorie scheinbar stimmte, wurde es ermöglicht, dass er auch im experimentellen Studium sich mit solcher Hartnäckigkeit erhalten konnte.

Bei dem Faraday'schen Rotationsversuch gleitet der bewegliche Magnet durch die im Quecksilber feststehenden Kraftlinien, welch' letztere die Ursache der Rotation sind.

Auch die eingangs erwähnte neue Anordnung von W. König halte ich in vorliegender Frage nicht für beweisend. Derselbe verwendet eine stromdurchflossene Röhre $r r'$ und bringt die gleichnamigen Pole hackenförmig umgebogener Magnetstäbe in das Innere derselben. Das wesentliche der Anordnung ist in Fig. 4 (mit nur *einem* Magneten) schematisch skizzirt. Sowohl Magnet als auch Röhre sind, jedes für sich, um die gemeinsame Axe $a a$ dreh-

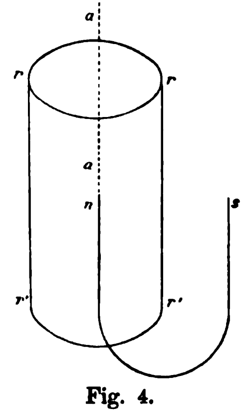


Fig. 4.

1) Vgl. Uebersetzung von Kalischer S. p. 637. 1891.
2) l. c. p. 298. § 3071.
3) l. c. p. 367.
4) l. c. p. 388. § 3277.

bar. — Der Strom tritt in die Röhre mittels eines Quecksilbercontactes in *r r* ein und vermittelst eines zweiten in *r' r'* aus. Fliesst durch die Röhre ein starker Strom, so rotirt Röhre und Magnet nach entgegengesetzter Richtung. Mir erscheint dieser Versuch nur als neue Form des alten Barlow'schen Rädchens. Die Kraftlinien zwischen *n* und *s* werden durch den Leiter *r r'* fortwährend geschnitten. Diese Bewegung hat aber mit der angeblichen Rotation eines Poles um einen axialen stromdurchflossenen Leiter nichts zu thun.

Was schliesslich die Darstellung dieser Angelegenheit bei Ebert anlangt, so seien mir folgende Bemerkungen gestattet.

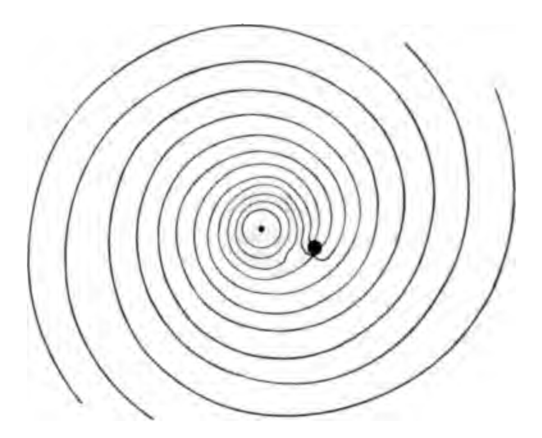


Fig. 5.

Ebert spricht sich zwar zu wiederholten Malen gegen die Existenz „eines" Poles aus und scheint auch[1]) meinen Einwand gegen den in Rede stehenden Versuch für begründet zu halten. Gleichwohl ist aber an einer anderen Stelle[2]) eine diesbezügliche Fiction ziemlich weit ausgeführt. Als Ueberschrift des in Rede stehenden Paragraphen setzt Ebert „Diagramm des elektromagnetischen Grundversuches". Nach dem vorhergehenden ist aber das Resultat des Versuches durch secundäre Umstände bedingt und kann er daher nicht als Grundversuch bezeichnet werden. Gleichwohl könnte aber auch.

1) H. Ebert, Magnetische Kraftfelder p. 160. § 158. Leipzig 1896.
2) l. c. p. 179. § 174.

vie ich glaube, die weitere Darstellung des Gegenstandes vieleicht zu Irrthümern Anlass geben. Durch die bekannte Superosition der Kraftfelder des Stromes und des Magneten erhält Ebert vorstehende Zeichnung (Fig. 5), welche der Uebersichtlicheit wegen etwas vereinfacht ist. Der Punkt links ist der Durchchnitt des Stromes, der Punkt rechts ein Südpol. Die spiralörmigen Linien stellen die Kraftlinien dar. Der Südmagnetpol st eine Sinkstelle. Ebert erwähnt hier auch, dass, da die Linien ıur scheinbar endigen, sie in den Magnet hineingehen und so ıus dem Felde verschwinden. Doch sollte dann meiner Meinung ıach auch ganz besonders betont werden, dass diese Linien rgendwo aus dem Nordpol herausquellen und ins Feld zurückehren müssen. Ebert sagt in Bezug auf den Eindruck vortehender Fig. 5: „Die sonst in sich zurückkehrenden Stromraftlinien sind dadurch zu einer unendlichen Spirale geöffnet.“ Dieses Beispiel könnte unter der Fiction nur *eines* Poles als geometrisch richtig gelten, hätte aber, und das scheint mir in Ebert's Darstellung leicht übersehen werden zu können, keine hysikalische Bedeutung. Es darf daher auch der Anblick lieses Kraftfeldes nicht zu weiteren physikalischen Schlüssen erwendet werden. Die vom Pole ausgehenden Kraftlinien iegen sich ja immer einmal nach oben oder unten zum nderen Pole um und treten so aus der Zeichnungsebene ıeraus. Denken wir uns einen Leiter und parallel zu demelben einen Magneten, so werden die Kraftlinien des Magıeten schraubenförmig um den Leiter sich herumwickeln, immer ber in sich geschlossene Curven bilden.

Aus den angeführten Gründen glaube ich den hier *erörterten ogenannten Fundamentalversuch als einen theoretischen und exerimentellen Trugschluss erklären zu müssen:* nach den theoreischen Ueberlegungen kann eine Rotation nie eintreten und ie experimentell gezeigte Rotation hat ganz andere Ursachen ls die bisher angenommenen.

Prag, Physikal. Institut der k. k. deutschen Universität.

(Eingegangen 5. August 1899.)

---

5. *Ueber die Vertheilung von freier Elektricität an der Oberfläche einer Crookes'schen Röhre; von Eduard Riecke.*

Die Entladungserscheinungen der Elektricität in verdünnten Gasen bergen trotz der vielen auf ihre Untersuchung gerichteten Arbeit noch so viele Räthsel, dass man immer hoffen kann, durch die Anwendung eines neuen Untersuchungsmittels zu neuen Aufschlüssen zu gelangen. Dieser Gedanke veranlasste mich, bei einigen mit verdünnten Gasen gefüllten Röhren Bestäubungsversuche mit dem Lichtenberg'schen Gemisch von Mennige- und Schwefelpulver zu machen. Ich hatte ursprünglich die Versuche auf eine grössere Zahl von Röhren ausgedehnt, die sich im Besitze des hiesigen physikalischen Institutes befinden; zuletzt habe ich mich auf die etwas ausführlichere Untersuchung von vier Röhren beschränkt, welche besonders charakteristische Resultate zu geben schienen. Ich schicke im Folgenden zunächst einige Bemerkungen über den Zusammenhang der Bestäubung mit der elektrischen Ladung der Glasoberfläche voraus und gehe dann über zu einem Berichte über die Versuche selbst und über ihre Ergebnisse.

1. Die Vertheilung der freien Elektricität im Inneren einer Geissler'schen oder Crookes'schen Röhre lässt sich berechnen, sobald der Verlauf des Potentiales in dem Inneren der Röhre bekannt ist. Die Vertheilung der freien Elektricität an der inneren und an der äusseren Oberfläche der Röhre würde zu bestimmen sein, wenn auch die Potentialvertheilung in dem Glase und in dem umgebenden äusseren Raume bekannt wäre. Bei einer verhältnissmässig geringen Dicke des Glases dürfte man annehmen, dass der Differentialquotient des Potentiales nach einer zu der Oberfläche senkrechten Richtung an der inneren und an der äusseren Oberfläche des Glases in diesem denselben Werth besitze. Die Summe der an der inneren und an der äusseren Oberfläche des Glases befindlichen

freien Elektricität könnte dann berechnet werden, sobald der Potentialverlauf im Inneren der Röhre und in dem umgebenden äusseren Raume bekannt wäre.

Man kann nun an Stelle von Potentialmessungen die Methode der Bestäubung benutzen, um über die Vertheilung der Elektricität an der Oberfläche einer Geissler'schen Röhre wenigstens einen qualitativen Ueberblick zu gewinnen.

Für die Beurtheilung der Resultate ist die folgende Bemerkung von Wichtigkeit. Während man sich vorstellen darf, dass die Potentialflächen an der inneren Oberfläche des Glases zu dieser senkrecht stehen, ist das an der äusseren Oberfläche keineswegs der Fall; die elektrischen Kräfte werden hier im allgemeinen gegen die Oberfläche mehr oder weniger geneigt sein. Wenn nun zwischen der Oberfläche des Glases und den angezogenen Staubtheilchen keine Reibung vorhanden wäre, so könnten diese nur an solchen Stellen der Oberfläche im Gleichgewicht sein, an denen die elektrische Kraft zu der Oberfläche senkrecht steht. Wenn zwischen der Glasoberfläche und den angezogenen Theilchen Reibung vorhanden ist, so kann Gleichgewicht auch noch bei schiefer Richtung der Kraft bestehen. Es sei K die ganze Intensität der elektrischen Kraft, φ der Winkel, den sie mit der Normale bildet, η der Reibungscoefficient; Gleichgewicht wird dann vorhanden sein, solange $\operatorname{tg} \varphi < \eta$ ist. Wenn also auf der Glasoberfläche ein Punkt vorhanden ist, in welchem die Kraft K gegen die Oberfläche senkrecht steht, so wird dieser umgeben sein von einem Hofe, innerhalb dessen der Staub haftet. Dieser Hof wird sich um so weiter ausbreiten, je langsamer die Neigung der Kraft K gegen die Normale sich ändert. Wenn auf der Glasoberfläche eine Linie vorhanden ist, in der die Kraft K gegen die Oberfläche senkrecht steht, so bildet der angezogene Staub ein Band von einiger Breite, dessen Axe durch jene Linie gebildet wird.

Betrachten wir solche Stellen, in denen die Kraft K zu der Oberfläche senkrecht steht, so werden wir annehmen dürfen, dass die Menge des angezogenen oder haftenden Staubes der Kraft K proportional ist. Bezeichnen wir durch n_2 die in den äusseren Raum hineingehende Normale der Oberfläche, das Potential durch V, so ist die gegen die Oberfläche ge-

richtete, auf die Einheit der positiven Elektricität ausgeübte Kraft $K = (dV/dn_2)$. Die Bestäubung liefert hiernach einen gewissen Maassstab für die verschiedenen Werthe, welche dieser Differentialquotient an der äusseren Oberfläche des Glases besitzt. Die Summe σ der elektrischen Dichtigkeiten an der äusseren und an der inneren Oberfläche des Glases wird, wenigstens bei sehr dünner Glaswand, gegeben sein durch:

$$\frac{dV}{dn_1} + \frac{dV}{dn_2} = -4\pi\sigma.$$

Hier bezeichnet n_1 die innere Normale der Oberfläche. Nur da, wo dV/dn_1 Null ist, giebt die Bestäubung ein Bild für die Summe der inneren und der äusseren Oberflächendichte.

Wir nehmen zwei Stellen der Glasoberfläche A und B von der Art, dass in beiden die Kraft K zu der Oberfläche senkrecht steht, dass sie aber in A nach der Glasfläche hin, in B von ihr weg gerichtet ist. Es wird dann an der Stelle A positives Mennigepulver, in B negatives Schwefelpulver angezogen werden. Ziehen wir auf der Glasoberfläche irgend eine Linie, welche die Punkte A und B verbindet. Die Stetigkeit des Ueberganges erfordert dann, dass auf dieser Linie zwischen A und B ein Punkt C sich finde, in welchem die Kraft K der Oberfläche parallel wird. Der Punkt C liegt auf alle Fälle in dem von Staub freien Gebiet. In C ist $dV/dn_2 = 0$; wenn also ausserdem $dV/dn_1 = 0$ ist, so wird auch σ gleich Null, d. h. es verschwindet in diesem Punkte die Summe der äusseren und der inneren Oberflächendichtigkeit.

Die Bestäubungsversuche, über welche im Folgenden berichtet werden soll, beziehen sich auf Röhren, welche so weit evacuirt waren, dass der Kathode gegenüber auf der Glaswand ein heller Fluorescenzfleck entstand. Die Versuche wurden so ausgeführt, dass der Strom einer Toepler'schen Influenzmaschine mit 40 Plattenpaaren in einem bestimmten Moment durch die zu untersuchende Röhre geschlossen wurde. Nach einer bestimmten Zahl von Secunden wurde mit der Bestäubung begonnen; während der Strom weiter durch die Röhre ging, wurde so lange bestäubt, bis eine deutliche Figur auf der Glasoberfläche hergestellt war. Da es nicht gelang, den Staub hinreichend regelmässig aus dem Bestäuber fallen zu lassen,

so war die Bestäubungsdauer bei verschiedenen Versuchen nicht dieselbe. Die Versuche waren lästig, weil zu der Bestäubung der ausgedehnten Objecte eine ziemliche Menge von Staub nothwendig war. Bei den Versuchen war entweder die Kathode oder die Anode zu der Erde abgeleitet. Nach dem Versuche wurde der nur mechanisch haftende Staub durch Abklopfen entfernt. Die Bestäubungsfigur wurde mit Hülfe einer Projectionslampe nachgezeichnet und meist auch photographirt. Für die Anfertigung der Photographien bin ich Hrn. Dr. H. Th. Simon zu Dank verpflichtet.

Da die Bestäubung immer einige Zeit in Anspruch nahm, und da die verschiedenen Theile einer Röhre nicht gleichzeitig und gleichmässig von dem Staube getroffen wurden, so ist es möglich, dass durch die Bestäubung selbst eine gewisse Veränderung in der elektrischen Ladung erzeugt wird; die durch die Bestäubung angezeigte Vertheilung der Elektricität darf also nicht ohne weiteres als identisch mit derjenigen betrachtet werden, welche auf der unbestäubten Röhre vorhanden war. Zum Theil mögen die Verschiedenheiten, welche bei wiederholten Bestäubungsversuchen mit derselben Röhre und unter sonst gleichen Umständen sich einstellten, hiermit zusammenhängen.

2. Am ausführlichsten habe ich eine *kugelförmige Röhre* untersucht, welche zur Demonstration der durch die Kathodenstrahlen erzeugten Fluorescenz diente. Das Entladungspotential betrug 4250 Volt. Der Durchmesser des kugelförmigen Theiles der Röhre betrug 10,5 cm; der Durchmesser der ebenen Kathode, welche in einem seitlichen Ansatze eingeschmolzen war, betrug 2,4 cm; die Länge der drahtförmigen Anode, welche gleichfalls in einem seitlichen Ansatzrohre sich befand, 2,5 cm. Die Anode bildete mit ihrer Verlängerung einen Durchmesser des kugelförmigen Röhrentheiles; in der zu diesem Durchmesser senkrechten Aequatorialebene lag der Mittelpunkt der Kathode; ihre Fläche stand zu dem nach dem Mittelpunkt gehenden Radiusvector senkrecht.

Von dem Erfolg der Bestäubung geben die Figg. 1—4 ein Bild; sie sind dadurch entstanden, dass zuerst die Conturen der Photographien so gut wie möglich durchgezeichnet wurden. In diesen Pausen wurden dann die fehlenden Einzel-

heiten nachgetragen mit Hülfe der Zeichnungen, welche durch Projection erhalten worden waren. Die Figuren sind nicht genau vergleichbar, weil die Stellung der Röhre gegen den photographischen Apparat bei den verschiedenen Aufnahmen nicht ganz dieselbe war.

Bei den Versuchen, denen die Figg. 1 und 2 entsprachen, war die Anode der Röhre zur Erde abgeleitet, bei den zu den Figg. 3 und 4 gehörenden Versuchen die Kathode. Bei Fig. 1

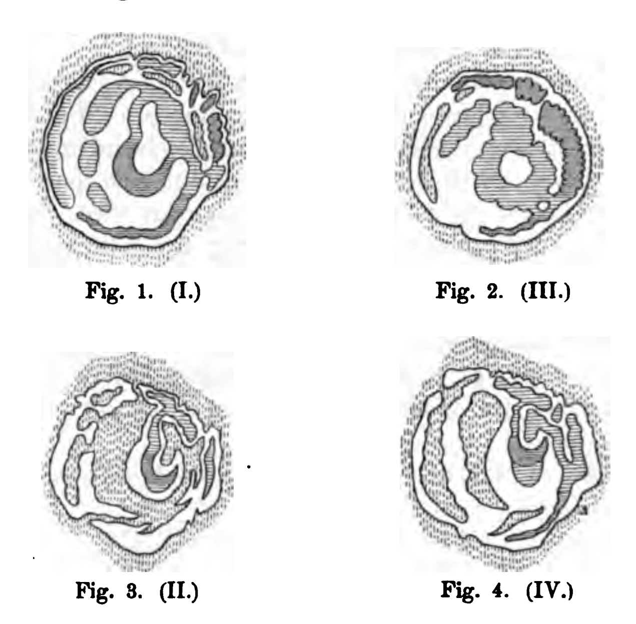


Fig. 1. (I.) Fig. 2. (III.)

Fig. 3. (II.) Fig. 4. (IV.)

begann die Bestäubung 30 sec nach Stromschluss und dauerte 120 sec. Bei Fig. 2 begann die Bestäubung 50 sec nach Stromschluss und dauerte 60 sec. Bei Fig. 3 sind die entsprechenden Zeiten 10 sec und 30 sec, bei Fig. 4 50 sec und 70 sec.

Die mit Mennige roth bestäubten Stellen sind horizontal schraffirt, die Stärke der Bestäubung ist durch den Abstand der Striche angedeutet, die mit Schwefel gelb bestäubten Stellen sind vertical gestrichelt.

Gemeinsam ist den vier Staubfiguren die folgende Eigenschaft. Der Kathode gegenüber entsteht auf der Glasoberfläche ein Ring, der den ausserhalb sich ausbreitenden gelben Staub sehr scharf begrenzt; auf die gegen den Ring hin zu-

nehmende gelbe Bestäubung folgt im Inneren des Ringes zunächst eine von Staub frei Zone. Zieht man von dem Mittelpunkt der Kugel Radien nach dem Ringe, so erhält man einen Kegel, dessen Oeffnungswinkel im Mittel etwa 90° beträgt. Im übrigen ist, wie von vornherein zu erwarten war, die Dauer des Stromdurchganges auf den Erfolg des Versuches von Einfluss und ausserdem der Umstand, ob die Anode oder die Kathode zur Erde abgeleitet ist. Im ersteren Falle, bei abgeleiteter Anode, ist das Innere des Ringes in unregelmässiger Weise mit rothem Pulver erfüllt, zwischen das nur wenige schmale Streifen von gelbem Pulver eingelagert sind. Besonders eigenthümlich sind die strahlen- oder keulenartigen rothen Massen an der rechten Seite der Figur. Sie gewinnen an Ausdehnung und Intensität, wenn der Strom länger durch die Röhre geht. Bei Ableitung der Kathode finden sich im Inneren des Ringes ausgedehnte Massen gelben Pulvers, welche zum Theil durch schmale Brücken mit dem ausserhalb des Ringes befindlichen gelben Staube zusammenhängen. Die Ausbreitung des rothen Pulvers ist namentlich bei Fig. 3 eine kleine; die eigenthümlichen rothen Strahlen, die bei den Figg. 1 und 2 vom rechten Rande auftreten, fehlen.

Der bei allen Figuren erscheinende Ring entspricht ziemlich genau der Grenze des Bereiches, über den sich die grüne Fluorescenz des Glases ausbreitet.

Die auffallende Unregelmässigkeit, mit der sich der Staub im Inneren des Ringes vertheilt, hat vielleicht in einer ungleichförmigen Beschaffenheit der Kathodenfläche ihren Grund. Diese Vermuthung wird besonders durch die Thatsache nahegelegt, dass das Ansehen der Figuren während der Dauer der Beobachtungen eine Veränderung erlitt. Leider habe ich von den zuerst hergestellten Staubfiguren keine Photographien angefertigt und keine Projectionen gezeichnet, sondern mich darauf beschränkt, die erhaltenen Figuren aus freier Hand nachzuzeichnen. Immerhin genügen die Zeichnungen, um eine Veränderung der Figuren zu erkennen. Bei abgeleiteter Anode war zu Anfang die rothe Bestäubung im Inneren des Ringes durch eine mit vielen Lappen und Einbuchtungen versehene Curve nach aussen abgegrenzt. Die Bestäubung war im Inneren schwach und nahm nach aussen zu, sodass die äusseren Enden

der Lappen intensiv roth erschienen, ähnlich wie die keulenförmigen Strahlen auf den rechten Seiten der Figg. 1 und 2. Die besonders in den Figg. 3 und 4 bei abgeleiteter Kathode hervortretenden sichelförmigen Gebilde fehlten zu Anfang ganz: sie sind vielleicht als die vergrösserten Bilder einer ähnlichen geschwärzten Stelle aufzufassen, die sich auf der Kathode gebildet hatte.

Die zeitliche Aufeinanderfolge der Versuche, welche den Figg. 1 bis 4 entsprechen, ist durch die beigesetzten römischen Zahlen gegeben. Zwischen den Figuren, welche bei abgeleiteter Anode und bei abgeleiteter Kathode auftreten, scheint ein gewisser Gegensatz zu bestehen. Es war namentlich bei den Vorversuchen zu bemerken, dass Stellen, welche sich bei abgeleiteter Anode mit rothem Staub bedeckten, bei abgeleiteter Kathode frei blieben und umgekehrt. Bei späteren Beobachtungen trat dieser Gegensatz mehr zurück, bei den Figg. 1 bis 4 ist er kaum noch zu bemerken.

Die Kathode lag etwas im Inneren des kugelförmigen Röhrentheiles; etwas hinter ihrer Fläche erschien auf der Oberfläche des Glases ein feiner intensiv rother Ring; die den Zuleitungsdraht zur Kathode enthaltende Ansatzröhre bedeckte sich mit rothem Staube.

Bei einem Theile der Versuche erschien auf dem die Anode umschliessenden Röhrenansatz ein feiner, gelber Streifen parallel dem Anodendraht; der Streifen lief, sich allmählich verbreiternd, nach dem Ringe hin, welcher die der Kathode gegenüberliegende Staubfigur umgiebt. Ich vermuthe, dass dieser Streifen im Zusammenhang steht mit einem weissen Lichtbande, das von der Anode nach dem von den Kathodenstrahlen getroffenen Flecke hingeht. Die von den Kathodenstrahlen negativ geladenen Theile der Glaswand wirken wie eine secundäre Kathode; zwischen ihnen und zwischen der Anode findet ein Ausgleich der Elektricitäten statt, dessen Bahn durch jenen Lichtstreif angezeigt wird.

3. *Birnförmige Röntgenröhre.* Die Röhre war als solche wenig wirksam; ihre Länge betrug 24 cm, der Durchmesser der Kathode 2,4 cm. Bei *abgeleiteter Kathode* treten keine besonderen Erscheinungen auf; die Röhre bedeckte sich ziemlich gleichmässig mit Schwefelpulver, nur gegenüber der Kathode

auf dem abgeplatteten Theile der Glaswand erschien ein rother, negativ elektrischer Fleck von nahezu kreisförmiger Gestalt. Zu beiden Seiten der Kathode blieb auf der Oberfläche des Glases ein ziemlich breiter Ring von Staub frei. Hinter der Fläche der Kathode bedeckte sich das spitze Ende der Röhre mit Mennigepulver. Diese rothe Zone erstreckte sich anscheinend eben so weit, als die Fluorescenz, welche durch die von dem Träger der Kathode seitlich ausgesandten Strahlen erregt wurde. (Vgl. in Fig. 5 die horizontal gestrichelte Partie hinter der Kathode.)

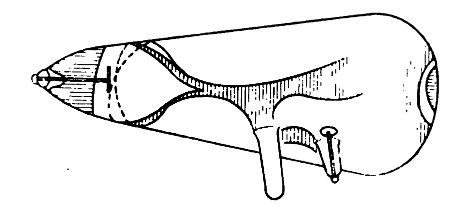


Fig. 5.

Wurde die *Anode abgeleitet*, so trat in der Vertheilung des gelben Staubes eine sehr eigenthümliche Veränderung ein, welche durch die Figg. 5 und 6 anschaulich gemacht wird. Die Figuren sind in derselben Weise entstanden, wie die zuvor erwähnten. Auf dem vor der Kathode liegenden Theile der Röhre bildet der Schwefelstaub einen geschlossenen Ring. Seine Mittellinie erhält man, wenn man die Röhre durch eine gegen ihre Axe geneigte Ebene schneidet. Von dem Punkte des Ringes, welcher der als Halter dienenden Ansatzröhre am nächsten liegt, zieht sich ein gelbes Band nach dieser und nach der Anode. Ausserdem aber ziehen sich Bänder gelben Staubes nach dem auf der Endfläche der Röhre sich bildenden negativen Fleck. Bei Fig. 5 ist nur ein einziges solches Band vorhanden, sein Ursprung liegt in der Ansatzröhre; bei Fig. 6 sind mehrere Bänder zu sehen, welche von der Anode ausgehen. In Fig. 5 erscheint das Band in unsymmetrischer Weise auf die Seite geschoben, in Fig. 6 ist der Verlauf ein ziemlich symmetrischer. Auch hier liegt es nahe anzunehmen, dass die nach dem Fluorescenzfleck hingehenden Bänder Strömungen

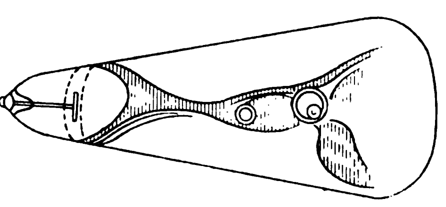


Fig. 6.

entsprechen, in welchen sich die negative Ladung des Fluorescenzfleckes mit der positiven Ladung der Anode ausgleicht.

4. *Schattenkreuzröhre.* Die Länge der Röhre betrug 22 cm, der Durchmesser der Kathode 1 cm. Beinahe alle Versuche wurden mit niedergelegtem Kreuze ausgeführt. Die Resultate werden durch die Figg. 7—9 erläutert. Bei den Versuchen, welche die Figg. 7 und 8 lieferten, war die Anode zur Erde

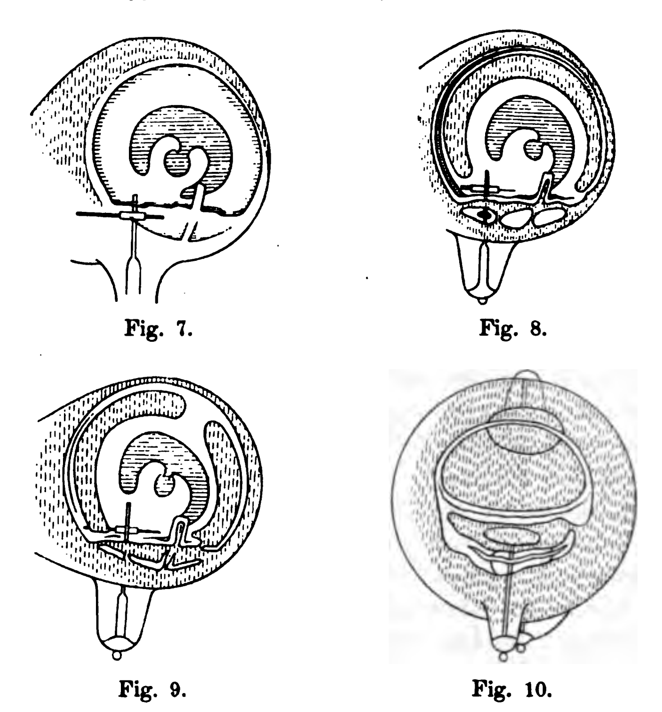


Fig. 7. Fig. 8.

Fig. 9. Fig. 10.

abgeleitet, bei dem der Fig. 9 entsprechenden Versuche die Kathode. Bei dem Versuche von Fig. 7 begann die Bestäubung 30 sec nach Stromschluss und dauerte 80 sec; bei den Versuchen der Figg. 8 und 9 sind die entsprechenden Zeiten 40 sec und 80 sec.

Am einfachsten sind die Verhältnisse von Fig. 7. Dem Rande der Kathode entspricht ein durch eine stärkere Anhäufung rothen Pulvers gebildeter Ring. Innerhalb dieses Ringes findet sich kein Schwefelpulver. Der Ring selbst ist in seiner unteren Hälfte unterbrochen durch den Schatten des

Kreuzes. In der Ebene des Kreuzes zieht sich durch den Ring ein intensiv rother Streifen; dieser scheint durch Strahlen erzeugt, die an dem Kreuze eine Art von streifender Reflexion erlitten haben. In den Ring ragt hinein der ungemein scharf begrenzte Schatten des Drahtes, von welchem das Kreuz getragen wird. Das Innere des Schattens ist von Staub ganz frei, der Saum des Schattens wird von einer scharf begrenzten rothen Linie gebildet. In der Mitte des Ringes befindet sich eine eigenthümliche rothe Figur, aus einer Sichel und einem kleinen Kreise zusammengesetzt.

Die Bestäubungsfigur 8 unterscheidet sich von Fig. 7 wesentlich dadurch, dass Theile der Figur, die in Fig. 7 von Staub ganz frei geblieben waren, in Fig. 8 mit Schwefelpulver bedeckt sind. So ist insbesondere der Schatten des Drahtes, von dem das Kreuz getragen wird, nicht von Staub frei, sondern durch seine Mitte zieht sich ein scharfer gelber Strich; das rothe Band, welches von den an dem Kreuze streifend reflectirten Strahlen gebildet wird, ist schwächer; in dem darunter liegenden Schatten des Kreuzes befindet sich ein Streifen von Schwefelpulver, welcher auf beiden Seiten mit der ausserhalb des Ringes liegenden, gelb bestäubten Glasfläche zusammenhängt; der unter der Fläche des Kreuzes liegende Theil des rothen Ringes ist nur angedeutet durch kleine rothe Stellen. Diese liegen in der Mitte staubfreier Flächen, die dadurch entstanden sind, dass der zuvor erwähnte gelbe Streifen mit der äusseren Bestäubung durch schmale Brücken zusammenhängt. Fig. 9 unterscheidet sich von Fig. 8 höchstens dadurch, dass die rothe Bestäubung noch mehr zurückgedrängt ist.

Bei aufgerichtetem Kreuze habe ich nur eine einzige Beobachtung gemacht mit abgeleiteter Kathode. Die ganze Bestäubungsfigur reducirte sich auf vier scharfbegrenzte, pfeilartige Mennigeflecken in den einspringenden Winkeln des Kreuzschattens.

5. *Kugelförmige Röntgenröhre mit Platinspiegel.* Der Durchmesser der Kugel betrug 9,5 cm, die Kathode hatte die Form eines Hohlspiegels, dessen Randkreis einen Durchmesser von 3,2 cm besass. Der Kathode gegenüber lag der Platinspiegel; der ihn tragende Draht war in einen kleinen Ansatz der Kugel eingeschmolzen und fiel zusammen mit der Axe der

Hohlspiegelkathode. Die Anode war durch eine ebene Aluminiumscheibe dargestellt, und lag seitlich in der durch die Axe des Hohlspiegels und die Normale des Platinspiegels gehenden Ebene.

Die Anode war abgeleitet, der Spiegel isolirt. Die Bestäubung begann 30 sec nach Stromschluss und dauerte 90 sec. In der Bestäubungsfigur fällt vor allem eine von Schwefelpulver erfüllte Fläche auf, deren Form dem Querschnitt eines auf einem Uhrglase ruhenden Quecksilbertropfens ähnelt. Diese Fläche grenzt nach aussen scharf an einen zunächst staubfreien Raum; in einigem Abstand folgt eine zweite Grenzlinie, jenseits welcher die Glasfläche wieder mit Schwefelpulver bedeckt ist. Der von gelbem Staube freie Ring hat auf der Seite des Spiegels eine grössere Breite als auf der Seite der Kathode. Durch die Mitte dieses breiteren Theiles zieht sich ein scharfer rother Strich. Die Lage des von gelbem Staube freien Ringes kann durch die Annahme erklärt werden, dass er von Randstrahlen der hohlspiegelförmigen Kathode erzeugt wird, welche an dem Platinspiegel in regelmässiger Weise reflectirt worden sind. Weiter unten auf der Oberfläche der Röhre findet sich ein intensiv rother Streifen; er liegt in der Ebene des Platinspiegels auf seiner von der Kathode abgewandten Seite. Der Streifen liegt so, wie wenn er von Kathodenstrahlen hervorgebracht wäre, die von dem Spiegel streifend reflectirt wären. Der von dem Mennigepulver gebildete Streifen ist umgeben von einer von Staub freien Zone; in dieser wird durch die Glaswand hindurch die von hinten in die Röhre eingeführte Anode sichtbar. Die staubfreie Zone hängt auf der linken Seite mit dem früher besprochenen staubfreien Ring zusammen. Im übrigen schiebt sich zwischen den Ring und die Zone eine mit Schwefelstaub bedeckte Fläche; hinter ihr liegt der Platinspiegel, dessen Fläche gegen den Zuleitungsdraht unter einem Winkel von etwa 45° geneigt ist.

6. Die *Resultate* der mit den vier besprochenen Röhren erhaltenen Versuche lassen sich in folgender Weise zusammenfassen.

a) Der Kathode gegenüber bildet sich auf der Wand des Glases ein Ring, welcher den nach aussen hin sich verbreitenden gelben Staub scharf begrenzt. Der Ring fällt etwa an die Grenze des hell fluorescirenden Theiles der Glaswand.

b) Nur innerhalb dieses Ringes finden sich — von der Eintrittsstelle der Kathode und dem Schnitte ihrer Fläche mit der Glaswand abgesehen — rothe Stellen, d. h. solche, welche das positiv elektrische Mennigepulver anziehen.

c) Die Vertheilung des rothen Pulvers im Inneren des Ringes ist ungleichmässig, wahrscheinlich infolge der ungleichmässigen Beschaffenheit der Kathodenfläche. Gegen den gelben Ring hin ist der rothe Staub stets scharf begrenzt; die zwischen dem rothen Staub und dem Ringe liegende Glasfläche ist von Staub ganz frei.

d) Zwischen die roth bestäubten Stellen im Inneren des Ringes schieben sich, nach aussen hin, häufig gelb bestäubte Stellen ein. Diese Stellen können sich der durch den Ring begrenzten äusseren Bestäubung bis auf einen sehr kleinen Abstand nähern, in der Regel tritt aber in dem schmalen Bande, welches die äussere Bestäubung von inneren gelben Staubmassen trennt, ein scharfer Streifen rothen Staubes auf.

e) Im Inneren des gelben Ringes überwiegt der rothe Staub bei abgeleiteter Anode; aber auch bei abgeleiteter Kathode nimmt die Menge des rothen Staubes mit der Stromdauer zu.

f) Verlängert man die Kathodenebene bis zum Schnitt mit der Glasfläche, so bildet die Schnittlinie die Axe eines etwa 1 cm breiten Ringes, der von Staub beinahe ganz frei ist. Von der Eintrittsstelle des die Kathode tragenden Drahtes bis zu diesem Ringe bedeckt sich das Glas mit rothem Staube. In dem Ringe selbst tritt meist noch eine feine, in sich geschlossene rothe Linie auf, welche von Randstrahlen der Kathode erzeugt wird.

g) Bei abgeleiteter Anode bildet der Schwefelstaub an der Oberfläche des Glases scharf begrenzte Bänder, welche von der Anode einerseits nach der Kathode, andererseits nach dem ihr gegenüber auf der Glaswand entstehenden negativen Fleck hingehen. Es liegt nahe, diese Bänder mit Strömungen in Verbindung zu bringen, durch welche die Elektricität der Anode mit den entgegengesetzten Elektricitäten der Kathode und des Fluorescenzfleckes sich ausgleicht, der letztere würde dabei die Rolle einer zweiten Kathode spielen.

h) Metalldrähte und Bleche, welche in den Weg der Kathodenstrahlen gestellt werden, geben auf der von den Strahlen getroffenen Glaswand elektrische Schatten, welche von scharf begrenzten Streifen rothen Staubes umgeben sind; der Schatten bleibt entweder ganz frei von Staub, oder er bedeckt sich in der Mitte mit Schwefelstaub.

i) Wenn ein Metallblech von Kathodenstrahlen getroffen wird, so entsteht auf der Glaswand und zwar auf der von der Kathode abgewandten Seite eine intensiv rothe Linie von etwa 1 mm Breite; ihre Länge entspricht dem Durchmesser des Bleches. Die Sache verhält sich so, wie wenn von der Kathode ausgehende Strahlen von dem Bleche streifend reflectirt worden wären.

k) Ein von Kathodenstrahlen getroffenes isolirtes Metallblech erzeugt aber ausserdem auf der gegenüberliegenden Glaswand einen Ring von derselben Art, wie er bei einer gewöhnlichen Röhre der Kathode gegenüber auftritt. Die Lage des Ringes macht es wahrscheinlich, dass er durch eine regelmässige Reflexion der Kathodenstrahlen an der Oberfläche des Spiegels erzeugt wird.

(Eingegangen 13. October 1899.)

6. *Nachweis der in den Glasthränen vorhandenen inneren Spannungen mit Hülfe des polarisirten Lichtes, ein Vorlesungsversuch; von K. Mack.*

Dass rasch gekühlte Glasplatten infolge innerer Spannungen die Eigenschaft der Doppelbrechung besitzen, und dementsprechend Farbenerscheinungen im polarisirten Licht zeigen, pflegt in den Vorlesungen über Optik mittels Projection nachgewiesen zu werden. Der Planparallelismus dieser Glaspräparate gestattet, dass die Projection in derselben Weise ausgeführt werden kann, wie bei Krystallplättchen, die von parallelen, senkrecht auffallenden Strahlen durchsetzt werden. Es liegt nahe, bei denjenigen Glaspräparaten, die durch die Stärke ihrer inneren Spannungen besonders berühmt sind, nämlich den Glasthränen oder Bologneser Tropfen, ebenfalls auf optischem Wege das Vorhandensein dieser Spannungen zu veranschaulichen. Bei der Ausführung dieses Gedankens stösst man indessen zunächst auf die Schwierigkeit, dass infolge des mangelnden Planparallelismus der Begrenzungsflächen der Glasthräne die die letztere treffenden Lichtstrahlen sämmtlich zur Seite gelenkt werden, sodass das Projectionsbild der Thräne als schwarzer Schattenriss sich darstellt. Diesem Uebelstande kann jedoch leicht dadurch abgeholfen werden, dass die Glasthräne in ein kleines, mit planparallelen Wandungen versehenes Glasgefäss gebracht wird, das eine Flüssigkeit von demselben Brechungsexponenten enthält, wie ihn die Glasthräne im Mittel besitzt.[1]) Unter diesen Umständen stellt sich die Thräne in der Projection, wenn zunächst die Nicols aus dem Gang der Strahlen ausgeschaltet werden, nicht mehr als schwarze Silhouette, sondern als vollkommen durchsichtiger, nahezu unsichtbarer, farbloser Körper dar, dessen Umrisse nur ganz zart angedeutet sind, während die meistens in den Glasthränen eingeschlossenen kleinen Hohlräume als schwarze,

1) Die hierbei zu Grunde liegende Methode der Verbringung eines zu untersuchenden durchsichtigen Körpers in ein flüssiges Medium von gleicher Brechbarkeit stammt von Biot (Mémoire sur la polarisation lamellaire p. 586 u. 683. 1841). Vgl. auch C. Klein, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, Math.-phys. Klasse, p. 347. 1890, p. 91. 1895.

scharfbegrenzte Flecken hervortreten. Werden jetzt die beiden Nicols eingeschaltet, so ist das Bild der Glasthräne, am schönsten bei gekreuzten Nicols, mit leuchtenden Farben bedeckt, die, wie bei doppelbrechenden Krystallen oder rasch gekühlten Glasplatten, an die Farben exotischer Schmetterlinge oder von Pfauenfedern erinnern. In dieser Form eignet sich der Versuch in hohem Maasse als Vorlesungsversuch.

Als diejenige Flüssigkeit, welche angenähert denselben Brechungsexponenten wie die Glasthränen besitzt, empfiehlt sich am meisten das Cedernholzöl. Ich habe diese Flüssigkeit von der Firma E. Merck in Darmstadt in solcher Beschaffenheit erhalten, dass ich sie unmittelbar für die Versuche verwenden konnte; alle Glasthränen, die ich untersuchte, verschwanden beim Eintauchen in die Flüssigkeit fast vollständig, und nur jene kleinen in den Thränen enthaltenen Hohlräume wiesen auf das Vorhandensein der Glaskörper hin. Statt Cedernholzöl kann man übrigens auch eine sehr leicht durch Probiren herzustellende Mischung von Schwefelkohlenstoff und Aethyläther benützen. Auch einer sehr concentrirten Lösung von Chloralhydrat in Glycerin kann man denselben Brechungsexponenten geben, den die Glasthränen besitzen; bloss treten in dieser sehr dicken Flüssigkeit bei der Projection leicht Schlierenbildungen in der Umgebung der Glasthränen auf.

Die Projection lässt sich leicht sowohl in parallelem, als auch in schwach convergentem polarisirtem Lichte ausführen. Die entweder vom Heliostaten oder von einer Bogenlampe gelieferten parallelen Lichtstrahlen treffen, wenn es sich um den ersten der vorhin genannten Fälle handelt, zunächst eine Sammellinse von grossem Durchmesser und 20—30 cm Brennweite; in der Nähe des Brennpunktes befindet sich das polarisirende Nicol. Eine zweite ähnliche Linse macht die Strahlen wieder parallel, die jetzt durch das die Flüssigkeit mit der Glasthräne enthaltende Gefäss hindurchgehen. Die Glasthräne wird mittels eines an ihrem dünnen Ende befestigten Fadens so aufgehängt, dass sie ganz in die Flüssigkeit untertaucht. Es folgt eine dritte Convexlinse, die das Bild auf dem Projectionsschirm entwirft; nahe ihrem Brennpunkt ist das analysirende Nicol angebracht. Soll das Verhalten im schwach convergenten Licht gezeigt werden, so geht man mit der Glasthräne zwischen den

Polarisator und die zweite Linse; statt der zweiten und dritten Linse genügt dann bei entsprechender Verschiebung eine einzige.

Es empfiehlt sich, namentlich bei Benützung von Cedernholzöl, die Dicke der die Glasthräne enthaltenden Flüssigkeitsschicht möglichst gering zu wählen, um die Absorption des Lichtes im Oel möglichst zu verkleinern. Ein Gefäss, in welchem der Abstand der zwei planparallelen Glaswände 1—2 cm beträgt, genügt vollkommen.

Die Farbenerscheinuugen, die man im parallelen und im schwach convergenten polarisirten Licht erhält, sind nicht erheblich verschieden. Der Rand der Glasthräne ist im allgemeinen nach innen von farbigen Streifen begleitet, welche da, wo im Inneren Hohlräume sich befinden, Störungen erfahren. Diese Streifen drängen sich nach dem Schwanz der Glasthräne immer mehr zusammen. Das dicke Ende der letzteren erinnert an den Anblick, den eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Platte eines einaxigen Krystalles im convergenten Licht darbietet. Insbesondere nimmt man meistens bei gekreuzten Nicols ein schwarzes, bei parallelen ein weisses Kreuz wahr. Bei vereinzelten Exemplaren habe ich auch bei entsprechender Stellung der Nicols schwarze Hyperbeln erhalten. Diejenigen Glasthränen, in welchen die Anordnung der Hohlräume eine einigermaassen regelmässige ist, zeigen auch die farbigen Streifen am regelmässigsten.

Selbstverständlich können die Farbenerscheinungen auch subjectiv in einem gewöhnlichen Polarisationsapparat beobachtet werden. Ist die Axe des letzteren vertical, so legt man die Glasthräne in ein Glasgefäss mit ebenem Boden und übergiesst sie mit einer Schicht von Cedernholzöl.

Es erscheint nicht ausgeschlossen, dass eine genauere Untersuchung dieser Farbenerscheinungen Schlüsse auf die molecularen Verhältnisse und den Charakter der Spannungen im Inneren der Glasthränen ziehen, und sich zur Prüfung bez. Verification der in dieser Hinsicht aufgestellten Theorien[1]) verwenden liesse.

Hohenheim, im October 1899.

---

1) Vgl. L. Dufour, Compt. Rend. **68.** p. 398. 1869 und Pogg. Ann. **137.** p. 640. 1869; De Luynes, Ann. de chim. et de phys. **30.** p. 229. 1873.

(Eingegangen 17. October 1899.)

7. *Ueber longitudinale Töne von Kautschukfäden;* *von Viktor v. Lang.*

(Aus den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Mathem.-naturw. Klasse; Bd. CVIII. Abth. IIa. Juli 1899.)

Ich habe vor nicht langer Zeit Bestimmungen der Transversaltöne von Kautschukfäden mitgetheilt.[1]) Es waren damals an diesen Fäden auch schon einzelne Bestimmungen ihrer longitudinalen Töne vorgenommen worden, dieselben erwiesen sich aber als zu unvollständig, um veröffentlicht zu werden. Ich habe daher diese Versuche später noch fortgesetzt und bin, obwohl anfangs die Sache Schwierigkeiten hatte, doch zu ziemlich übereinstimmenden Resultaten gelangt.

Als Material für diese Versuche dienten hauptsächlich Stücke von einem ähnlichen Faden mit quadratischem Querschnitte (1,5 mm Seitenlänge), wie er schon zur Bestimmung der Transversaltöne verwendet worden war. Auch war die Versuchsanordnung dieselbe wie früher, nur dass der Faden durch Streichen mit dem nassen Finger ins Tönen gebracht wurde. Während einer Versuchsreihe wurde wieder der Faden niemals entlastet und dann immer zu grösseren Belastungen fortgeschritten. Uebereinstimmende Resultate wurden aber nur erhalten, wenn dem Faden nach jeder Erhöhung der Belastung viele Stunden Zeit zur Ausfädelung gelassen wurde. Je nach der Grösse der Belastung waren so 6—24 Stunden nöthig, damit die Beobachtungen keine wesentlichen Aenderungen mehr zeigten.

Es wurde nun jedesmal der transversale Ton (n) und der longitudinale (n_1) am Monochord bestimmt. Die Bestimmung des letzteren war freilich bei niederer Spannung sehr schwierig, da dann kaum ein ordentlicher Ton zu hören ist. Auch sonst kann man leicht Täuschungen ausgesetzt sein über die richtige Octave und ob man es nicht mit einem Obertone zu thun hat.

1) V. v. Lang, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Abth. IIa, 107. p. 1041. 1898; Wied. Ann. 68. p. 335. 1899.

Das Verhältniss n_1/n der beiden Töne ist natürlich durch das Verhältniss der am Monochord bestimmten Längen gegeben und wenigstens von Fehlern, welche die Tonbestimmung der Monochordsaite betreffen, frei. Ich gebe nun die beobachteten Werthe dieses Verhältnisses für sechs Stücke des quadratischen Fadens, wie sie für verschiedene Belastungen S ermittelt wurden.

	Fadenlänge in Millimeter						n_1/n
S	50	56	62	64	68	76	Mittel
70 g	1,51	—	—	1,51	1,47	—	1,50
100	—	1,26	1,36	1,48	—	—	1,37
140	1,50	1,46	1,44	1,46	—	1,62	1,50
190	—	2,06	1,75	1.98	—	—	1,93
240	2,87	—	2,84	2,89	2,93	2,83	2,87
340	3,36	—	—	—	—	3,26	3,31
440	3,72	—	—	—	—	3,70	3,71
540	3,69	—	—	—	—	3,89	3,79
640	3,80	—	—	—	—	—	3,80
740	3,91	—	—	—	—	—	3,91

Aus dieser Tabelle geht wohl unzweifelhaft hervor, dass das Verhältniss n_1/n unabhängig von der Länge des Fadens ist, wenigstens innerhalb der Grenzen dieser Untersuchung. Bemerkenswerth ist das Minimum bei 100 g Belastung; es ist dies die Stelle, wo der Transversalton ein relatives Maximum hat, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht, welche die beobachteten Längen (l) und Transversaltöne (n) gleich in Mittelwerthen für eine anfängliche Länge von 100 mm giebt.

S	l	n	n'	$n - n'$
0 g	100 mm	—	—	—
70	177	75,5	76,6	− 1,1
100	232	78,2	77,9	+ 0,3
140	327	76,5	76,7	− 0,2
190	461	75,4	74,7	+ 0,7
240	563	75,2	75,1	+ 0,1
340	651	82,6	82,2	+ 0,4
440	697	89,3	89,5	− 0,2
540	735	96,1	96,0	+ 0,1
640	764	102,5	102,1	+ 0,4
740	787	107,8	107,8	+ 0,0

Die vierte Columne der vorhergehenden Tabelle giebt die nach der empirischen Formel

$$n' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{G}\,\frac{S+41}{l+62}} = 112{,}43\sqrt{\frac{S+41}{l+62}}$$

berechneten Werthe der Transversaltöne. Das Gewicht des Fadens (0,194 g für 100 mm Länge) war zwar dasselbe wie das des ähnlichen Fadens, der zu den in der früheren Abhandlung angegebenen Beobachtungen gedient hatte, für die Constanten der empirischen Formel mussten aber doch andere Werthe gewählt werden, um die Differenzen $n - n'$ nicht zu sehr anwachsen zu lassen. Der Grund hiervon mag darin liegen, dass die beiden Fäden zwar von derselben Quelle, aber zu verschiedenen Zeiten bezogen wurden. Auch war die Temperatur bei beiden Beobachtungsreihen nicht dieselbe.

Was nun den theoretischen Werth des Verhältnisses n_1/n betrifft, so hat man nach der Taylor'schen Formel für n und mit demselben Grade der Annäherung für n_1

$$n_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \qquad n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{S}{\varrho q}},$$

wo E der Elasticitätscoefficient, ϱ die Dichte und q der Querschnitt des Fadens ist. Hieraus würde

$$\frac{n_1}{n} = \sqrt{\frac{qE}{S}}$$

folgen. Versucht man nun, von der anfänglichen Länge (100mm) ausgehend mit den Zahlen der letzten Tabelle die Grösse qE zu ermitteln und hiermit aus der letzten Formel das Verhältniss n_1/n zu rechnen, so erhält man eine ganz ungenügende Darstellung der Beobachtungen.

Die Uebereinstimmung wird dagegen recht gut, wenn man durch besondere Versuche die Grösse qE aus der Verlängerung (λ) ermittelt, die bei der gerade stattfindenden Belastung (S), ohne Rücksicht auf diese, durch ein kleines Zulagegewicht σ hervorgebracht wird. Setzt man also

$$l + \lambda = l\left(1 + \frac{\sigma}{qE}\right), \qquad qE = \frac{l}{\lambda}\,\sigma,$$

so wird

$$\frac{n_1}{n} = \sqrt{\frac{l}{\lambda}\cdot\frac{\sigma}{S}}.$$

Zugleich mit den Beobachtungen von l, n, n' wurden daher immer auch solche ausgeführt, welche die Ermittelung von σ und λ betrafen. Hierzu wurde die Belastung G um 1—5 g vermehrt und die bewirkte Verlängerung des Fadens mit dem Kathetometer gemessen. Das Zulagegewicht wurde so klein gewählt, dass nach dessen Entfernung der Faden genau auf die ursprüngliche Länge zurückging. Die so ermittelten Werthe von $E q$ nehmen nach Vermehrung der Gesammtbelastung anfangs nicht unbeträchtlich zu, nähern sich aber einer bestimmten Grösse, die in der früher angegebenen Zeit wohl meist erreicht worden sein dürfte.

Da die an den verschiedenen Fäden beobachteten Werthe von λ hinreichend übereinstimmen, gebe ich in der folgenden Tabelle gleich die Mittel der auf die Länge von 100 mm und $\sigma = 1$ g reducirten Werthe von λ. Die letzte Columne giebt dann die mit diesen Zahlen nach der letzten Formel berechneten Werthe von n_1/n.

	λ	n_1/n
70 g	1,492 mm	1,30
100	1,835	1,12
140	1,790	1,14
190	0,647	1,94
240	0,289	2,85
340	0,161	3,45
440	0,109	3,81
540	0,092	8,35
640	0,076	3,96
740	0,066	4,00

Die Vergleichung der letzten Zahlenreihe mit den früher angegebenen, durch directe Beobachtung ermittelten Werthen des Verhältnisses n_1/n lehrt, dass, von der Belastung 190 g angefangen, die Uebereinstimmung eine vollständige ist. Für kleinere Belastungen bleiben die gerechneten Werthe allerdings etwas hinter den beobachteten zurück, obwohl sie denselben Gang zeigen. Die Uebereinstimmung ist am schlechtesten in der Gegend, wo der Transversalton sein relatives Maximum hat.

Die vollkommene Uebereinstimmung bei höheren Belastungen ist jedenfalls nicht uninteressant, besonders da dies auch für andere Kautschukfäden zu gelten scheint, wie einige

Versuche an einem Stücke des runden Fadens lehren, welchen ich auch schon in der früheren Mittheilung erwähnte. Ich fand nämlich an dem Stücke, dessen anfängliche Länge 104 mm betrug, bei 440 g Belastung nach 24 Stunden

$$l = 311 \text{ mm}, \quad n_1 / n = 1{,}67.$$

Die Vermehrung der Belastung um 5 g brachte eine Verlängerung von 1,35 mm hervor, woraus für das letzte Verhältniss 1,62 folgt.

Nachdem die Belastung auf 640 g erhöht worden war, wurde nach 24 Stunden

$$l = 397 \text{ mm}, \quad n_1 / n = 2{,}03.$$

Jetzt bewirkten 5 g Zulagegewicht eine Verlängerung von 0,77 mm, was den Werth 2,06 giebt.

Die Uebereinstimmung ist also auch hier eine vollständige.

(Eingegangen am 27. October 1899.)

---

8. *Zur Thermodynamik; von K. Wesendonck.*

Clausius hat im Jahre 1867 in einem gemeinverständlichen Vortrage[1]) über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie die Hoffnung ausgesprochen, man werde diesen bald ebenso einfach und natürlich finden wie den Satz von der Erhaltung der Energie. Dieser Wunsch hat sich nicht ganz erfüllt. Wenn auch die Mehrzahl der Forscher den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik vollständig anerkennt, so hat es doch auch nicht an energischer Kritik der ganzen Lehre wie einzelnen Theilen derselben gegenüber gefehlt. Verfasser erlaubt *sich in dem Folgenden, ohne auf Vollständigkeit Anspruch erheben zu wollen, eine Reihe der hierbei zu Tage getretenen Differenzpunkte zu besprechen und speciell hinzuzuweisen auf die noch heute bestehende Berechtigung und Geltung der Anschauungen von Clausius*, wobei jedoch Beweise aus der sogenannten kinetischen Wärmetheorie nicht berücksichtigt werden sollen.

Clausius ist sich des hypothetischen Charakters mancher seiner Ausführungen bekanntlich stets bewusst gewesen, und hat strenge zu scheiden gesucht zwischen dem, was er als gesicherten Besitz der Wissenschaft ansah, und dem, was er nur für wahrscheinlich hielt[2]), wie z. B. die kinetische Natur der Wärme. Den zweiten Hauptsatz in seiner Anwendung auf Kreisprocesse sah er allerdings als streng mathematisch bewiesen an[3]), soweit man seinen Grundsatz gelten lasse. Wir wollen in Zukunft den berühmten Ausdruck

$$\int \frac{dQ}{T} \gtreqless 0$$

einfach als die Clausius'sche Ungleichung bezeichnen, *sie wurde von Clausius stets in den Vordergrund gestellt.* Bertrand

1) Im Druck erschienen bei Vieweg & Sohn. Braunschweig 1868.

2) Vgl. R. Clausius, Ges. Abhandl. 1. p. 242—244, p. 309, p. 310, Anm. 1. Vorrede p. VI. 1864; Mech. Wärmeth. 3. p. 1. 1889; Pogg. Ann. 142. p. 460. 1871.

3) l. c. p. 243.

hingegen sah 1887 in seiner Thermodynamik eben dieses Theorem weder als sicher noch als wahrscheinlich an, und Hr. Karl Neumann[1]) findet 1891, dasselbe sei weder von Clausius noch von einem anderen Autor in deutlicher Weise ausgesprochen worden. Doch folge aus den Clausius'schen Untersuchungen ein ganz bestimmter wichtiger Satz, den Hr. Neumann aber mehr in Anlehnung an W. Thomson'sche Betrachtungen zu beweisen sucht. Poincaré[2]) hat bekanntlich gegenüber Bertrand die von Clausius erhaltenen Ergebnisse vertheidigt, durch Betrachtungen, die dessen Ausführungen erheblich näher stehen, als die Neumann'schen, und während dieser das Princip der Vermehrung der Entropie als sehr bedenklich bezeichnet[3]), gelangt der französische Mathematiker zu eben diesem durch Betrachtung eines Kreisprocesses, welche Schlussweise übereinstimmend auch von mehreren anderen Forschern angewendet wird.[4]) Clausius selbst hat leider die Lehre von der Entropie nicht eingehend erörtert, sondern mehr nur angedeutet, es ist wohl dadurch hauptsächlich bedingt worden, dass bis in die neueste Zeit in den Lehrbüchern, selbst eingehenden Specialwerken, wie Rühlmann's Handbuch der mechanischen Wärmetheorie, nur so wenig genügende Auskunft über die Entropie zu finden war.[5]) Den Begriff der Entropie hat Clausius, nachdem er bereits zuvor deren wesentliche Eigenschaften erkannt[6]), erst 1865 ein-

---

1) Karl Neumann, Leipziger Berichte, Math.-phys. Klasse 1. p. 76. 1891.

2) H. Poincaré, Thermodynamik. Deutsch von Jäger u. Gumlich 1893.

3) Karl Neumann, l. c. p. 135.

4) Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Theorie d. Wärme. Herausgegeben von M. Planck p. 69. 1894; A. Winkelmann, Handbuch der Physik (II) 2. p. 436. 1896; P. Duhem, Mécanique chimique 1. p. 83. 1897.

5) Vgl. P. Duhem, Mécanique chimique 1. p. 4. 1897, ferner E. Buckingham, Phys. Rev. 4. p. 39. 1896.

6) R. Clausius, l. c. 1. p. 150. 1854 wird nachgewiesen, dQ/T müsse ein vollständiger Differential sein für umkehrbare Processe, l. c. 2. p. 31 wird $(dQ/T) = dS$ gesetzt und der Ausdruck

$$S = S_0 + \int \frac{dQ}{T}$$

geführt[1]), und zwar definirt er sie als Summe der Verwandlungswerthe des Wärmeinhaltes und der augenblicklich stattfindenden Anordnung der Bestandtheile. Entsprechend erscheint die Energie als Summe der Wärme und Werkinhaltes.[2]) Weiterhin[3]) wird dann die Lehre von der Vermehrung der Entropie eben nur angedeutet, da eine vollständige Behandlung dieses Gegenstandes nicht am Orte sein würde. „*Der zweite Hauptsatz in der Gestalt, welche ich ihm gegeben habe,*“ heisst es wörtlich, „*sagt aus, dass alle in der Natur vorkommenden Verwandlungen in einem gewissen Sinne, welchen ich als den positiven angenommen habe, von selbst, d. h. ohne Compensation geschehen können, dass sie aber in entgegengesetztem, also negativem Sinne nur in der Weise stattfinden können, dass sie durch gleichzeitige positive Verwandlungen compensirt werden.*“ Daraus folge dann, das Weltall nähere sich ohne Unterlass einem Grenzzustande, der sich durch die oben erwähnte Entropie genannte Grösse einfach und bestimmt charakterisiren lasse. Die Betrachtung müsse aber noch auf strahlende Wärme und auf solche Bewegungen, die nicht unter dem Namen Wärme zu begreifen sind, ausgedehnt werden. Bei Bewegung einer ponderablen Masse, wenn sie nur so gross ist, dass ein Atom dagegen als verschwindend klein betrachtet werden kann, sei der Verwandlungswerth alsdann verschwindend klein gegen deren lebendige Kraft[4]), woraus folge, dass

---

abgeleitet; weiter dann (l. c. p. 40 u. 41) wird gegeben (im wesentlichen aber schon l. c. **1.** p. 163. 1856)

$$N = S - S_0 - \int_{\text{irr.}} \frac{dQ}{T},$$

wo $N \geqq 0$ und irr. bedeutet, das Integral beziehe sich auf einen irreversibeln Vorgang.

1) l. c. p. 34. Energie und Entropie werden mathematisch behandelt l. c. p. 35 ff. und Zusatz dazu.

2) Die Bedeutung von Werk erläutert Clausius, Ges. Abhandl. **1.** p. 283 und obengenannter Vortrag p. 15.

3) l. c. p. 42 ff.

4) Der Sinn dieser Angaben von Clausius ist wohl der folgende: Unter der absoluten Temperatur ist zu verstehen die mittlere lebendige Kraft der kleinsten, sich selbstständig bewegenden Körpertheilchen. Wenn ein solches und eine bewegte endliche Masse gleiche Temperatur haben sollen, so müssen beide gleiche kinetische Energie besitzen und das ergebe einen enorm hohen Wärmegrad, der alsdann ja in den Nenner des Verwandlungswerthes der Massenbewegung käme.

bei Umsatz der Bewegung in Wärme durch passive Widerstände der Aequivalenzwerth der dabei eintretenden uncompensirten Verwandlung einfach durch den Verwandlungswerth der erzeugten Wärme dargestellt werde. Die lebendige Kraft trägt also direct so gut wie nichts zur Entropie bei, und auch die Ungleichung gilt noch, wenn auch das betreffende System nicht immer in Ruhe befindlich ist, während der Kreisprocess ausgeführt wird. *Hierüber war sich Clausius jedenfalls klar, was Hrn. Duhem*[1]) *gegenüber bemerkt sein möge.* Der Verwandlungswerth der Massenbewegung ist hiernach nicht völlig gleich Null[2]), es lässt sich ja nach Verfassers Ansicht auch nicht von vornherein behaupten, dass mechanische Vorgänge vollständig reversibel sind, auch abgesehen von passiven Widerständen. Alle mechanischen Systeme sind ja doch nur Theile grösserer solcher, mit denen sie schon durch sogenannte Fernwirkungen in Wechselwirkung stehen. Praktisch sind diese Einflüsse aber wohl fast immer als verschwindend anzusehen.[3]) Die strahlende Wärme hat Clausius nicht näher mehr betrachtet[4]), nur vorläufig wolle er angeben, dass bei richtiger Berechnung der von ihm Entropie genannten Grösse für das ganze Weltall, man zu dem Satze gelange, *die Entropie des Weltalls strebt einem Maximum zu.*

Das hierin ausgesprochene Princip der Vermehrung der Entropie gelangte zur weiteren Verbreitung in der Wissenschaft zunächst durch die geistreichen Anwendungen von Horstmann[5]), dann besonders die grossen so hervorragenden Arbeiten von Gibbs[6]), der sich anscheinend direct an Clausius anlehnt[7]), ferner seit 1879 durch Hrn. Planck, welcher indessen bei der Herleitung anders als Clausius[8]) verfahren zu

---

1) P. Duhem, Leonville's Journal **10.** p. 229. 1894.

2) Vgl. ferner R. Clausius, Mech. Wärmetheorie **2.** p. 312—314. 1879.

3) Vgl. M. Planck, Thermodynamik p. 77. § 113. 1897.

4) Abgesehen natürlich l. c. **1.** p. 322 und Pogg. Ann. **121.** p. 1. 1864.

5) Vgl. insbesondere Liebig's Ann. **170.** p. 192. 1873.

6) J. W. Gibbs, Thermodyn. Studien. Deutsch von Ostwald 1892.

7) Vgl. l. c. p. 66 die beiden Sätze an der Spitze seiner grossen Abhandlung.

8) M. Planck, Ueber den zweiten Hauptsatz, München 1879, ferner Thermodynamik 1897. Der daselbst gegebene Beweis, die Entropie könne nicht verkleinert werden, ohne entsprechende Veränderungen in anderen

sollen glaubte, ohne dass indessen der nach Clausius sich fast von selbst ergebende Begriff der Entropie als einer den Zustand des betrachteten Systemes charakterisirenden Grösse dadurch plausibler geworden sein dürfte.[1]) Bei Planck wird derselbe mit einem Male für vollkommene Gase aufgestellt und dann auf einigen Umwegen allgemein auf beliebige Körper übertragen, die Entropie erscheint dabei wie eine von aussen künstlich in die Betrachtungen hineingetragene Grösse. In hohem Maasse fördernd und aufklärend für die Erkenntniss der Bedeutung des zweiten Hauptsatzes in seinen Consequenzen wirkten die klassischen Arbeiten von v. Helmholtz[2]), ferner kommen hier in Betracht die ausgedehnten Untersuchungen von Hrn. Duhem seit dem Jahre 1886. Dieser Forscher anerkennt zwar den zweiten Hauptsatz und seine Folgerungen, auch das Princip der Vermehrung der Entropie, aber er sieht die Betrachtungen[3]) von Clausius nicht als einen Beweis an, meint vielmehr, die Grundlagen des ganzen Gebäudes bedürften einer Revision.[4]) Von grossem Interesse erscheinen die eingehenden Untersuchungen über umkehrbare Vorgänge, die als continuirliche Folgen von Gleichgewichtszuständen aufgefasst

---

Körpern zurückzulassen, erscheint nicht unbedingt plausibel, indem die dabei nöthige isentropische Veränderung bedeutenden Arbeitsaufwand veranlassen kann, sodass unter Umständen die betreffende periodisch functionirende Maschine gar nicht Arbeit leistet, woraus ja der Widerspruch mit Thomson's Grundsatz gefolgert wird. Ferner muss eine isentropische Aenderung immer als möglich vorausgesetzt werden, was doch nicht ohne weiteres angenommen werden kann. (Thermodynamik p. 86 u. 93.) Fast einfacher und einleuchtender dürfte es sein, grundsätzlich zu erklären, ein von selbst verlaufender Process könne nicht ohne Compensation rückgängig gemacht werden. Der Ausdruck $d\,U + p\,d\,v$ nach Planck für das Differential der Entropie ist auch wohl zu eng, da doch überhaupt reversibles Werk zu rechnen ist nicht nur $p\,.\,d\,v$. Vgl. die Arbeiten von v. Helmholtz, Duhem, Voigt, Buckingham.

1) Vgl. G. Helm, Energetik p. 193. 1898.

2) H. v. Helmholtz, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 2. Februar und 27 Juli 1882, ferner Verhandl. d. Physikal. Gesellsch. zu Berlin **6.** p. 98—101 u. p. 112—114. 1887, wo v. Helmholtz den zweiten Wärmesatz gegen Pictet vertheidigt.

3) P. Duhem, Méc. chim. **1.** p. 73. 1897.

4) P. Duhem, Journ. de mathém. pure et appl. (4) **8.** p. 268. 1892; (4) **9.** p. 334. 1893; (4) **10.** p. 203. 1894.

werden[1]) und über die Bedingungen, unter welchen man eine beliebige Veränderung in eine reversible verwandeln kann, was nicht immer zu erreichen sei.[2]) Kann man aber von einem Zustande A zu einem zweiten B ein System durch umkehrbare Veränderungen bringen, so zeigt Duhem durch ziemlich langwierige Betrachtungen, dass dann mit grosser Allgemeinheit gilt (nicht völlig allgemein), jedes Integral $\int dQ/T$ hat den selben Werth für jede solche reversible Transformation von A nach B. Zum Beweise werden zwei Grundsätze verwendet. die denen von Clausius und Thomson entsprechen. Die sogenannten uncompensirten Verwandlungen erscheinen lediglich als Folgen der Arbeit passiver Kräfte, ist sie Null, *ist das System ohne Viscosität*, so gilt auch für nicht umkehrbare Kreisprocesse noch

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Zum Beweise der Clausius'schen Ungleichung muss aber noch eine Annahme über die sogenannte wirksame Arbeit eingeführt werden. Diese kommt also zu den Grundsätzen hinzu, was für die absolute Strenge von Duhem's Beweis nicht gerade spricht. Wie Verfasser scheinen will, wird mit Recht *die Clausius'sche Ungleichung als der allgemeinste Ausdruck des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik* angesehen.[3]) Das Princip der Vermehrung der Entropie[4]) und seine Consequenzen, ebenso wie die sogenannten thermodynamischen Functionen[5]) ergeben sich ja aus jener Ungleichung, die für endliche, wie unendliche kleine Processe besteht. Hr. Duhem glaubt ferner, für Erscheinungen, wie die der Reibung der sogenannten falschen chemischen Gleichgewichte etc., die bisherige klassische Thermodynamik erweitern zu sollen durch Einführung gewisser Ungleichungen, wie sie in der Mechanik für die Probleme der Reibung bereits bestehen.[6]) *Ein System, welches unter solchen*

1) Die Umkehrung ist indessen nicht immer zulässig, wie die Hysteresis zeigt.

2) Z. B. nicht bei unstationären Strömen und bei Elektrolyten, die durch einen Strom zersetzt werden.

3) P. Duhem, Méc. chim. 1. p. 79. 1897.

4) Dazu müssen aber reversible Veränderungen möglich sein.

5) l. c. p. 88 u. 83.

6) P. Duhem, Méc. chim. 1. p. 204, p. 209f. 1897.

Bedingungen einen Kreisprocess beschreibt, genügt aber immer noch der Clausius'schen Ungleichung.

Wie bei v. Helmholtz die freie Energie, so tritt bei Hrn. Duhem[1]) das thermodynamische Potential in den Vordergrund, bei Hrn. Planck dagegen das Princip der Vermehrung der Entropie, als allgemeinster Ausdruck des zweiten Hauptsatzes, die einzige Form, welche sich ohne jede Beschränkung für jeden beliebigen endlichen Process aussprechen lasse.[2]) Hr. Nernst[3]) dagegen sieht die *Lehre von der freien Energie* bez. der maximalen Arbeit für ebenso allgemein an, *sie gelte für constante Temperatur, die Vermehrung der Entropie für unveränderlichen Energieinhalt.* Die gleiche Anschauung findet sich auch bei einigen anderen Forschern[4]), während eine Anzahl solcher annimmt, das Princip der Entropievermehrung bestehe, sobald ein System lediglich gegen Wärmeaustausch nach aussen hin abgeschlossen sei, sonstige Energie aber noch aufnehmen könne.[5]) Den hier zur Geltung kommenden Gegensatz verschiedener Gelehrter hat Hr. Voigt etwas näher betrachtet. Er nimmt lediglich als Resultat der Erfahrung an[6]), alle nicht umkehrbaren Kreisprocesse könnten nur Arbeit in Wärme verwandeln[7]), die daraus folgenden Schlüsse, wie z. B. der in Bezug auf Vermehrung der Entropie, litten daher an einer gewissen Unsicherheit.[8]) Eine hypothetische Erweiterung der Gleichgewichtsbedingungen der Mechanik führt zu der von Nernst vertretenen Auffassung.[9])

Diese eine sichere Orientirung in der Thermodynamik recht erschwerenden Meinungsverschiedenheiten bei hervor-

1) Leider ist hier eine eingehendere Darlegung von Duhem's Ansichten nicht angängig.

2) M. Planck, Thermodynamik p. 193. 1897.

3) W. Nernst, Theoretische Chemie p. 25 u. 29. 1898.

4) Vgl. z. B. P. Duhem, Méc. chim. 1. p. 83. 1897; A. Winkelmann, Handbuch der Physik (II) 2. p. 435. 1896.

5) Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Wärme p. 70. 1894; M. Planck, Thermodynamik p. 102. 1897.

6) W. Voigt, Compendium der theoretischen Physik 1. p. 508. 1896.

7) Dies scheint Verfasser nicht ohne weiteres identisch zu sein mit $\int (d\,Q/T) < 0$, sondern vielmehr mit $\int d\,Q < 0$.

8) l. c. p. 547.

9) l. c. p. 564 u. 565, ein strenger Beweis ist das natürlich nicht.

ragenden Forschern, lassen es wenig wunderbar erscheinen, wenn endlich die Frage gestellt wird, ob die Wärmelehre in ihrer Entwickelung nicht besser einen anderen Verlauf genommen, als geschehen, wie das Hr. Wiedeburg[1]) andeutet. Der Entropiebegriff deckt sich nach diesem Forscher mit dem alten Begriffe des Wärmeinhaltes, das Princip der Vermehrung[2]) wird nicht anerkannt, vielmehr soll auch bei nicht umkehrbaren adiabatischen Vorgängen die Entropie constant bleiben. Hr. Helm[3]) meint denn auch, es könnte in der Clausius'schen Formel

$$\text{(II)} \qquad N = S - S_0 - \int\limits_{\text{irr.}} \frac{d\,Q}{T}\,.$$

N zugleich mit den dQ verschwinden, S also constant bleiben, während man bekanntlich sonst schliesst $S - S_0 = N > 0$ in diesem Falle. Andererseits hat sich der zweite Wärmesatz und die Lehre von der Vermehrung der Entropie bewährt bei den scharfsinnigen Untersuchungen der Herren Boltzmann[4]) und Wien[5]) über strahlende Entropie, die Geltung hört nur auf nach Hrn. Wien[6]), sobald man auf die einzelnen von der Wärme erregten Schwingungen zu wirken vermag. Etwas Aehnliches zeigt sich ja auch bei molecular-kinetischen Betrachtungen.

Hat sich denn nun Clausius wirklich so sehr geirrt, wenn er seine berühmte Ungleichung als mathematisch bewiesen ansah, sind die Betrachtungen von Poincaré, Neumann, Planck etc. wirklich so wenig beweiskräftig, oder sind sie nur zum Theil zwingend, zum Theil aber der Ergänzung bedürftig? Verfasser[7]) hat vor einiger Zeit geglaubt, darauf hin-

1) O. Wiedeburg, Zeitschr. f. physik. Chem. (1) **29.** p. 27 ff. 1899; Wied Ann. **61.** p. 705—736. 1897; **62.** p. 652—679. 1897; **64.** p. 519—548. 1898.

2) l. c. p. 45.

3) G. Helm, Energetik p. 126 u. p. 318. 1898.

4) L. Boltzmann, Wied. Ann. **22.** p. 291—294. 1884.

5) W. Wien, Wied. Ann. **49.** p. 633—641. 1893; Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 25—32. 1893; Wied. Ann. **52.** p. 132—165. 1894.

6) W. Wien, Wied. Ann. **52.** p. 151. 1894.

7) K. Wesendonck, Wied. Ann. **67.** p. 444—451. 1899.

weisen zu sollen, dass die Clausius'schen Erörterungen noch zu Recht bestehen und seine Auffassung der Verwandlungswerthe nicht aufzugeben sei. Die Art und Weise, wie in der Abhandlung über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes, besonders wenn man die in verschiedenen Theilen seiner verschiedenen Arbeiten verstreuten Bemerkungen von Clausius beachtet, der Beweis geführt wird, erscheint sehr allgemeiner Natur und ist z. B. von dem Verhalten des Druckes, der Anzahl der Variablen[1]), die zur Definition eines Zustandes nöthig sind und dergleichen mehr, vollständig unabhängig. Auch bedarf es der langwierigen Betrachtungen über die Möglichkeit, mit den betreffenden Systemen umkehrbare Processe vorzunehmen, ganz und garnicht. Die arbeitende Substanz braucht ja keine selbst durchzumachen. Carnot'sche Processe, und zwar solche einfacher Art, deren theoretische Möglichkeit ja feststeht[2]), werden dazu herangezogen, um darzuthun, wie man die betreffenden vorkommenden Verwandlungen wieder rückgängig machen, bez. entgegengesetzte an ihre Stelle treten lassen kann. So vermag man jede Wärmemenge Q bez. dQ von einer bestimmten Temperatur T, die in mechanische Arbeit verwandelt worden ist, aus mechanischer Arbeit auf diese Weise wieder zu erzeugen und dafür eine gewisse Wärmemenge von niederer Temperatur in solche von höherer zu verwandeln[3]), und mutatis mutandis gilt Entsprechendes für den umgekehrten Fall. Es ist nicht einmal direct nöthig für die Beweisführung, dass die Wärmereservoire, welche beim Kreisprocess benutzt worden sind, selbst hierbei wieder zur Anwendung kommen, es fragt sich nur, ob alle eingetretenen Wärmeübergänge compensirt worden sind oder nicht und welches der Sinn der etwa übrigbleibenden uncompensirten Verwandlungen ist. Es dürfte vielleicht rathsam sein, hier einiges zu wiederholen, was sein

1) Diese Fragen spielen bei Bertrand und Poincaré eine Rolle.

2) Gegenüber den Ausführungen des Hrn. F. Wald (Zeitschr. f. phys. Chem. 1. p. 408—415. 1887 und 2. p. 523—530. 1888) sei hervorgehoben, dass Clausius genau wusste, dass die umkehrbaren Vorgänge nur einen theoretisch möglichen Grenzfall bilden; vgl. z. B. Abhdndl. 1. p. 252. 1864.

3) Ich gehe hier etwas näher auf diese Verhältnisse ein, da meine Angaben l. c. p. 448—449 vielleicht etwas zu knapp gehalten sind und missverstanden werden könnten.

Begründer über den bekannten Grundsatz: „Wärme kann nicht von selbst von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen," ausgesagt hat, da eine mangelhafte Orientirung über dessen Tragweite wohl mehrfach der Grund zu Missverständnissen des zweiten Wärmesatzes gewesen ist. Es heisst da an einer Stelle[1]): Der Grundsatz solle nicht nur für directe Wärmeübergänge gelten, sondern auch für alle anderen Vorgänge, durch welche ein Wärmeübergang zwischen Körpern verschiedener Temperatur veranlasst werden kann, wobei hervorzuheben seien die Fälle, bei denen der Wärmeaustausch durch einen oder mehrere veränderliche Körper vermittelt wird, welche bei ihren Zustandsänderungen bald Wärme aus einem Körper aufnehmen, bald Wärme an einen anderen Körper abgeben. Dabei können entgegengesetzte Wärmeübergänge, die bei demselben Processe vorkommen, sich gegenseitig compensiren. Ferner kann ein aufsteigender Wärmeübergang (d. h. von kälteren zu wärmeren Körpern) von einer bleibenden Veränderung begleitet sein, welche nicht rückgängig gemacht werden kann, ohne entweder eine bleibende Veränderung ähnlicher Art zu ergeben oder einen absteigenden Wärmestrom zu veranlassen. Hierbei ist also der aufsteigende Wärmestrom mittelbar mit einem absteigenden verbunden und jene bleibende Veränderung kann als Compensation angesehen werden. Demnach würde aber alsdann sich ergeben, dass, wenn bei einem Kreisprocesse einer der Ausdrücke

$$\sum \frac{T}{Q} \text{ bez. } \int \frac{dQ}{T} \text{ bez. } \iint \frac{dQ}{T}\,^{2)} \text{ bez. } \iiint \frac{dQ}{T},$$

welche hier in Betracht kommen, einen positiven Werth erhielte, dies gleichbedeutend wäre mit aufsteigenden, uncompensirten Wärmeströmen, die also wenigstens theoretisch durch den Kreisprocess des arbeitenden Systems veranlasst werden könnten.

Hiernach ist aber die Clausius'sche Ungleichung durch ihres Urhebers Begründung so sicher bewiesen, als der Grund-

1) R. Clausius, l. c. 1. p. 134. Anm.

2) Die Summe, das einfache, das doppelte oder das dreifache Integral, kommen hier in Betracht, je nachdem durchweg gleiche Temperatur herrscht oder Oberflächenelemente oder Körperelemente mit verschiedenen Temperaturen in Rechnung zu ziehen sind.

satz selbst es ist und bedarf keiner Hülfshypothese, wie bei Duhem. Da bei den Betrachtungen nur die von aussen zugeführte Wärme zu rechnen ist, so spielt die lebendige Kraft, welche das System etwa zu Zeiten besitzt, weiter gar keine Rolle und gilt die Ungleichung, ob diese stets Null ist oder nicht. Nur erscheint eine Beschränkung vorhanden, die aber auch von Planck [1]) und Neumann [2]) bei ihren Betrachtungen über Kreisprocesse ausdrücklich angenommen werden. Es ist nämlich immer nur von Wärmeübergängen und Verwandlungen zwischen Wärme und mechanischer Arbeit die Rede und nicht von solchen in andere Energieformen. Nun ist zuerst zu bedenken, dass man alle Systeme, die andere als mechanische Veränderungen erleiden, in den Kreisprocess mit einbeziehen kann, dann wird nach aussen nur noch eventuell mechanische Arbeit geleistet und der Satz ist dann in solcher Fassung schon von sehr grosser Allgemeinheit. Aehnlichen Beschränkungen unterliegt ja auch der Beweis von Poincaré [3]), die Reservoire zusammen mit den veränderlichen Körpern müssen dort ein isolirtes System bilden und erstere hängen in ihren Zuständen nur von zwei Variablen ab. Man kann aber gewiss auch mit Recht fragen, ob die Ungleichung noch gilt, wenn anderes Werk gethan wird, als nur mechanisches. Nur muss man alsdann streng darauf achten, dass das veränderliche System, nachdem es einen Kreis durchlaufen, genau wieder im Anfangszustande sich befinde. Denn es ist zu bedenken, dass sein Zustand von dem der Umgebung vielfach abhängt, also Aenderungen dieser genau zu beachten sind. Man denke nur an die Oberflächenenergie, an Deformationen durch sogenannte Fernwirkungen, elektrische Verschiebungen etc., Einflüsse, die unter Umständen wohl nicht vernächlässigt werden dürfen. Anstatt in mechanische Arbeit, wird dann die überschüssige Wärme in das entsprechende Werk verwandelt und es dürfte vielleicht fraglich erscheinen, ob man noch immer einen Carnot'schen Process direct oder indirect finden kann, der die betreffenden Wärmemengen aus der gewonnenen Energie wieder erzeugt, zugleich mit einem aufsteigenden äquivalenten Wärme-

1) M. Planck, Thermodynamik p. 88. 1897.

2) Karl Neumann, l. c. p. 77.

3) H. Poincaré, Thermodynamik p. 156. 1893.

strom wie das der Beweis erfordert. Kann man die gewonnene Energie vollständig (wenn auch nur theoretisch) oder fast vollständig in mechanische Arbeit umwandeln, wie das z. B. bei elektrischer Energie unter Verwendung verschwindender Stromstärke möglich ist, so gelingt es natürlich, besagte Rückverwandlung zu erreichen. Es genügt ja stets in allen solchen Fällen, wenn diese nur soweit gelingt, dass irgendwie uncompensirte aufsteigende Wärmeströme schliesslich übrig bleiben. *Durch derartige Betrachtungen lässt sich also schon zeigen, dass die Ungleichung für eine fast unbegrenzt grosse Zahl von Vorgängen gilt und es ist hiernach jedenfalls ein sehr berechtigter Wahrscheinlichkeitsschluss, anzunehmen, gleich der Verwandlung von Wärme in mechanische Arbeit sei eine solche in eine äquivalente andere Energie ebenfalls eine negative Verwandlung, die eine Compensation erfordert. Es dürfen alsdann bei einem Kreisprocesse nicht schliesslich lauter solche mit negativen Aequivalenzwerthen versehene Vorgänge als Wirkung der arbeitenden Substanz übrig bleiben.* Wie weiterhin die entstandene Energie sich in Wirklichkeit umwandelt, kommt hierbei nicht in Betracht. Entstünde etwa auf diese Weise Wärme von solcher Temperatur, dass man einen compensirenden absteigenden Wärmestrom erhalten könnte, so käme dies durchaus nicht in Rechnung, denn dies geschähe erst, nachdem der Gesammtprocess ein Stadium durchgemacht, zu dem negative Verwandlungen gehören, und ein solcher Zustand kann nach dem Grundsatz überhaupt nicht erreicht werden. Erinnert man sich des Ausspruches von Clausius, dessen wir oben Erwähnung gethan haben, dem entsprechend die Summe aller Verwandlungswerthe nie negativ sein kann, wenn keine Compensation damit verbunden ist und bedenkt, dass bei einem Kreisprocesse die vermittelnde Substanz nur Verwandlungen von Wärme bewirkt[1]), da ja ihr Zustand am Ende des Processes derselbe wie am Anfang ist, so kommt man zu dem gleichen Resultate. Nur muss man die Wahl der Vorzeichen für die Wärmemengen beachten. Geht die Wärmemenge q von einem Körper K_1 von der Temperatur T_1 zu einem solchen K_2 von der tieferen Temperatur T_2 über, so ist der Verwandlungswerth

1) Man sehe die Ausführungen weiter unten.

eines derartigen Vorganges bekanntlich ein positiver, nämlich $q / T_2 - q / T_1$, wenn man die dem K_1 entzogene Wärmemenge q von der Temperatur T_1 negativ ansetzt und die von K_2 aufgenommene Wärmemenge von der Temperatur T_2 dagegen positiv rechnet. Man kann diesen Vorgang nach Clausius auch als die Summe zweier Processe ansehen, eines positiven q / T_2 und eines negativen $- q / T_1$. Wird nun aber ein solcher Wärmeübergang von einem Wärmebehälter zu einem anderen von niederer Temperatur durch eine arbeitende Substanz wie bei einem Carnot'schen Process vermittelt, so gilt der positive Werth für einen solchen Process natürlich nur dann, wenn man die von den Reservoiren aufgenommenen bez. abgegebenen Wärmequantitäten positiv, bez. negativ rechnet. Nimmt man aber eine von dem arbeitenden System aufgenommene Wärmemenge positiv bez. eine abgegebene negativ, so trifft obige Bestimmung des Vorzeichens des ganzen Processes nicht mehr zu. Ist bei den isothermen Veränderungen, die ja zu einem Carnot'schen Processe gehören, die Temperatur der Behälter und des Körpers die gleiche, so muss die von dem höher temperirten Reservoire abgegebene Wärmemenge jetzt als positiv verrechnet werden, dagegen die bei einem anderen isothermen Vorgange an einen kälteren Wärmespeicher überführte Wärmemenge das negative Zeichen erhalten. Geht also, wie oben, auf diese Weise Wärme von K_1 auf K_2 über, so hat dieser Vorgang den Verwandlungswerth $q / T_1 - q / T_2$ und da T_2 kleiner als T_1 ist, so hat dieser Ausdruck einen negativen Werth. Sagt man also bei ersterer Annahme der Vorzeichen, dass die Summe aller in Betracht kommenden Verwandlungswerthe eines Processes nicht negativ sein könne, so müssen wir bei der anderen Bezeichnungsweise nunmehr aussprechen, sie könne nicht positiv sein, und dies führt dann also direct zu der Clausius'schen Ungleichung.

Was nun die Grösse N, welche die uncompensirte Verwandlung darstellt, anbetrifft, *so hat Clausius allerdings nur gezeigt, sie könne nicht negativ sein.* Sie ist nicht nothwendig positiv, wenigstens nach den thermodynamischen Betrachtungen allgemeiner Natur. Da auch nach manchen Stellen bei Clausius es anders erscheinen könnte, sei ausser auf die Beweisführung selbst noch auf eine Stelle hingewiesen, wo es ausdrücklich

heisst:[1]) Ist der Kreisprocess nicht umkehrbar, so brauchen die Aequivalenzwerthe der positiven und negativen Verwandlungen nicht gleich zu sein, aber der Unterschied kann nur in dem Sinne stattfinden, dass die positiven überwiegen. Nach Duhem ist ja, wie bereits erwähnt, $N = 0$ für alle Kreisprocesse, die ohne Viscosität verlaufen, ob aber solche wirklich vorkommen, ist nicht dargethan. In keiner Weise aber ist nachgewiesen und nach Verfassers Ermessen auch nur wahrscheinlich, dass für

$$\int_{\text{irr.}} \frac{d\,Q}{T} = 0,$$

bez. wenn alle $d\,Q = 0$ sind, auch N verschwindet. Bei den vollkommenen Gasen ist es vielmehr längst bekannt, dass, wenn bei ihnen adiabatische Vorgänge umkehrbar verlaufen, die Entropie allerdings constant bleibt, dagegen stets wächst, wenn irreversible adiabatische Processe vor sich gehen, sei es nun, dass das Gas dabei Arbeit leistet, sei es, dass es welche erleidet, also die Energie keineswegs constant bleibt.[2]) Zu einem viel allgemeineren Resultate in dem gleichen Sinne gelangt man durch Betrachtungen, ähnlich wie sie Clausius[3]) in seiner Abhandlung über Erweiterung des zweiten Hauptsatzes anstellt, wobei wir zunächst von Complicationen des Processes, wie chemische Umwandlungen infolge des veränderten Druckes und Temperatur, absehen wollen. Sind Druck und Gegendruck einer ihr Volumen adiabatisch ändernden Substanz einander gleich und daher der Process umkehrbar, so ist er auch isentropisch, wenn aber Ueber- oder Unterdruck zur Wirksamkeit kommen und endliche Geschwindigkeiten auftreten, dann wird, nachdem wieder Ruhe eingetreten, schon infolge der dabei entstandenen Wärme die Temperatur des Körpers im Endzustande eine höhere sein, als wenn er zu diesem isentropisch gelangt ist, und sein Entropiewerth hat daher zugenommen. Ebenso in Fällen, wo durch elektrische Ströme,

1) R. Clausius, Abhandl. **1.** p. 245. Ausserdem sind zu beachten die weniger bestimmten Stellen, Abhandl. **1.** p. 151 u. p. 163; Abhandl. **2.** p. 3.

2) R. Ritter, Ingenieur-Mechanik p. 512. 1885.

3) R. Clausius, l. c. p. 273 u. 274.

Reibung, Stoss und sonstige mechanische Vorgänge Wärme erzeugt wird, wo durch Leitung oder Strahlung Wärmeaustausch eintritt, überall da wird man mit Poincaré[1] bei einem isolirten Systeme Zunahme der Entropie wohl in der bei weitem überwiegenden Zahl der Fälle nachweisen können, denn nur ganz ausnahmsweise wird etwa eine Volumen- oder sonstige Aenderung die entropievermehrende Wirkung obengenannter Vorgänge aufheben. *Man kann also ruhig, wie dies ja auch Clausius andeutet, N im allgemeinen als positiv ansehen und zwar auch für adiabatische Processe und damit wird man auch das Princip der Vermehrung der Entropie anerkennen müssen und entsprechend natürlich die daraus folgenden Gleichgewichtsbedingungen.* Das Maximum der Entropie unter gegebenen Umständen bestimmt immer eine Grenze für adiabatische Veränderungen eines Systems. Uebrigens giebt die bekannte oben mit II bezeichnete Gleichung noch zu einigen weiteren Bemerkungen Veranlassung, die Verfasser merkwürdigerweise nirgends erwähnt gefunden hat. Sicher muss nämlich $S - S_0$ grösser als 0 sein, sobald

$$\int_{\text{irr.}} \frac{dQ}{T}$$

positiv, selbst dann, wenn N verschwinden würde. Insbesondere also gilt dies, wenn die Werthe aller dQ positiv sind, d. h. wenn Wärme von dem System während der Veränderung nur aufgenommen wird. Die Entropie kann constant bleiben oder sogar abnehmen, wenn

$$\int_{\text{irr.}} \frac{dQ}{T}$$

negativ ist. Es lässt sich aber darüber nichts bestimmen, da man von vornherein nicht weiss, wie grosse positive Werthe N annehmen kann. Wenigstens ist keine nähere Angabe darüber zu Verfassers Kenntniss gelangt. Auch bei ausschliesslichem Wärmeverlust kann daher unter Umständen die Entropie eines Systems noch wachsen. Die Unbestimmtheit des Werthes von N dürfte mit Recht als ein Hauptmangel der Thermodynamik angesehen werden. Bei näherer Kenntniss der Factoren, welche zu

1) H. Poincaré, l. c. p. 103.

den uncompensirten Verwandlungen führen, ist es aber vielleicht möglich, zu präciserer Einsicht zu gelangen.[1])

Clausius selbst hat bekanntlich seine Gleichungen nicht direct dazu benutzt, um die Vermehrung der Entropie zu beweisen, wenn er auch durch seine Ausführungen nahelegt, dies zu versuchen. Wer zuerst so verfahren, dass er schloss, wenn

$$\int_{\text{irr.}} \frac{dQ}{T} = 0,$$

also insbesondere, wenn alle $dQ = 0$, d. h. wenn ein adiabatischer Vorgang vorliegt, so ist $S - S_0 = N$, also grösser als Null, also muss auch S grösser als S_0 sein, vermag Verfasser, nicht anzugeben. Die Schlussweise ist, wie bereits früher gesagt, von mehreren Autoren adoptirt worden. Kirchhoff wie andere heben als Beschränkung für diesen Satz hervor, dass er voraussetze, man könne jeden Zustand eines Systems in umkehrbarer Weise erreichen, was allerdings a priori nicht zu beweisen ist. Indessen ist auch hier zu bedenken, dass nicht der wirkliche Vorgang, durch den ein gewisses System in einen gewissen Zustand gebracht wird, in einen umkehrbaren verwandelt zu werden braucht, was ja nach Duhem nicht allgemein möglich ist. Es genügt mit Hrn. Planck[2]) anzunehmen, dass es nur gelingt, jedes Element des zu betrachtenden Körpers in den Zustand, in dem es sich in dem Augenblicke, für welchen die Entropie bestimmt werden soll, gerade befindet, auf irgend einem reversiblen Wege überzuführen. Dies gilt auch für einen, in seinen einzelnen Theilen ungleichmässig bewegten wie temperirten Körper, was Hr. Planck mit Recht

1) Vielleicht ist es einer oben erwähnten Andeutung Duhem's folgend möglich, in manchen Fällen N aus der durch Viscosität verbrauchten Energie zu berechnen, wie man ja ähnlich auch die Joule'sche Wärme ansehen kann. Aus dem so bestimmten N und dem etwa aus Beobachtungen sich ergebenden

$$\int_{\text{irr.}} \frac{dQ}{T}$$

liesse sich dann die Entropieänderung berechnen. Ob das allgemein möglich, dürfte jedoch noch nicht zu bestimmen sein.

2) M. Planck, Thermodynamik p. 92. 1897.

bemerkt. Clausius sprach es aus, in allen Fällen würde man unter Gewinn oder Verbrauch von Arbeit die Verbindung oder Trennung der Stoffe nach Willkür leiten können, wenn wir die Mittel besässen, auf die einzelnen Atome beliebig einzuwirken und sie in jede beliebige Lage zu einander zu bringen. Hierdurch wird allerdings nur auf die theoretische Möglichkeit, umkehrbare Wege zu finden, hingewiesen, aber Poincaré[1]) bemerkt, dass in Fällen, wo kein directer umkehrbarer Weg aus dem Anfangs- in den Endzustand vorhanden sei, man in den meisten, wenn nicht allen Fällen die Aenderung der Entropie mittels eines Hülfssatzes bestimmen könne und giebt ein Beispiel für solches Verfahren. Sollte das nicht gelingen für gewisse Processe, so könne man immer noch aus den Integralen

$$\int_{\text{irr.}} \frac{d\,Q}{T}$$

eine untere Grenze für die Entropieänderung zu finden suchen, da ja die bewussten Integrale alle kleiner sind als $S - S_0$. Indessen, soweit reichend auch die Möglichkeit reversibler Processe ist, die Clausius'sche Ungleichung bleibt insofern allgemeiner als das Princip der Entropie, als sie die Annahme der unbeschränkten Möglichkeit umkehrbarer Wege gar nicht enthält.

Eine von Hrn. Planck eingeführte Erweiterung des Begriffes der Reversibilität scheint mir im Widerspruche zu Hrn. Helm[2]) einen Fortschritt zu bilden gegenüber den sonst herrschenden Ansichten. Darnach genügt es für einen Process, um reversibel zu sein, dass es irgend ein Mittel giebt, den Anfangszustand wieder vollständig herzustellen, ohne dass sonstige Veränderungen eintreten. Eine directe Umkehr des Processes ist nicht nöthig. Hätte man z. B. einen Kreisprocess, der einen negativen Werth des $\int d\,Q/T$ ergiebt, und liessen sich die dabei eingetretenen Veränderungen (Wärmeübergänge, Arbeitsverbrauch etc.) wieder vollständig rückgängig machen, so hätte man nun einen zweiten Kreisprocess mit positivem Aequivalenzwerth, was ja ausgeschlossen ist. Es muss also auch in diesem Falle der Kreisprocess den Werth 0 für das

1) H. Poincaré, l. c. p. 163—165.
2) G. Helm, Energetik p. 194. 1898.

Integral $\int dQ/T$ wie bei der alten Definition der Umkehrbarkeit ergeben, und ist der bezügliche Clausius'sche Beweis in diesem Sinne zu ergänzen. Geht ein System aus einem Zustande A in einen zweiten B über und lässt sich diese Veränderung durch eine zweite vollständig rückgängig machen, so bilden beide zusammen einen Kreisprocess, dessen Aequivalenzwerth gleich Null, weil ja schliesslich gar keine Veränderung mehr existirt. Es müssen dann alle Wege, die von A nach B führen, denselben Verwandlungswerth ergeben, d. h. der Werth für B ist eindeutig bestimmt wie bei der Entropie.

Clausius hat sich bekanntlich in seinen Betrachtungen nicht auf die Kreisprocesse beschränkt, sondern eine Erweiterung des zweiten Hauptsatzes versucht, die auch die innere Arbeit berücksichtigt und ferner dazu dienen sollte, das Theorem plausibler zu machen. Diese Betrachtungen haben wohl nicht den Erfolg gehabt, den der Autor sich von ihnen versprochen hat, aber sie verdienen dennoch auch nicht ganz in Vergessenheit zu gerathen, oder etwa gar lediglich als ein Abweg angesehen zu werden.[1]) Die einem Körper zugeführte Wärme dQ ist bekanntlich gleich $dU + dW$, wo U die innere Energie und W das äussere Werk bezeichnet. Für einen umkehrbaren Vorgang giebt dann

$$\int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU + dW}{T}$$

die Entropieänderung, d. h. $(dU + dW)/T$ ist ein vollständiges Differential. Dieses formt nun Clausius um, indem er inneres und äusseres Werk zusammenzieht, zu welchem Zwecke er dU zerlegt in $dH + dJ$, wo J das gethane innere Werk bedeutet, H die lediglich als Wärme in dem Körper vorhandene Energie bezeichnet. Durch eine gewisse Annahme über die Fähigkeit der Wärme Arbeit zu leisten, gelangt dann Clausius dazu, die Grösse

$$\frac{dJ + dW}{T} = dZ$$

zu setzen und als ein vollständiges Differential anzusehen. Z wird Disgregation genannt und ist als der Ausdruck der Anordnungsänderung der Elemente des variablen Systems an-

1) G. Helm, l. c. p. 120.

zusehen, welcher nur abhängig erscheint von dem Zustande, in dem sich das System gerade befindet, nicht von dem Wege, auf dem es dahin gelangt ist. Da für einen umkehrbaren Kreisprocess

$$\int \frac{dQ}{T} = 0,$$

also nach obigen

$$\int \frac{dH}{T} + \int dZ = 0$$

und da $\int dZ = 0$ für einen Kreisprocess, so muss auch

$$\int \frac{dH}{T} = 0$$

sein, d. h. dH/T stellt ein vollständiges Differential dar. Daraus folgert dann Clausius, dass der Wärmeinhalt H eines Körpers nur von der Temperatur, nicht aber von der Anordnung der Körperelemente abhängig sei. Der weiter sich ergebende Satz von der Constanz der wahren Wärmecapacität ist meines Wissens nicht direct widerlegt worden[1]), aber er hat in der Erfahrung auch keine Bestätigung gefunden.[2]) Das liegt wohl an der Unbestimmtheit der Begriffe Wärmeinhalt und innere Arbeit, was Clausius indessen keineswegs entgangen ist, wie er denn ja auch die obigen Folgerungen durchaus nicht als streng bewiesen ansah. *Das Wesentliche an der Sache scheint dem Verfasser zu sein, dass die Betrachtungen von Clausius auf eine Zerlegung des vollständigen Differentiales der Entropie dQ/T in die Summe zweier anderer ebensolcher Grössen herauskommen, eine Aufgabe, die an sich ja ziemlich unbestimmt erscheint und eventuell auf verschiedene Weise auszuführen ist.* Möglicherweise wird sich in Zukunft noch zeigen, *dass eine solche Zerlegung für die Darstellung mancher Vorgänge zweckmässig ist,* und sind daher die Clausius'schen Betrachtungen nicht ganz aus dem Auge zu verlieren. Clausius[3]) zeigt dann weiter, dass, wenn man mit

$$dS = \frac{dH}{T} + dZ$$

1) Vgl. A. Winkelmann, Handb. d. Physik 2. p. 348. 1896.

2) Vgl. A. Wüllner, Experimental-Physik 3. p. 605. 1885. In der neuesten Auflage des Werkes sind dieselben Ansichten dargelegt.

3) R. Clausius, p. 275, Gleichung (5a).

das vollständige Entropiedifferential dQ/T bezeichnet, welches also reversiblen Vorgängen entspricht, und unter dq das Element der bei einem entsprechenden beliebigen Processe aufgenommenen Wärmemenge versteht, dann stets gilt

$$-\frac{dq}{T} + dS \gtreqless 0,$$

wobei zu beachten ist, dass alle vorkommenden Grössen in dieser Gleichung sich nur auf das arbeitende System beziehen, Reservoire, Umgebung etc. spielen gar keine Rolle dabei.[1]) Handelt es sich um adiabatische Vorgänge, wo $dq = 0$, so gilt wie früher $dS \geqq 0$, oder die Entropie nimmt zu. *Diese letzteren Betrachtungen bedürfen, wie es dem Verfasser scheint, nicht der speciellen Clausius'schen Erörterung, welche zu der Aufstellung der Disgregation genannten Grösse führen, sondern gelten ganz unabhängig davon, soweit als man im Stande ist, die Existenz der Entropie S nachzuweisen, bez. anzunehmen.*

Clausius weist ferner darauf hin, wie seine Ausführungen sich auf elektrische Vorgänge ausdehnen lassen, was aus folgenden beiden Stellen erhellt. Es heisst da[2]): Ein anderer Fall (nämlich Vorgänge, durch welche Wärme Arbeit leisten kann), der von dem vorherigen (Volumenausdehnung, Aenderung des Aggregatzustandes) sehr verschieden ist und zeigt, wie mannichfaltig die hierher gehörigen Wirkungen sind, ist der, dass bei der Berührung zweier verschiedenartiger Stoffe durch die Wärme Elektricität von dem einen Stoffe zum anderen getrieben wird, worauf die Entstehung der thermoelektrischen Ströme beruht. Etwas weiter[3]) heisst es dann:

1) Verallgemeinert und in Worten ausgedrückt bedeutet diese Gleichung nach Clausius: die Summe aller vorkommenden Verwandlungen kann nicht negativ sein. Auf einen Kreisprocess angewendet, ergiebt die betreffende Gleichung

$$\int \frac{-dq}{T} \gtreqless 0,$$

d. h. also die bekannte Ungleichung. In dem Beweise, den Clausius für seine Gleichung (5a) giebt, ist implicite das Princip der maximalen Arbeit enthalten, dessen sich Hr. Nernst bei seinen thermodynamischen Ableitungen bedient.

2) R. Clausius, l. c. 1. p. 247.

3) l. c. p. 248.

Was den zuletzt erwähnten Fall betrifft, so wird in diesem die Anordnung der Elektricität geändert, eine Aenderung, welche sich in entsprechender Weise darstellen und in Rechnung bringen lässt, wie die Aenderung der Lage der Molecüle und welche wir uns, wo sie vorkommt, immer in dem allgemeineren Ausdruck, Anordnungsänderungen oder Aenderungen der Disgregation miteinbegriffen denken wollen und ferner [1]) wird gesagt, so viel Elektricität wird geschieden, bis die aus elektrischer Spannung entstehende Gegenkraft der hinübertreibenden Kraft das Gleichgewicht hält. Die der Wärme entgegenwirkende Kraft ist eine einfache und leicht bestimmbare Grösse. *Das sind wesentlich dieselben Gedanken, die später Hr. Planck ausgeführt hat*[2]), *nur die Uebergänge der Elektricität von einer Art Stoff zu einem anderen kommen bei Entropieänderungen in Betracht, während elektrostatisches Potential und ponderomotorische Kräfte elektrischen oder magnetischen Ursprunges ohne Einfluss sind.* Ferner spricht Clausius mit Bestimmtheit aus, dass sich seine Erörterungen auch auf chemische Vorgänge anwenden lassen [3]), Trennung chemischer Verbindungen sei auch eine Vermehrung der Disgregation und ähnlich zu behandeln, wie Dampfbildung und Dampfniederschlag. Wo Wärme Verbindungen bewirkt, soll sie nur die Atome in die Lage bringen, dass die Verbindungskräfte in Wirksamkeit treten können. Allerdings seien chemische Vorgänge meist nicht umkehrbar, doch kämen solche Fälle vor, besonders bei elektrochemischen Erscheinungen. Die Zelle, in welcher chemische Vorgänge eintreten, bilde selbst ein Element, dessen elektromotorische Kraft entweder im Sinne des Stromes wirkt, oder ihm entgegen, sodass Gewinn bez. Verbrauch von Arbeit stattfindet. Eingehender werden solche Fälle allerdings nicht untersucht, nur die Anwendung des Satzes über den wahren Wärmeinhalt wird an dem über Gase vorhandenen Beobachtungsmaterial zu prüfen versucht. [4])

Diese Art der Betrachtung setzt nun allerdings voraus,

1) R. Clausius, l. c. p. 249.
2) M. Planck, Wied. Ann. **44.** p. 387. 1897.
3) R. Clausius, l. c. **1.** p. 269.
4) l. c. **1.** p. 268 u. 270.

dass man jede unendlich kleine Veränderung in umkehrbarer Weise vorzunehmen vermöge, was ja wohl eine gewisse Einschränkung bedeutet. Clausius ist, wie gesagt, die Unvollständigkeit seiner Erörterungen keineswegs fremd, es muss, wie schon erwähnt, die Zukunft zeigen, ob ein Weitergehen auf dem von ihm angegebenen Wege nicht doch noch von Bedeutung für die Aufklärung des zweiten Wärmesatzes ist.

Was nun Duhems interessante Theorie der sogenannten falschen Gleichgewichte betrifft, so kann es wohl sein, dass die Untersuchungen des französischen Physikers von Werth sind für die Darstellung mancher Zustände, die man zur Zeit nicht näher zu durchschauen vermag.. Bei den unter zunehmender Krafteinwirkung aushaltenden Reibungs-Gleichgewichten dürfte es sich indessen wohl nur um eine unmerkliche Deformation handeln, die solange vor sich geht, bis dass eine Art Zerreissen, Zerquetschen oder Ueberspringen der Hindernisse eintritt. Damit ändert sich dann natürlich die Geschwindigkeit der Bewegung plötzlich in sehr erheblichem Maasse, ohne dass sie aber vorher völlig Null war. *Es sind deshalb doch nur Kräfte, wie sie die gewöhnliche Mechanik behandelt, die man schliesslich als in Wirksamkeit tretend anzunehmen hat.* So sehen denn auch manche Autoren, wie z. B. Hr. Nernst, in den falschen chemischen Gleichgewichten nur äusserst langsam verlaufende chemische Processe, oder es kommen, nach van't Hoff[1]), neben Molecularverschiebungen und Orientirungen bei chemischen Umwandlungen noch Verschiebungen bez. Austausch von Atomen in Betracht, welche eventuell durch hemmende Einflüsse zurückgehalten werden. Schon Clausius weist ja darauf hin, die Wärme, die im allgemeinen zersetzend wirke, könne dadurch Verbindungen hervorrufen, dass sie die Atome in Lagen bringe, bei denen die Verbindungskräfte erst zu wirken vermöchten. Dann ist aber Hoffnung vorhanden, auch die sogenannten falschen Gleichgewichte bei Berücksichtigung aller mitwirkenden Einflüsse

1) J. H. van't Hoff, Vorlesungen über chemische Dynamik p. 206. 1898, ferner p. 208—209; ferner p. 176 u. 177, wo auf die thermodynamische Erklärung des fraglichen Verhaltens hingewiesen wird. Neuester Zeit ist Bodenstein gegen die Lehre von den sogenannten falschen Gleichgewichten aufgetreten, vgl. Zeitschr. f. phys. Chem. **29.** p. 321. 1899.

aus der klassischen Thermodynamik zu erklären. ***Man wird daher auch keines eigenen Beweises für die Ungleichung bedürfen***, falls solche Hemmungen vorhanden sind, die zu sogenannten falschen Gleichgewichten führen, sondern im Gegentheil erwarten müssen, ***dass ein Ausdruck, der die besagten Erscheinungen darstellen soll, der Ungleichung entspricht.***

Der Hinweis auf anscheinende Ausnahmen von dem bekannten Clausius'chen Grundsatze hat des öfteren zur Aufklärung der fraglichen Verhältnisse nicht wenig beigetragen. Man denke nur an die erfolgreich widerlegten Einwände von Hirn, Tolver-Preston, Bauschinger, Rankine, Tait, Bartoli u. a. So können wir denn auch Hrn. E. Wiedemann[1]) nur dankbar sein dafür, dass er auf gewisse weitere Schwierigkeiten hingewiesen hat, welche bei Strahlungsvorgängen, die als Luminescenzerscheinungen bezeichnet werden, auftreten. Da soll Wärme von einem Körper niederer Temperatur zu einem solchen höherer übergehen können, ohne gleichzeitige Arbeitsleistung, wobei der phosphorescirende Körper nur ein Zwischenglied sein soll zwischen der luminescenzerregenden, primären Energiequelle (etwa der Sonne) und dem schliesslich erwärmten Körper (Platinhülle), dessen Temperatur höher sein dürfte, als die der leuchtenden Substanz. Der Clausius'sche Grundsatz soll dann gelten für den Uebergang der Wärme von der primären Quelle zum betreffenden erwärmten Körper. Verfasser glaubte dieser Auffassung entgegentreten zu sollen[2]), da, wie ihm schien, *ein Vorgang seine thermodynamische Möglichkeit in sich selbst aufweisen müsse.* Ausserdem wird aber auch noch auf das Verhalten gewisser Flammen hingewiesen, die doch wohl kaum nur als Zwischenglied anzusehen sind. Trotz der freundlichen Erwiderung, welche Hr. E. Wiedemann[3]) seiner damaligen Notiz hat zukommen lassen, glaubt Verfasser auf seinem früheren Standpunkte beharren zu sollen. ***Die Wärmeaufnahme seitens eines Körpers (hier also der Platinhülle) ist eine positive Verwandlung und nur dann tritt ein Widerspruch mit dem Grundsatze hervor, wenn eine grössere Negative***

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **38.** p. 485. 1889.
2) K. Wesendonck, Wied. Ann. **62.** p. 706—708. 1897.
3) E. Wiedemann, Wied. Ann. **66.** p. 1180. 1898.

damit verbunden ist. Kohlrausch gegenüber hat Clausius [1]) ausgeführt, wie man Wärme von beliebig hoher Temperatur erhalten kann durch Verbrauch von Arbeit, ohne dass dabei, wenn man den Process im Ganzen betrachtet, eine negative Verwandlung vorzuliegen braucht. *Nun ist aber gar nicht gesagt, dass bei dem Abklingen der Phosphorescenz eine negative Verwandlung eintritt, welche die positive an dem erwärmten Körper übertrifft.* Solange dies nicht nachgewiesen, ist auch kein Conflict mit dem Clausius'schen Grundsatze bez. dem zweiten Haupttheorem vorhanden. Strahlungsenergie ist eben nicht Wärme und nur in übertragener Bedeutung ist hier von Temperatur zu sprechen. Verfasser hat hierauf bereits [2]) hingewiesen und aus neueren Untersuchungen von Hrn. Voigt geht dies ebenfalls hervor. [3]) „Offenbar sind," so heisst es da, „die hier stattfindenden Schwingungen geordnete in dem Sinne, dass dabei der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, auf dem Kirchhoff's Beweis seines Satzes beruht, die Gültigkeit verliert." Das ist nach Verfassers Ansicht so zu verstehen, dass man es eben nicht mit Wärme, sondern mit Strahlungs- bez. Luminescenzenergie zu thun hat. Nur wenn Strahlung ganz in derselben Art wirkt, wie directe Wärmeleitung, ist ein von selbst verlaufender, aufsteigender calorischer Strom ausgeschlossen. Durch Inductionswirkungen (Wirbelströme), durch chemische, mechanische Processe, oder elektrische Entladungsvorgänge kann man ja bekanntlich leicht höhere Wärmegrade erzielen, als in der Umgebung vorhanden sind, natürlich durch geeigneten Energieaufwand. Aehnlich kann der Verbrauch derjenigen Energie, durch welche die Körper luminesciren, andere Substanzen zu höheren Temperaturen bringen. Man denke nur an ein mechanisches System, das z. B. gespannte Uhrfedern enthielte, deren abnehmende potentielle Energie durch einen geeigneten Mechanismus im umgebenden Medium Schwingungen erregt. Werden diese an einer umgebenden Hülle vernichtet, was der Absorption entspräche, so kann sich diese Hülle wohl über die Temperatur des die Schwingungen aussendenden

1) R. Clausius, Mech. Wärmetheorie. 2. p. 309—312. 1879.
2) K. Wesendonck, l. c.
3) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 373. 1899.

ɔrpers erwärmen. Freilich passt dieser Vergleich nicht voll- ındig, solange die Schwingungen im Verhältniss zu denen s Lichtes nur sehr langsame sind, und die Federn nicht ɔleculare Dimensionen haben. Weiter oben wurde der Ver- ındlungswerth von Massenbewegungen besprochen, der sich ı verschwindend klein herausstellte. Im Falle luminescirender bstanzen kann man zwar nicht mehr sagen, man habe es t schwingenden Massen zu thun, welche gegen die eines omes als unendlich gross anzusehen sind, aber es lässt sich ch keineswegs von vornherein behaupten, es träten nega- e Verwandlungen von solcher Grösse auf, um den ganzen wussten Vorgang zu einem negativen zu machen. Gewisse ıklarheiten, welche in dem Begriffe des Wärmeinhaltes [1]) d der inneren Arbeit ja immer noch liegen, erschweren erdings die Aufklärung solcher Vorgänge, aber in Fällen, e neuerdings wieder bei Strahlen, die von Körpern, wie dem 'an oder Radium, ausgehen, wird man nicht sofort eine Ver- zung des Carnot'schen Satzes annehmen dürfen, wenn auch scheinend eine solche stattfindet, sondern wird vorerst nach m wahren Wesen der vorliegenden Verwandlungen zu forschen ben.

1) Vgl. E. Riecke, Experimentalphysik 2. p. 466—467. 1896.

(Eingegangen 8. August 1899.)

9. *Ueber die Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen im magnetischen Felde; von F. Giesel.*

Vor kurzem ist von Elster und Geitel gezeigt, dass die durch Becquerelstrahlen ertheilte Leitfähigkeit stark verdünnter Luft durch magnetische Kräfte vermindert wird. Da die Wirkung vielleicht einer unmittelbaren Ablenkung der Strahlen durch das Magnetfeld zuzuschreiben war, so wurde untersucht, ob die auf einem Phosphorescenzschirm durch die aus dem Vacuum heraustretenden Strahlen erregte Lichterscheinung eine Lageänderung erfährt, sobald das Magnetfeld hergestellt wurde. Es ergab sich, dass „die Becquerelstrahlen keine Ablenkung durch magnetische Kräfte erfahren, die mit der der Kathodenstrahlen vergleichbar wäre“.[1])

Im lufterfüllten Raume habe ich nun eine deutliche Einwirkung eines Magnetfeldes auf die Becquerelstrahlen erhalten. Als Quelle der Strahlen dienten 0,1 g eines frisch bereiteten und daher äusserst wirksamen Poloniumpräparates.[2]) Die Versuchsanordnung war höchst einfach. Auf die Pole eines vertical stehenden Hufeisenelektromagnetes *S*, *N* wurde der Leuchtschirm gelegt, etwa 1 cm darunter zwischen die Pole das Poloniumpräparat *P*. Bei Erregung des Magneten in dem bezeichneten Sinne wich der Lichtschein in der Pfeilrichtung aus, indem er auf dem Schirme eine kometenschweifartige Figur zeichnete. Bei Polwechsel des Magneten sprang er auf die andere Seite über. Bringt man das Präparat in gleiche Lage über den Schirm, so erfolgt die Verschiebung des Lichtscheines in entgegengesetztem Sinne.

(S) P (N) ↓

1) J. Elster u. H. Geitel, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 1. 5. Mai 1899; Wied. Ann. **69**. p. 88. 1899.

2) F. Giesel, Wied. Ann. **69**. p. 91. 1899. Es hat sich bestätigt, dass die Poloniumpräparate und zwar nicht nur das Sulfid, sondern auch das elektrolytisch abgeschiedene Metall und Präparate in Form von BiOCl und BiO·OH allmählich aber beständig in der Wirksamkeit zurückgehen.

Die Strahlen von Radiumpräparaten verhalten sich genau so, wenn auch die Deutlichkeit der Erscheinung eine etwas geringere ist. Ebenso zeigte das Radiumpräparat, dessen sich Elster und Geitel für oben genannten Zweck bedienten, den Einfluss des Magneten unzweifelhaft.

Die geschilderten Erscheinungen lassen sich auch mit Hülfe der photographischen Platte fixiren. Es wurde hierbei der Deutlichkeit der Bilder halber vorgezogen, die Substanz P

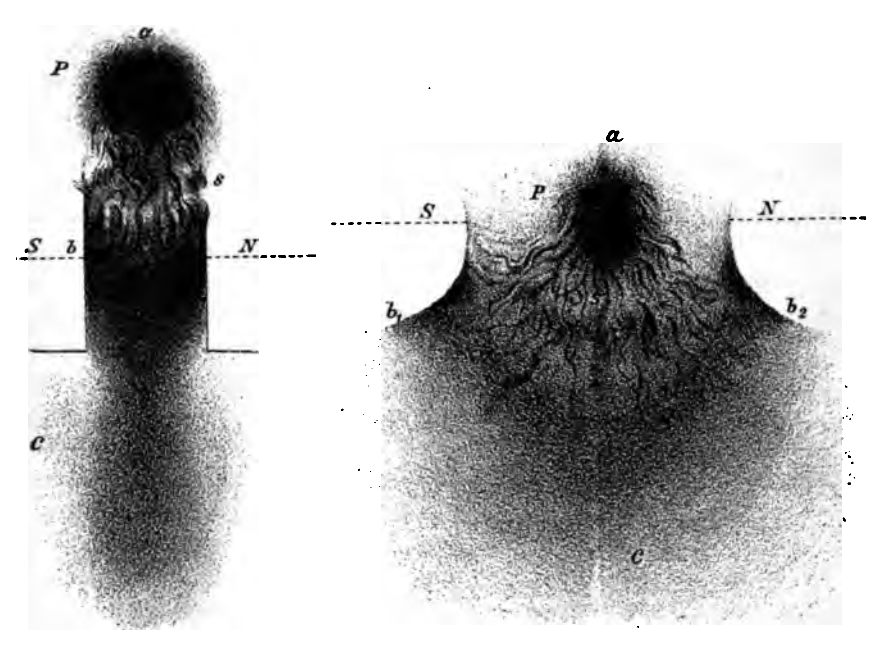


Fig. 1. Fig. 2.

(Polonium) nicht in 1 cm Entfernung, sondern der in schwarzes Papier gehüllten und mit der Schichtseite den Polen zugewendeten Platte unmittelbar anliegend anzubringen. Die Expositionszeit betrug 3—10 Minuten. Von den verschiedenartigen, durch Veränderung der Form und Lage der Pole, wie Anordnung der Substanz zu den Polen erhaltenen Radiogrammen habe ich zwei Aufnahmen nach dem Negativ in Zeichnung wiedergegeben. Bei Fig. 1 befindet sich *P* ausserhalb der Flachpole *S* und *N*, bei Fig. 2 innerhalb der Rund-

pole des Magneten, die sich durch die Strahlen von selbst markiren.

Neben der einseitigen Ablenkung treten auf den Platten die durch den Magneten hervorgerufenen Anhäufungsstellen der Strahlen (*b*, Figg. 1 u. 2) deutlich hervor, ausserdem aber zeigt sich noch eine neue mit dem Phosphorescenzschirm nicht zu verfolgende Eigenthümlichkeit. Die Ausbreitung der Strahlen erscheint in der Nähe der Substanz in der Ablenkungsrichtung nicht gleichmässig abgetönt, wie um dieselbe nach der entgegengesetzten Richtung (*a*, Figg. 1 u. 2) und bei den übrigen Theilen im Magnetfelde (*b* und *c*, Figg. 1 u. 2), sondern wellig in **S**-förmig gewundenen Linien (*s*, Figg. 1 u. 2).

Die **S**-Form erinnert an die Beeinflussung der Aureole des Inductionsfunkens zwischen den Magnetpolen.

Braunschweig, 31. October 1899.

(Eingegangen 2. November 1899.)

10. *Nachtrag; von R. von Hirsch.*

In meiner Abhandlung[1]) habe ich geglaubt, aus dem Verhalten der Substanzen bei der kritischen Temperatur, den Schluss ziehen zu müssen, die kritischen Dichten von Flüssigkeit und Dampf seien nicht gleich, da die mir bekannten anderweitigen Erklärungen für das Verschwinden des Meniscus an bestimmten Stellen im Rohr den Erscheinungen nicht zu genügen schienen. Dem dort gegebenen Gedankengang liegt die stillschweigende Voraussetzung zu Grunde, der Zustand sei bei vollkommen constanter Temperatur in der ganzen Ausdehnung der Flüssigkeit, bez. des Dampfes derselbe. Durch eine Arbeit von Hrn. Gouy[2]), in der derselbe den Einfluss der Schwere auf die kritischen Erscheinungen hervorhebt, bin ich darauf aufmerksam geworden, dass diese selbstverständlich scheinende Annahme in der Nähe der kritischen Temperatur nicht berechtigt ist: Da nämlich hier dv/dp sehr gross wird, so vermag selbst der geringe hydrostatische Druck im Rohr eine stetig mit der Höhe fortschreitende Dichteänderung hervorzubringen, sodass nur an der Trennungsfläche Dampf—Flüssigkeit der kritische Zustand herrscht, während oberhalb die Dichte abnimmt, unterhalb wächst.

Bei Versuchen werden stets die mittleren Dichten der ganzen Flüssigkeits- bez. Dampfmenge bestimmt, es müssen sich also hier einseitige Abweichungen ergeben, die um so stärker ausfallen werden, je grösser der vorhandene hydrostatische Druck, d. h. je länger die Röhre ist. Für diese gemessenen mittleren Werthe gilt also die an früherer Stelle gegebene Entwickelung, die auf die Ungleichheit der kritischen Flüssigkeits- und Dampfdichte führt, nicht für die wahren dem Sättigungszustand entsprechenden Grössen, die allein Bedeutung für die Theorie haben.

1) R. von Hirsch, Wied. Ann. **69**. p. 456. 1899.
2) Gouy, Compt. rend. **115**. p. 720. 1892.

(Eingegangen 20. October 1899.)

11. *Eine Methode zur Demonstration und Photographie von Stromcurven*[1]; *von J. Zenneck.*

1.

Den *Ausgangspunkt* bildet die von F. Braun[2]) beschriebene Methode, um die Curven variabler Ströme sichtbar zu machen. Sie besteht bekanntlich darin, dass durch ein in einer Kathodenstrahlenröhre befindliches Diaphragma ein dünnes, kreisförmiges Kathodenstrahlenbündel ausgeschnitten wird, das auf einem ebenfalls in der Röhre angebrachten und mit einer luminescirenden Substanz bestrichenen Schirm einen hellen Luminescenzfleck erzeugt. Der in Frage stehende variable Strom wird durch eine Spule geschickt, deren Axe senkrecht zur Röhrenaxe steht. Das Kathodenstrahlenbündel und damit der Luminescenzfleck bekommt durch das magnetische Feld der Spule eine Ablenkung, die der Intensität des Stromes jedenfalls annähernd proportional ist und bei horizontaler Stellung der Röhren- und Spulenaxe verticale Richtung hat. Betrachtet man die Bewegung des Fleckes durch einen gleichmässig rotirenden Spiegel mit verticaler Drehungsaxe, d. h. ertheilt man dem Spiegelbild des Fleckes eine der Zeit proportionale horizontale Bewegungscomponente, so erscheint im Spiegel die Stromcurve.

Will man in ähnlicher Weise die Curve der Spannungsdifferenz zwischen zwei Polen etwa einer Wechselstromdynamomaschine oder eines Inductoriums bekommen, so braucht man nur die horizontale Spule durch zwei horizontale Condensatorplatten zu ersetzen; durch das elektrische Feld zwischen den Platten wird der Luminescenzfleck ebenso in der Richtung des elektrischen Feldes abgelenkt wie durch das magnetische Feld der Spule senkrecht zur Richtung dieses Feldes.[3])

1) Vgl. meine Notiz Elektrotechn. Zeitschr. **20.** p. 228. 1899.

2) F. Braun, Wied. Ann. **60.** p. 552 f. 1897; vgl. auch Elektrotechn. Zeitschr. **19.** p. 204. 1898.

3) Vgl. H. Ebert, Wied. Ann. **64.** p. 240ff. 1898.

Es war meine Absicht die Methode so umzuändern, dass man die Stromcurve direct photographisch aufnehmen kann. Will man, womit man sich seither begnügte, nach dem Bild im rotirenden Spiegel zeichnen, so hängt die erreichte Genauigkeit von der Geschicklichkeit des Zeichnenden ab und das ist gerade hier sehr bedenklich, da ein genaues Zeichnen nach dem unruhigen Bild des rotirenden Spiegels durchaus nicht leicht ist. Um diesem Mangel abzuhelfen, suchte ich die Anordnung so zu treffen, dass die Stromcurve auf dem Luminescenzschirm selbst zur Darstellung kommt.

A. Princip der Methode.

2.

Zu diesem Zwecke muss die horizontale und der Zeit proportionale Bewegungscomponente, welche in der Braun'schen Anordnung das Spiegelbild des Luminescenzfleckes erhält, dem Flecke selbst ertheilt werden.

Man erreicht dies, indem man ausser der horizontalen Spule, durch welche der variable Strom hindurchgeht, eine zweite verticale Spule anbringt und diese mit einem Strom beschickt, dessen Intensität der Zeit proportional ist.

Die erste Aufgabe ist also einen Strom zu beschaffen, dessen Intensität der Zeit proportional ist.[1])

3.

Das genügt indess für die meisten Zwecke noch nicht. Würde man nämlich einen solchen Strom nur ein einziges Mal durch die verticale Spule hindurchschicken, so würde der Luminescenzfleck die Stromcurve auch nur ein einziges Mal beschreiben. Würde man ihn mehrmals hindurchschicken, so würde zwar der Fleck die Curve mehrmals durchlaufen, aber entsprechende Theile der Curve würden im allgemeinen nicht jedesmal auf dieselben Stellen des Schirmes fallen. Eine photographische Aufnahme, bei der eine längere Exposition nothwendig ist, wäre nicht möglich und für die Demonstration wäre gegenüber der Braun'schen Anordnung nicht viel gewonnen.

1) Er soll im Folgenden einfach als *linearer Strom* bezeichnet werden.

Die zweite Aufgabe ist also die, den linearen Strom mehrmals durch die verticale Spule zu schicken und zwar so, dass entsprechende Punkte der Stromcurve immer wieder auf dieselben Punkte des luminescirenden Schirmes fallen.

4.

Die erste Aufgabe, einen Strom zu bekommen, dessen Intensität der Zeit proportional ist, lässt sich im Princip in folgender Weise lösen.

Das eine Ende der Spule *S* (Fig. 1), welche mit dem linearen Strom beschickt werden soll, wird verbunden mit

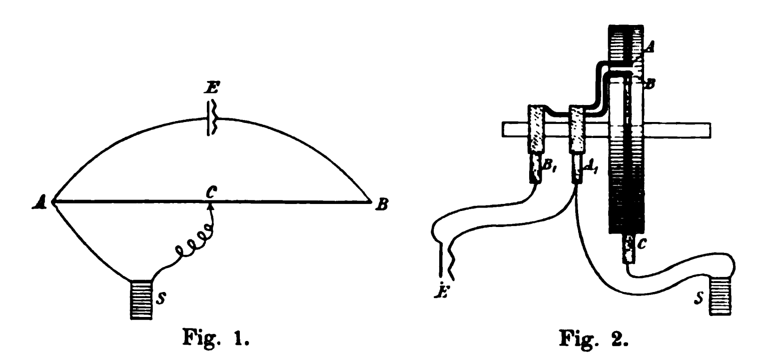


Fig. 1. Fig. 2.

dem einen Endpunkte *A* eines gleichmässig dicken, homogenen Drahtes *A B*, welcher in den Stromkreis des Elementes *E* eingeschaltet ist. Das andere Ende der Spule steht in Verbindung mit einem Schleifcontact *C*, der auf dem Drahte *A B* verschiebbar ist. Wird dieser Schleifcontact mit constanter Geschwindigkeit auf dem Drahte von *A* nach *B* verschoben. so ist die Intensität des durch die Spule *S* gehenden Stromes sehr annähernd der Zeit proportional, wenn der Widerstand des Zweiges *A S C* gross ist gegen denjenigen des Drahtes *A C B* und wenn der Selbstinductionscoefficient der Spule *S* dividirt durch den Widerstand des Zweiges *A S C* verschwindet gegen die Zeiteinheit.

5.

Der zweiten Aufgabe wird man wenigstens in dem Falle, wenn der variable Strom, dessen Curve aufgenommen werden soll, der Strom eines Wechselstromgenerators ist, gerecht in der folgenden Weise (vgl. Figg. 1, 2 u. 5). Der Draht *A B*

(Fig. 1) wird auf der Peripherie einer drehbaren Scheibe so angebracht, dass die Enden A und B einander sehr nahe liegen, ohne einander zu berühren (Fig. 2). Der Strom der Elemente E (Fig. 2) wird den Drahtenden A und B durch Vermittelung von Schleifringen und Bürsten (A_1 und B_1) zugeführt.[1] Der feststehende Schleifcontact C, der bei Drehung der Scheibe auf dem Drahte AB schleift, ist mit dem einen Pole der Ablenkungsspule S verbunden; der andere Pol der Spule steht in Verbindung mit der Bürste A_1 und dadurch mit A.

Wird die Axe der Scheibe nun fest mit dem Dynamoanker verbunden, so entspricht derselben Stellung des Ankers auch stets dieselbe Stellung der Scheibe gegenüber dem Schleifcontact C. Die Wechselstromcurve auf dem Schirm der Braun'schen Röhre muss sich also bei jeder Umdrehung der Maschine in genau derselben Weise wiederholen.

Ist der variable Strom, dessen Curve aufgenommen werden soll, nicht der Wechselstrom einer Dynamomaschine, so muss die Anordnung entsprechend abgeändert werden (vgl. unten § 12 b).

B. Die praktische Ausführung.

6.

Construction der Kathodenstrahlenröhre.

Die erste Aenderung, die ich an der Braun'schen Röhre anbrachte, war ein zweites Glasdiaphragma D_2[2] (Fig. 3). Man gewinnt dadurch den Vortheil, dass man nach Belieben durch Ablenkung mit einem Magneten das ganze Kathodenstrahlenbündel, welches vom ersten Diaphragma D_1 ausgeschnitten wird, durch das zweite Diaphragma hindurchsenden kann oder nur einen Theil desselben. Man kann auf diese Weise den Luminescenzfleck grösser oder kleiner und damit auch die Wechselstromcurve kräftiger (für Demonstrationszwecke) oder feiner (für photographische Aufnahmen) gestalten.

Eine beträchtliche Unbequemlichkeit dieser Röhren bestand aber darin, dass die photographischen Aufnahmen sehr

1) Die stromführenden Theile sind in Fig. 2 schraffirt.

2) Die von mir verwandten Röhren sind sämmtlich von Dr. H. Geissler's Nachf. (F. Müller) in Bonn angefertigt worden.

lange Zeit in Anspruch nehmen. Curven von der Grösse der Fig. 8 erforderten eine Expositionsdauer von ungefähr 10 Min. Es gelang durch Aenderung in der Construction der Röhre die Expositionsdauer auf wenige Secunden[1]), bei raschester Rotation der zum Betrieb der Röhre verwandten Töplermaschine und bei nicht zu grosser Ausdehnung der Curven auf Bruchtheile einer Secunde herunterzudrücken.

Diese Aenderung bestand einmal darin, dass der Raum hinter der Kathode in der in Fig. 4 abgebildeten Weise abgeschlossen wurde. Es wurde dadurch erreicht, dass man mit den höchsten Tourenzahlen der Töplermaschine arbeiten konnte, ohne dass die Entladung in der Röhre flackerte und die Curven

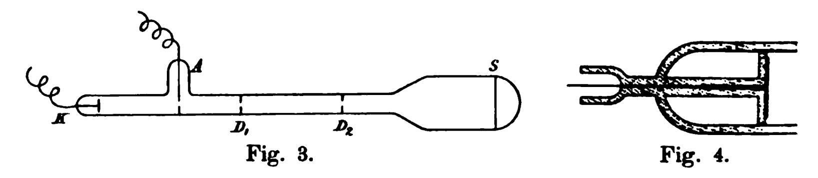


Fig. 3. Fig. 4.

unscharf wurden. Bei der in Fig. 3 dargestellten Röhre hatte man die Tourenzahl sehr niedrig halten müssen, da sonst die Kathodenstrahlen und damit die Curven — und zwar, wie es scheint, infolge von Entladungen hinter der Kathode zwischen Kathode und Glaswand — unregelmässig wurden.[2])

Dann wurde der Schirm in der Braun'schen Röhre, für den ursprünglich Glimmer benutzt worden war, aus Glas hergestellt, da Glimmer die ultravioletten Strahlen in bedeutend höherem Maasse absorbirt als Glas.

Endlich versuchte ich die bisherige verwandte luminescirende Substanz (CaS) durch eine andere zu ersetzen, deren Luminescenzlicht eine bessere photographische Wirkung ergeben sollte. Calciumwolframat, das nach W. Arnold[3]) starke

1) Bei den unten beigegebenen Wechselstromcurven, bei deren Aufnahme die Töplermaschine nicht annähernd die maximale Tourenzahl hatte, betrug die Expositionsdauer 6–20 sec; bei maximaler Tourenzahl genügt für denselben Zweck eine Exposition von 1—2 sec.

2) Von den Röhren, deren Kathode die in Fig. 3 abgebildete Form hat, hielt allerdings *eine* auch die stärksten Entladungen aus, ohne zu flackern.

3) W. Arnold, Wied. Ann. **61.** p. 313 ff. 1897.

Kathodoluminescenz zeigt, musste wegen der bekannten Verwendung dieser Substanz in der Röntgenphotographie für den vorliegenden Zweck als besonders geeignet erscheinen. Ein Vergleich zwischen CaS und $CaWO_4$ führte zu folgendem Ergebniss. Bei sehr starker Entladung, unter deren Einfluss das CaS-Licht nahezu weiss, nur wenig grünlich ist, ist die photographische Wirkung des CaS-Lichtes derjenigen von $CaWO_4$ sicher ebenbürtig. Bei schwacher Luminescenz dagegen, sei es infolge schwacher Entladung, sei es infolge davon, dass der Luminescenzfleck sich mit grosser Geschwindigkeit auf dem Schirme bewegt, ist das CaS-Licht stark grünlich und dann viel weniger photographisch wirksam als das Luminescenzlicht von $CaWO_4$. Ich habe deshalb die letzte Röhre, mit deren Hülfe ich alle unten beigegebenen Photographien gewonnen habe, mit einem $CaWO_4$-Schirm versehen lassen.

7.

Der Betrieb der Kathodenstrahlenröhre.

Zum Betrieb der Röhre habe ich fast ausschliesslich eine 20plattige Töplermaschine verwandt, die durch einen kleinen Wassermotor getrieben wurde. Eine Töplermaschine ist für den vorliegenden Zweck auch wohl am besten geeignet. Wo eine solche nicht zur Verfügung steht, kann an Stelle davon sehr gut jede Holtz'sche Influenzmaschine benutzt werden. Zu gebrauchen sind auch die kleinen selbsterregenden Influenzmaschinen; eine mit einer einzigen drehbaren Glasscheibe von 25 cm Durchmesser, ebenso grössere Whimshurstmaschinen eigneten sich noch zum Betrieb der Röhre jedenfalls für Demonstrationszwecke.

Der Betrieb durch ein Inductorium mit gut functionirendem Deprez- oder besser Wehneltunterbrecher hat den Vortheil, dass sich damit ein sehr kräftiges Luminescenzlicht erzeugen lässt. Er besitzt aber den beträchtlichen Nachtheil, dass die Entladung stark intermittirend ist und das Curvenbild nicht so scharf und ruhig wird, wie bei der Influenzmaschine.

Auch den Wechselstrom der Centrale (118 Volt 100 Wechsel in der Secunde), der in einem Inductionsapparat auf hohe Spannung transformirt worden war, habe ich versuchsweise benutzt. Er liefert eine sehr kräftige und auch verhältniss-

mässig ruhige Luminescenz, die Röhre erhitzte sich dabei aber trotz Vorschaltung sehr grosser $ZnSO_4$-Widerstände in bedenklicher Weise.

8.

Die Ablenkungsspulen.

In 2. und 3. war stets nur von einer einzigen horizontalen und einer einzigen verticalen Ablenkungsspule die Rede. Thatsächlich ist es nicht zulässig, je nur eine einzige Spule zu verwenden. Da nämlich das magnetische Feld einer einzigen Spule nicht im geringsten homogen ist, so passiren die einzelnen Theile des Kathodenstrahlenbündels Stellen, wo die Feldstärke nach Grösse und Richtung verschieden ist. Die Folge davon ist, dass der Luminescenzfleck auf dem Schirm der Röhre nicht mehr kreisförmig bleibt und deshalb die einzelnen Theile der Wechselstromcurve sehr ungleichmässig dick werden. Fast vollständig lässt sich dieser Fehler vermeiden, wenn man je ein Paar von gleichen Spulen einander zu beiden Seiten der Röhre gegenüberstellt.

Die von mir gebrauchten Spulen, von denen ich von jeder Art ein Paar, von Nr. 2 zwei Paare besass, hatten ungefähr

Nr. 1	265	Windungen,	0,24	Ohm Widerstand
Nr. 2	1740	„	6,14	„ „
Nr. 3	16400	„	1045	„ „

Die Dimensionen waren im übrigen bei allen gleich, nämlich: Länge 10 cm, Durchmesser der äussersten Wickelung 5 cm, der innersten 1,5 cm.

Die Spulen, welche mit dem linearen Strom beschickt wurden, waren ein Paar Nr. 2.

Mit Eisenkernen dürfen die Spulen wegen der Hysteresis- und Remanenzerscheinungen unter keinen Umständen versehen werden. Selbst Kerne aus feinstem, gut ausgeglühten und isolirten Eisendraht (Blumendraht) erwiesen sich als durchaus unbrauchbar.

Ausser den genannten Spulenpaaren verwendete ich ein drittes mit einem Eisenkerne, durch welches der constante Strom irgend eines Elementes mit vorgeschaltetem Widerstand geschickt wurde. Es hatte den Zweck, die Curve auf jeden

beliebigen Theil des Schirmes zu legen und damit eine bessere Ausnutzung des ganzen Schirmes zu ermöglichen.

9.

Der Apparat zur Erzeugung eines linearen Stromes.

Die Construction des Apparates, wie er nach mannichfachen Vorversuchen vom Mechaniker Bosch in Strassburg i. E.[1]) angefertigt wurde, ist aus der Abbildung (Fig. 5) wohl ohne weiteres zu entnehmen und mit Hülfe der Fig. 2 auch leicht verständlich.

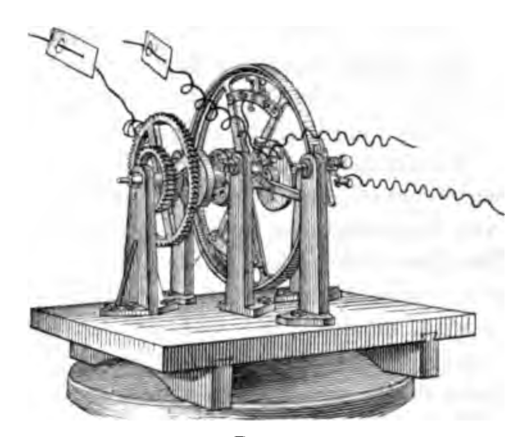


Fig. 5.

Der Draht *A B* (Figg. 1 u. 2) ist ersetzt durch einen Streifen dünnen Blechs von 0,1 mm Dicke, 4 mm Breite und ungefähr 120 cm Länge.[2]) Der Blechstreifen liegt auf einer aus einer isolirenden Substanz gefertigten Scheibe in einer ungefähr 1 mm tiefen Nuthe. Die Scheibe selbst ist an ein Messingrad angeschraubt. Die Befestigung des Blechstreifens

1) Der Apparat kann, mit einigen Aenderungen versehen, die sich im Laufe der Versuche als zweckmässig herausgestellt hatten, von demselben bezogen werden.

2) Das Blech („Widerstandsblech") wurde mir von den westfälischen Nickelwalzwerken Fleitmann, Witte & Co. in Schwerte (Westfalen) zur Verfügung gestellt und hat sich trotz der starken mechanischen und elektrischen Beanspruchung sehr gut bewährt. Der Widerstand (ca. 1,3 Ohm für 1 m Länge) ist sehr gleichmässig.

in den Punkten *A* und *B* (Fig. 2) ist derart, dass der Streifen leicht durch einen neuen ersetzt werden kann.

Der Schleifcontact *C* (Fig. 2), von dessen tadellosem Funktioniren die Sauberkeit der Curven in hohem Maasse abhängt, bekam die in Figg. 6a u. 6b abgebildete Form. Der Theil *MN* ist eine kleine Dynamobürste, *PQ* ist ebenfalls ein Stück einer solchen und an *MN* angelöthet.

Der Strom (2—4 Accumulatoren) wird durch die in Fig. 5 links oben befindlichen und mit Papierstreifen versehenen Drähte — die in Fig. 5 nach rechts unten verlaufenden Drähte gehen zu den Ablenkungsspulen — den beiden kleinen Dynamobürsten und durch diese den beiden Schleifringen A_1, B_1 (Fig. 2) zugeführt. An letztere sind Kupferdrähte angelöthet, welche die Ringe mit den Enden des Blechstreifens verbinden.

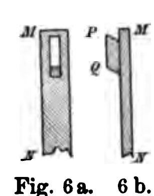


Fig. 6a. 6b.

In Nebenschluss zu den Punkten *C* und *B* (Fig. 2) wurde eine Reihe von hintereinander geschalteten Zellen C—H_2O—C gebracht. Der Zweck derselben ist der, den Funken, welcher sich an dieser Stelle bildet, wenn der Strom *ASC* (Fig. 2) unterbrochen wird, möglichst zu verkleinern. Ehe diese Vorsichtsmaassregel getroffen war, wurde der Streifen an dieser Stelle mehrmals durch den Funken durchgefressen.

Um die Verbindung des Apparates mit dem Anker der Wechselstrommaschine möglichst fest zu machen, was bei der langen Expositionszeit, die ich anfänglich nöthig hatte, unumgänglich war, wurde dieselbe durch Zahnräder bewerkstelligt. Zwei derselben, das grössere mit doppelter Zahnzahl wie das kleinere, sind in Fig. 5 sichtbar. Das dritte von derselben Grösse wie das kleinere in Fig. 5 sitzt auf einem in die Axe der Dynamomaschine eingedrehten Zapfen. Bei Benutzung des grösseren Zahnrades erhält man auf dem Schirm der Braun'schen Röhre zwei Perioden des Wechselstromes, nicht nur eine wie in den unten stehenden Figuren.

Jetzt, nachdem für die photographischen Aufnahmen der Curven nur noch wenige Secunden nöthig sind, würde wohl eine Verbindung des Apparates mit der Dynamomaschine vermittelst Schnur- oder Riemscheibe genügen.

C. Genauigkeit und Verwendbarkeit der Methode.

10.

Die Genauigkeit der Methode.

Die Genauigkeit der Methode hängt ab:

a) davon, ob die Ablenkung des Fleckes der Stärke des magnetischen Feldes zwischen den Spulen bez. des elektrischen Feldes zwischen den Condensatorplatten[1]) genau proportional ist,

b) davon, ob der unter 9. beschriebene Apparat einen genau der Zeit proportionalen Strom liefert.

Dass die Ablenkung des Luminescenzfleckes durch das elektrische Feld zwischen den Condensatorplatten der Stärke dieses Feldes jedenfalls sehr annähernd proportional ist, wurde schon von Ebert l. c. angegeben. Zu zeigen ist also nur noch, dass bei Verwendung von Ablenkungsspulen die Ablenkung des Fleckes der Intensität des Stromes in den Spulen proportional ist. Der Beweis lässt sich in der Weise führen, dass man durch die Spulen einen Strom von beliebiger Intensität hindurchschickt, dann einen solchen von doppelter Intensität, dann einen solchen von 3 facher etc. Bei jeder der verschiedenen Intensitäten bekommt der Fleck eine andere Stellung auf dem Schirm und alle verschiedenen Stellungen werden auf dieselbe Platte photographirt. Ist die Ablenkung genau der Stromstärke proportional, so muss man eine Reihe von Flecken erhalten, welche untereinander genau denselben Abstand haben. Die Fig. 7, die in der angegebenen Weise aufgenommen wurde, zeigt, dass die Abstände thatsächlich fast genau gleich sind, die Ablenkung des Luminescenzfleckes also innerhalb der Grenzen, die hier überhaupt in Betracht kommen, der Stromstärke proportional ist.

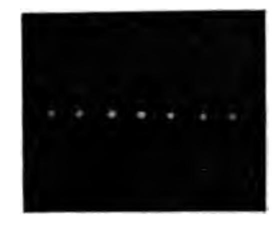


Fig. 7.

Die Frage, ob der unter 9. beschriebene Apparat einen genau der Zeit proportionalen Strom liefert, ist für die Zeiten, in denen der Punkt A (Fig. 2) sich in unmittelbarer Nachbarschaft des Schleifcontactes C befindet, zweifellos zu verneinen,

1) Vgl. p. 838.

schon wegen der Art, in welcher der Blechstreifen befestigt ist und in welcher ihm der Strom zugeführt wird. Dass aber im übrigen der von dem Apparate gelieferte Strom der Länge *AC* (Figg. 1 u. 2) und damit bei gleichmässiger Rotation der Zeit proportional ist, lässt sich bis zu einem gewissen Grade zeigen, indem man den Schleifcontact auf die verschiedenen Stellen des Blechstreifens einstellt und den Strom im Zweige *ASC* (Figg. 1 u. 2) misst. Eine solche Messung ergab bei einer Entfernung des Schleifcontactes *C* von *A* um

$^1/_{12}$	der	ganzen	Länge	*AB*	als	Intensität	0,03	Amp.	Differenz 0,037
$^3/_{12}$	"	"	"	"	"	"	0,067	"	" 0,035
$^5/_{12}$	"	"	"	"	"	"	0,102	"	" 0,039
$^7/_{12}$	"	"	"	"	"	"	0,141	"	" 0,039
$^9/_{12}$	"	"	"	"	"	"	0,180	"	" 0,039
$^{11}/_{12}$	"	"	"	"	"	"	0,219	"	

Die Proportionalität ist also für den vorliegenden Zweck durchaus genügend. Allerdings werden diese Verhältnisse, wenn der Apparat in Bewegung ist, durch die Selbstinduction der Ablenkungsspulen etwas modificirt. Man überzeugt sich indess durch Rechnung leicht, dass bei den Dimensionen meiner Spulen eine wesentliche Aenderung nicht eintreten kann.

Die Genauigkeit der Methode ist also, soweit sie von den erwähnten Factoren abhängt, vollkommen ausreichend. In anderer Beziehung ist aber die Genauigkeit und Verlässlichkeit bei der Braun'schen und damit auch bei dieser Methode beträchtlich grösser als bei irgend einer anderen. Der Umstand nämlich, dass der Kathodenstrahl für alle hier überhaupt in Betracht kommenden Zwecke als trägheitslos angesehen werden muss, garantirt — worauf schon F. Braun[1]) aufmerksam gemacht hat —, dass der Luminescenzfleck der raschesten Variation des Stromes folgt und z. B. auch die höchsten Oberschwingungen eines Wechselstromes unbedingt richtig registrirt, was von einer Anzahl der sonst gebräuchlichen Wechselstromindicatoren nicht behauptet werden kann. Die grössere Sauberkeit der Curven, die man mit Hülfe dieser letzteren erhält, ist in den meisten Fällen keineswegs der Ausdruck grösserer Genauigkeit.

1) F. Braun, Wied. Ann. **60.** p. 552. 1897.

11.
Grenzen für die Verwendbarkeit der Methode.

Soll nach der angegebenen Methode die Curve eines Stromes aufgenommen werden, so lässt sich für die *Intensität* desselben weder nach oben noch nach unten eine Grenze angeben, bei welcher die Methode versagen würde: man muss nur die Ablenkungsspulen passend wählen. Bei Verwendung der Spulen Nr. 3 und der Röhre von Fig. 3 genügte z. B. schon ein Strom von 0,03 Amp., um den Luminescenzfleck über den halben Schirm weg abzulenken.

Dasselbe gilt, wenn die Curve einer variabeln *Potentialdifferenz* zwischen zwei Polen in der Weise gewonnen werden soll, dass man zwischen die beiden Pole ausser den Ablenkungsspulen hohe inductionsfreie Widerstände einschaltet. Ich habe schon mit den mir zur Verfügung stehenden Spulen Wechselstromcurven aufgenommen, bei denen die effective Spannung zwischen 0,5 und 5000 Volt[1]) variirte. Sollen dagegen Potentialdifferenzen zwischen zwei offenen Polen unmittelbar mit Hülfe von Condensatorplatten nach der beschriebenen Methode registrirt werden, so giebt es nach unten eine Grenze. Bei der Röhre Fig. 3 und bei Benutzung von Condensatorplatten, deren Länge in der Richtung der Röhrenaxe etwa 12 cm betrug, brauchte ich wenigstens 200—300 Volt effective Spannung, um eine für Curvenaufnahmen genügende Ablenkung zu bekommen. Jedoch liegt nichts im Wege, diese Grenze wesentlich herunterzudrücken dadurch, dass man den Theil der Röhre zwischen Schirm und dem zweiten Diaphragma verlängert.

Eine gewisse Grenze für die Verwendbarkeit der Methode in derjenigen Form, in welcher sie oben beschrieben wurde, liegt in der *Geschwindigkeit*, welche dem Luminescenzfleck durch den linearen Strom bei Benutzung des unter 9. beschriebenen Apparates ertheilt werden kann. Macht der Apparat 600 Touren pro Minute, so erhält bei meiner Anordnung der Luminescenzfleck eine Geschwindigkeit von etwa 1 m/sec. Diese Geschwindigkeit würde bei einem Wechselstrom von 200 Wechseln in der Secunde noch eine brauchbare Photographie ergeben,

1) Wobei grosse $ZnSO_4$-Widerstände in dünnwandigen Glasröhren mit Kaltwasserspülung vorgeschaltet waren.

reicht·also für die praktisch gebrauchten Wechsel- oder Mehrphasenströme vollkommen aus. Allein, wenn sich diese Geschwindigkeit durch eine bessere Anordnung auch noch auf das 3—4 fache steigern lässt, so genügt sie doch für Stromschwankungen von einigen 1000 Wechseln in der Secunde nicht.

Man kann sich in diesem Falle helfen, indem man den unter 9. beschriebenen Apparat durch eine Wechselstromdynamomaschine ersetzt. Die Stromcurve der praktisch gebrauchten Wechselstrommaschinen verläuft nämlich, jedenfalls wenn man genügende Selbstinduction vorschaltet, in der Nähe der Abscissenaxe ziemlich linear (vgl. Figg. 8 u. 9). Nimmt

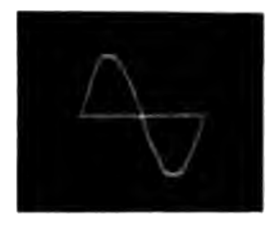




Fig. 8.



Fig. 9.

man also an Stelle des oben beschriebenen Apparates einen beliebigen Wechselstromgenerator und entnimmt man demselben einen genügend starken Strom, so lässt sich leicht erreichen, dass die Ablenkung des Kathodenstrahlenbündels in denjenigen Zeitintervallen, in denen es den luminescirenden Schirm überhaupt trifft, der Zeit proportional, die Geschwindigkeit des Luminescenzfleckes also eine gleichförmige ist.[1]) Bei dieser Anordnung kann dann aber auch eine Grenze für die Geschwindigkeit des Fleckes nicht angegeben werden, da dieselbe nicht nur der Wechselzahl des Wechselstromes, sondern auch der Intensität desselben proportional ist und da ausserdem in diesem Falle in den verticalen Spulen die Wirkung unbedenklich durch Eisenkerne verstärkt werden kann. Sicherlich lassen sich auf diese Weise rasche Stromschwankungen eben so weit analysiren, als mit dem rotirenden Spiegel.

Eine Voraussetzung ist dabei aber immer vorhanden — und diese bildet eine thatsächliche Beschränkung für die Ver-

1) Vgl. Fig. 14.

wendbarkeit der Methode zu photographischen Aufnahmen —: es muss möglich sein, die Anordnung so zu treffen, dass die Curve sich mehrmals auf dem Schirm in genau derselben Weise wiederholt.

12.

Beispiele.

a) Die Fig. 8 zeigt die Stromcurve einer Vierphasenstrommaschine[1]), wenn dieselbe nicht merklich belastet ist. Die Abscissenaxe ist hier wie in den folgenden Figuren dadurch gewonnen, dass der Strom in dem horizontal gestellten Spulenpaar unterbrochen wurde. Fig. 9 ist die Curve, welche man bei sonst gleichen Verhältnissen erhält, wenn man mit hoher



Fig. 10.

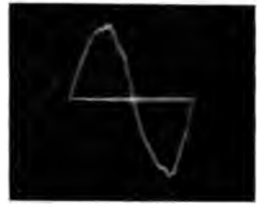


Fig. 11.

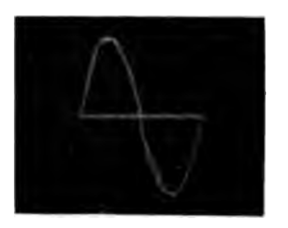


Fig. 12.

Selbstinduction (Drosselspulen) belastet: die Curve ist mehr sinusförmig als Fig. 8 und zeigt ausserdem gegenüber dieser letzteren eine nicht unbeträchtliche Phasenverschiebung — der Punkt, in welchem die Intensität durch Null hindurchgeht, fällt nicht mehr mit dem Anfang der Abscissenaxe zusammen —. Deutlicher und anschaulicher wird die Phasenverschiebung noch, wenn man beide Curven auf dieselbe Platte bei derselben Stellung des photographischen Apparates photographirt (Fig. 10); aus der Verschiebung der beiden Curven, gemessen auf der Abscissenaxe, lässt sich der Phasenwinkel unmittelbar bestimmen.

In Fig. 11 ist die Veränderung ersichtlich, welche die Stromcurve irgend einer Phase erleidet, wenn die um 90° dagegen verschobene Phase der Maschine stark belastet wird. Fig. 12 unterscheidet sich davon nur dadurch, dass die belastete Phase nicht die um 90°, sondern die um 180° diffe-

1) Gleichstrommaschine der Allgemeinen Elektricitäts-Gesellschaft, die auch für die Abgabe von Vierphasenstrom eingerichtet ist.

rirende ist. Sie besitzt gegenüber der Curve der unbelasteten Maschine (Fig. 8) kaum merkliche Unterschiede.

b) Die Figg. 13 u. 14 stellen die Curven des Oeffnungs- und Schliessungsextrastromes in der secundären Wicklung eines Inductoriums dar, und zwar Fig. 13, wenn der lineare Strom von dem unter 9. beschriebenen Apparat, Fig. 14, wenn er von der unter a) besprochenen Wechselstrommaschine[1]) geliefert wird. In beiden Curven ist da, wo sie abbrechen, je ein verticales Stück zu ergänzen (vgl. Fig. 13a); dasselbe war auf dem Schirm schwach, aber vollkommen deutlich zu sehen, es war aber nicht hell genug, um bei der photographischen Aufnahme zum Vorschein zu kommen.

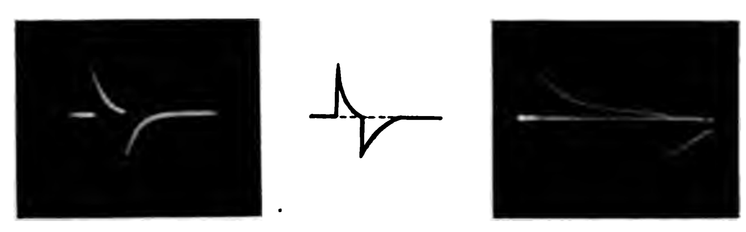


Fig. 13. Fig. 13a. Fig. 14.



Fig. 15.

Die Anordnung war in diesem Falle so getroffen, dass an dem Apparate (Fig. 5) bez. an dem Anker der Wechselstrommaschine ein kleines Anschlagsstück befestigt war. Dasselbe unterbrach bei jeder Umdrehung durch Aufschlagen eines Morsetasters den primären Strom des Inductoriums und schloss ebenso diesen Strom wieder, indem es den Taster wieder zuschlagen liess.

c) In Fig. 15 endlich ist eine *Hysteresisschleife* eines dünnen Eisendrahtes abgebildet. Sie wurde in folgender Weise

1) Vgl. p. 850.

gewonnen. Der von dem Apparat (Fig. 5) gelieferte lineare Strom wurde getheilt. Ein Theil desselben wurde durch das oben erwähnte verticale Spulenpaar geschickt, der andere Theil durch das horizontale Spulenpaar, in das ein Bündel aus feinen Eisendrähten geschoben war. Die horizontale Ablenkung des Luminescenzfleckes wird also proportional der Stromintensität, die verticale der in den Drähten durch den Strom erzeugten Induction. Man dreht dann den Apparat in der einen Richtung, sodass der von ihm gelieferte Strom von Null bis zu einem gewissen Betrage anwächst und dreht ihn dann ebenso zurück; der Luminescenzfleck beschreibt dann eine Hysteresisschleife.

Die Methode gestattet also auch eine sehr einfache Aufnahme von Hysteresiscurven. Es würde sich nur empfehlen, wenn die Methode ausschliesslich dafür verwandt werden sollte, den Apparat Fig. 5 durch einen für diesen Zweck günstiger construirten zu ersetzen.

Die angeführten Beispiele genügen wohl, um die Brauchbarkeit der Methode für die verschiedensten Zwecke zu erläutern. Nur eines möchte ich noch hinzufügen. Schon bei verhältnissmässig geringen Tourenzahlen ist das Bild, welches sich, besonders wenn man sich etwas von der Kathodenstrahlenröhre entfernt, dem Auge darbietet, *die Stromcurve, welche als hellleuchtende, scharf begrenzte und unbewegliche Linie* von dem dunkeln Hintergrunde sich abhebt. Die beschriebene Methode ist damit in hervorragender Weise geeignet zur Demonstration der meisten Erscheinungen, welche für die Erzeugung und Wirkung variabler Ströme in Betracht kommen.

Für die Anregung zu der Arbeit bin ich Hrn. Prof. Dr. F. Braun zu grossem Danke verpflichtet.

Strassburg i. E., Physikalisches Institut.

(Eingegangen 26. September 1899.)

---

12. *Ermittelung der Oberschwingung eines Drehstromes; von J. Zenneck.*

Je mehr die Intensitätscurve eines Drehstromes von der Sinusform abweicht, um so grösseres, praktisches und theoretisches, Interesse besitzen die Fragen:

1. Welches ist die hauptsächlich zur Geltung kommende Oberschwingung?

2. Wie gross ist ihre Amplitude im Verhältniss zur Grundschwingung?

Die Beantwortung dieser Fragen ist selbst dann, wenn man die Stromcurve kennt, ohne besondere Hülfsmittel zum mindesten umständlich. Sie wird sehr einfach bei Benutzung der folgenden Anordnung.

Der Drehstrom soll als Vierphasenstrom angenommen werden. Man schickt dann eine Phase desselben durch ein Paar von Spulen mit gemeinsamer Axe, ebenso eine zweite, um 90° dagegen verschobene Phase gleicher Amplitude durch ein eben solches Spulenpaar, dessen Axe senkrecht zu derjenigen des ersten Spulenpaares steht (Fig. 1). In den Schnittpunkt der beiden Spulenaxen bringt man eine Braun'sche Röhre mit der Axe senkrecht zur Ebene der beiden Spulenaxen.

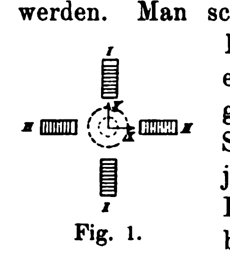


Fig. 1.

Ist die n^{te} Oberschwingung die hauptsächlich in Betracht kommende, so lässt sich die Intensität i_{I} bez. i_{II} des Stromes in den Spulen I und II ausdrücken durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} i_{\text{I}} = A \sin \nu t + B \sin n \nu t, \\ i_{\text{II}} = A \cos \nu t + B \cos n \nu t, \end{cases}$$

in welchen t die Zeit, die übrigen Grössen Constante bezeichnen. Da die Ablenkung des Luminescenzfleckes auf dem Schirm der Braun'schen Röhre der Intensität des Stromes

in den Spulen proportional ist[1]), so bekommt der Fleck Bewegungscomponenten in der x- und y-Richtung (Fig. 1) von der Form:

$$(2)[2]) \quad \begin{cases} x = a \sin \nu t + b \sin n \nu t, \\ y = a \cos \nu t + b \cos n \nu t. \end{cases}$$

Für die Curve, welche der Fleck beschreibt, gilt:

$$(3) \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + 2 a b \cos (n - 1) \nu t$$

oder, wenn die Amplitude b der Oberschwingung gegenüber derjenigen der Grundschwingung a als klein betrachtet werden darf, was wohl thatsächlich stets zulässig ist:

$$(4) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = a + b \cos (n - 1) \nu t.$$

Da ausserdem

$$(5) \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \text{approx. } \nu t$$

und

$$(6) \quad \frac{b}{a} = \frac{B}{A},$$

so lässt sich Gleichung (4) folgendermaassen interpretiren. Ist die n^{te} Oberschwingung die ausschliesslich oder hauptsächlich zur Geltung kommende, so kann man sich die Curve, welche der Luminescenzfleck beschreibt, entstanden denken dadurch, dass auf einer Kreisperipherie als Abscisse $n - 1$ Perioden einer Sinuslinie aufgetragen wurden, deren Amplitude (b) zum Radius des Kreises (a) sich verhält wie die Amplitude der Oberschwingung (B) zu derjenigen der Grundschwingung (A). Ist z. B. die fünfte Oberschwingung vorhanden und ist ihre Amplitude $^1/_8$ derjenigen der Grundschwingung, so muss die Curve, welche man erhält, die in Fig. 2 ausgezogene sein.

---

1) Vgl. p. 847.

2) Liegt nicht Vier-, sondern Dreiphasenstrom vor, dessen drei Phasen man durch drei um je 120° gegeneinander geneigte Spulen schickt, so gelangt man für die x- und y-Componenten des entstehenden Drehfeldes ebenfalls auf die Gleichungen (2). Es ist also für das Folgende gleichgültig, ob man es mit Vier- oder Dreiphasenstrom zu thun hat.

Bekommt man umgekehrt durch die oben beschriebene Anordnung die Curve (Fig. 2), so können mit Hülfe dieser Curve die anfangs aufgestellten Fragen unmittelbar beantwortet werden:

Fig. 2.

1. Die Anzahl der Ausbuchtungen A_1 bis $A_4 = 4 = (n - 1)$ zeigt, dass die in Betracht kommende Oberschwingung die um eins höhere *fünfte* ist.

2. Das Verhältniss der Amplitude der Oberschwingung zu derjenigen der Grundschwingung erhält man, indem man den Radiusvector an der Stelle der stärksten Einbuchtung (B) auf $O A_1$ abträgt, gleich $O C$, und $A_1 C$ in D halbirt. Es ist dann

$$O D = a\,, \quad C D = D A_1 = b\,.$$

Es verhält sich also die Amplitude der Oberschwingung zu derjenigen der Grundschwingung wie $C D : O D$ oder wie $b : a$.

Wendet man das vorgeschlagene Verfahren auf die hier im Institut befindliche Drehstrommaschine[1]) an, deren Strom-

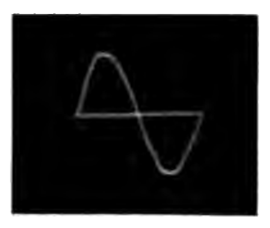


Fig. 3.

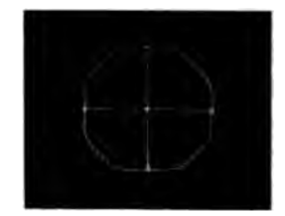


Fig. 4.

curve diejenige von Fig. 3[2]) ist, so erhält man die Fig. 4. Die Anzahl der Ausbuchtungen (gleich 8) zeigt, dass die zur Geltung kommende Oberschwingung die *neunte* ist, und die Ausmessung in der eben angegebenen Weise ergiebt als Ver-

1) Gleichstromdynamo auch zur Abgabe von Vierphasenstrom eingerichtet.

2) Photographische Aufnahme nach der p. 838 ff. vorgeschlagenen Methode.

hältniss ihrer Amplitude zu derjenigen der Grundschwingung im Mittel ungefähr 1:36. Der Wechselstrom lässt sich also darstellen durch die Gleichung

$$i = A\left(\sin \nu t - \frac{1}{36} \sin 9 \nu t\right).$$

Das bisherige beruhte auf der Voraussetzung, dass nur *eine* Oberschwingung vorhanden sei, oder wenigstens die Amplitude einer Oberschwingung diejenigen aller anderen weit überrage. Sind die Amplituden *mehrerer* Oberschwingungen ungefähr von derselben Grössenordnung, so treten an Stelle der Gleichungen (1) und (4) die folgenden:

$$(1\,a) \qquad i = A \sin \nu t + \sum_n B_n \sin n \nu t,$$

$$(4\,a) \qquad r = a + \sum_n b_n . \cos (n - 1) \nu t.$$

Die Curve also, welche in diesem Falle auf dem Kreis vom Radius a aufgezeichnet erscheint, unterscheidet sich von der Stromcurve (1a) dadurch, dass die Grundschwingung ausgeschaltet und die Ordnung jeder Oberschwingung um eins erniedrigt ist. Die angegebene Methode liefert dann nicht ohne weiteres die Oberschwingungen selbst, bleibt aber auch in diesem Falle ein sehr *empfindliches Reagenz auf das Vorhandensein von Oberschwingungen.*

Strassburg i. E., Physikalisches Institut.

(Eingegangen 26. September 1899.)

---

13. *Die Transformation eines Wechselstromes auf doppelte Wechselzahl mit Hülfe eines ruhenden Transformators; von J. Zenneck.*

Für eine Reihe von Versuchen liegt das Bedürfniss nach einem Wechselstrom von hoher Wechselzahl vor, der gleichzeitig verhältnissmässig constante Amplitude und beträchtliche Energie besitzen sollte. Dieses Bedürfniss ist in *einfacher* Weise durchaus nicht zu befriedigen, sobald die gewünschte Wechselzahl diejenige der praktisch gebrauchten Wechsel- und Drehstromgeneratoren übersteigt.

Steht indess schon ein Wechsel- oder Drehstrom zur Verfügung, so giebt es ein sehr einfaches Verfahren, um denselben

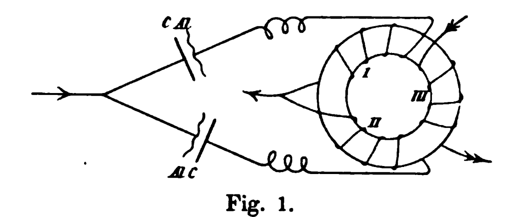


Fig. 1.

und zwar mit Hülfe eines ruhenden Transformators auf doppelte Wechselzahl zu transformiren.

Die *Anordnung* ist wohl aus Fig. 1 ohne weiteres verständlich. Der zu transformirende Wechselstrom wird verzweigt. In jeden Zweig ist eine Graetz'sche Kohle-Alaun-Aluminiumzelle eingeschaltet und zwar in den einen Zweig mit der Richtung C-Al, in den anderen mit der Richtung Al-C. Jeder der Zweige setzt sich in eine Wickelung eines Transformators (I und II Fig. 1) fort. Aus einer dritten Wickelung (III Fig. 1) desselben Transformators kann dann der auf doppelte Wechselzahl transformirte Wechselstrom abgenommen werden.

Bei der *Erklärung* der Wirkungsweise dieser Anordnung soll der Einfachheit wegen angenommen werden, dass der verwandte Wechselstrom genau sinusförmig ist, dass die Kohle-Aluminiumzelle den Strom nur in einer Richtung durchlässt

und zwar ohne im übrigen die Stromcurve zu verändern, und dass der Transformator hysteresisfrei ist.

Dann ist die durch den Zweig I allein in dem Transformator erzeugte Induction während einer vollen Periode des ursprünglichen Wechselstromes von der Form der Fig. 2, während Fig. 3 dasselbe darstellt für den Fall, dass die Induction nur

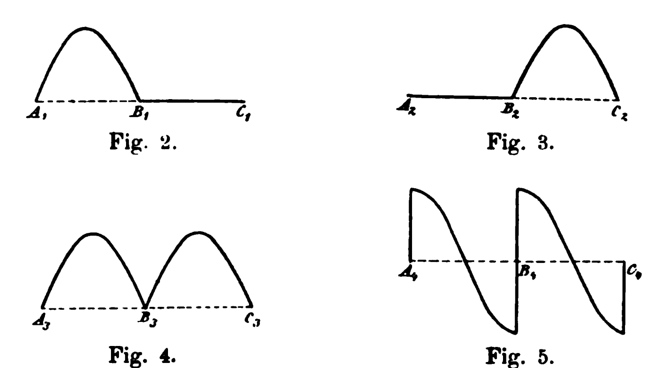


Fig. 2. Fig. 3.

Fig. 4. Fig. 5.

durch den Zweig II hervorgerufen wird. Sind beide Zweige gleichzeitig wirksam, so ist die Induction im Transformator von der Form der Fig. 4, d. h. sie besitzt während *einer* Periode des ursprünglichen Wechselstromes *zwei* Maxima.

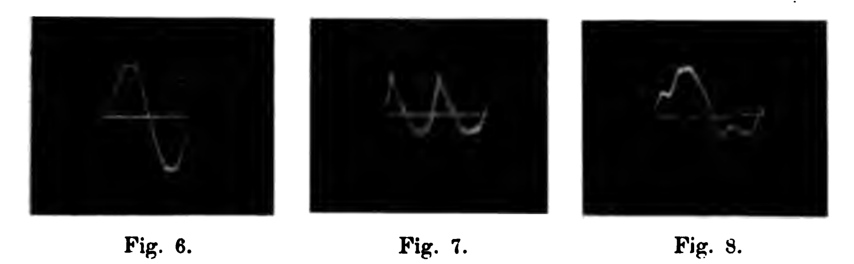


Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8.

Dasselbe gilt dann für die in der Wickelung III inducirte elektromotorische Kraft, deren Curve unter den gemachten Annahmen diejenige von Fig. 5 ist. Das Resultat ist also in Wickelung III ein — allerdings nicht sinusförmiger — Wechselstrom doppelter Wechselzahl.

Wenn die gemachten Voraussetzungen nicht genau zutreffen, so tritt an Stelle der Fig. 5 eine andere Curve, am Wesen der Sache wird aber nichts geändert. Ich erhielt z. B.

mit einem Wechselstrom, dessen Stromcurve in Fig. 6[1]), abgebildet ist, einen solchen doppelter Wechselzahl von der Form der Fig. 7.

Der *Wirkungsgrad* der ganzen Anordnung war bei meinen Versuchen ein wenig günstiger. Da es mir nur darauf ankam, zu zeigen, dass man in der angegebenen Weise thatsächlich einen Wechselstrom doppelter Wechselzahl erhält, so war auf besonders günstigen Bau des Transformators kein Werth gelegt worden. Ausserdem liessen die für den Versuch frisch zusammengesetzten C-Al-Zellen verhältnissmässig viel Strom auch in der Richtung C-Al durch, was den Wirkungsgrad sehr beeinträchtigt; überdies deformirten sie auch noch die Stromcurve in sehr ungünstiger Weise — die Stromcurve hatte, wenn die Zelle eingeschaltet war, die Gestalt Fig. 8 —. Da unter günstigen Bedingungen die Ventilwirkung der C-Al-Zellen eine fast vollkommene ist und eine nur unerhebliche Deformation der Stromcurve durch dieselben eintritt, so darf, wenn man ausserdem einen besser gebauten Transformator verwendet, erwartet werden, dass ein viel besserer Wirkungsgrad und ein mehr *sinusförmiger Wechselstrom* doppelter Wechselzahl erreicht werden kann.

Strassburg i. E., Physikal. Institut.

1) Photographirt nach der p. 838ff. angegebenen Methode.

(Eingegangen 26. September 1899.)

14. *Photographische Darstellung von Strom- und Spannungscurven mittels der Braun'schen Röhre; von A. Wehnelt und B. Donath.*

Wir beschreiben nachfolgend eine Versuchsanordnung, welche es gestattet, die im rotirenden Spiegel beobachteten Curven des Luminescenzfleckes der Braun'schen Röhre[1]) photographisch zu fixiren und gleichzeitig die Möglichkeit bietet, die erhaltenen Curvenbilder quantitativ auszuwerthen. Diese Auswerthung ist bei Röhren in der gangbaren Form stets möglich, *da die Ablenkung α des Lichtfleckes für die durch die Grösse des Luminescenzschirmes gegebenen kleinen Ablenkungswinkel praktisch vollkommen proportional der Intensität i des die Indicatorspule durchfliessenden Stromes ist.* Hierfür möge eine beliebig herausgegriffene Messungsreihe veranschaulichend sein.

i	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
α	1,1	1,5	1,9	2,3	2,7	3,1
Ausschlag pro Amp. in cm	0,74	0,75	0,76	0,76	0,77	0,77

Die Röhre muss vor jeder neuen Messungsreihe von neuem geaicht werden, da man den Luftdruck in derselben und als Function desselben das Entladungspotential, sowie auch letzteres an und für sich, nicht als constant betrachten kann und die magnetische Ablenkbarkeit abhängig vom Entladungspotential ist.

Wenn bisher mit der photographischen Fixirung der Curvenbilder unseres Wissens keine befriedigenden Resultate erreicht zu sein scheinen, so ist man wohl an dem Versuch gescheitert, das sehr lichtschwache Bild im rotirenden Spiegel zu photographiren. Wir umgingen daher den Gebrauch desselben ganz.

1) F. Braun, Wied. Ann. 60. p. 553—555. 1897.

Versuchsanordnung.

Dem photographischen Apparat *A* (Fig. 1) gegenüber und etwa soweit von ihm entfernt, dass die Bildgrösse $^2/_3$ des Objectes wird, ist die Braun'sche Röhre *R* aufgestellt. Der Winkel zwischen der optischen Axe des Objectives und der Röhrenaxe wird so klein gewählt, als es die bilderverzerrende Glaswand der Röhre zulässt. Unmittelbar unter der Röhre, in derselben

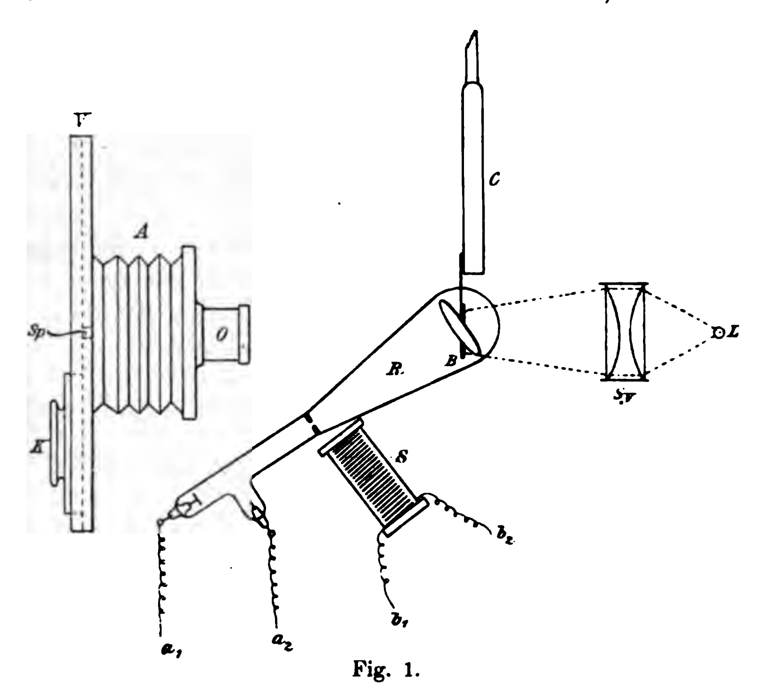


Fig. 1.

Verticalebene mit dem Lichtpunkt auf der luminescirenden Scheibe und normal zur optischen Axe, schwingt vertical eine kleine Aluminiumblende *B*. Sie ist in ihrer Mitte mit einem Loch von etwa 0,3 mm Durchmesser versehen und an der elektromagnetischen Stimmgabel *C* befestigt. Letztere macht 100 Schwingungen in der Secunde. *Sy* ist ein System von 10 cm grossen Beleuchtungslinsen, welches das Licht einer sehr hellen Leuchtquelle *L* so auf die Blende *B* wirft, dass sich bei Nichtvorhandensein der letzteren das convergirende Strahlenbündel in Objectiv *O* schneiden würde. Wird die Röhre erregt.

so erscheint auf der Mattscheibe der blaue Fleck vom Luminescenzschirm und darüber der leuchtende Punkt der Stimmgabelblende. Beim Schwingen der Blende und Arbeiten der Röhre verzerren sich beide Bilder zu Streifen, welche so justirt wurden, dass sie in derselben Verticalebene liegen. S ist eine die Ablenkung des Kathodenstrahlenbündels bewirkende Drahtspule. Die Zuleitungen a_1 a_2 sind mit den Polen einer vierplattigen Influenzmaschine, b_1 b_2 mit dem jeweilig auf seine Beschaffenheit zu untersuchenden Stromkreise verbunden.

Aus den bereits dargelegten Gründen wurde auf eine Auseinanderlegung des Lichtstreifens durch rotirende Spiegel verzichtet. Um das Bild zu verschieben und dabei eine in allen Theilen gleich scharfe Aufnahme zu erhalten, wurde statt dessen eine Schlittenvorrichtung V für die photographische Platte angeordnet. Sie besteht in einem, oben und unten mit Laufnuthen versehenen Brett von etwa dreifacher Kassettenlänge. In einem schmalen Schlitz Sp desselben bewegen sich die Lichtpunkte auf und ab. Diese Verengerung der hinteren Cameraöffnung ist zwar nicht unbedingt nöthig, aber zweckmässig, da sie die aufgezogene, sich anfangs seitlich rechts von dem Schlitz befindliche Kassette K vor Nebenlicht schützt.

Eine Bewegung der Kassette von Hand ist gleichmässig genug, da die gleichzeitig zur Darstellung gelangende Stimmgabelcurve eine Controle und Bewerthung nach der Zeit für jedes Curvenelement gestattet.

Es ist jedoch durchaus erforderlich, dass die Influenzmaschine in sehr gutem Zustande ist und sehr schnell umläuft, um bei grossen Kassettengeschwindigkeiten noch einigermaassen zusammenhängende Curvenbilder zu liefern. Auch so reicht das Licht des Luminescenzfleckes, wennschon seiner blauen Farbe wegen ziemlich aktinisch, bei rapidem Anstieg oder Abfall der Curve kaum aus, um auf der Platte eine Spur zu hinterlassen. Bedingung für das Gelingen ist daher ferner ein lichtstarkes Objectiv und eine hochempfindliche Trockenplatte. Wir verwendeten einen Portraitkopf von $F/3$, welcher für die von uns untersuchten Curven eben ausreichte. Die Aufnahmen wurden auf Schleussner-Momentplatten gemacht und mit Rodinal kräftig entwickelt.

Für die Stimmgabelcurve kann bei der in der Fig. 1

skizzirten Aufstellungsweise Gasglühlicht allenfalls ausreichen; die in der Figur reproducirten Curven wurden jedoch mit Bogenlicht erhalten.

Soll statt der Stromcurve die Spannungscurve erscheinen, so kann man die Ablenkung der Kathodenstrahlen nach dem Vorgange von H. Ebert[1]) durch Condensatorladung erreichen. Doch eignet sich diese Methode nur für relativ hohe Spannungen und wird mit einer für praktische Zwecke genügenden Genauigkeit besser durch die Ablenkung einer Spule von hohem Widerstande ersetzt.

Stehen zwei Influenzmaschinen zur Verfügung, so kann man Strom- und Spannungscurve auch *gleichzeitig* auf derselben Platte fixiren und hierbei die durch Vorhandensein von Selbstinduction oder Capacität im Stromkreise hervorgerufenen Phasenverschiebungen, desgleichen die Erscheinungen bei der Transformation von Wechselströmen etc. untersuchen. Die Stimmgabelvorrichtung fällt dann fort und an ihre Stelle tritt eine zweite Braun'sche Röhre, deren Kathodenstrahlen ihre Ablenkung durch Condensator oder eine Drahtspule von hohem Widerstand erfahren. Die Luminescenzschirme beider Röhren bilden dann etwa einen rechten Winkel und sind vom Objectiv gleich weit entfernt, sodass beide Lichtstreifen auf der Mattscheibe gleich scharf erscheinen. Soll die Phasenverschiebung genau bestimmt sein, so ist darauf zu achten, dass die Lichtstreifen genau in derselben Verticalebene liegen. Die Platte liefert dann beide Curven untereinander und zwar so, dass die senkrecht zur Nulllinie geschnittenen Curvenelemente denselben Zeittheilchen angehören.

Sollen beide Curven nicht untereinander, sondern — was jedenfalls instructiver ist — ineinander verschränkt erscheinen, so lässt sich dies auf zweierlei Weise erreichen, entweder nämlich durch Superposition zweier Abzüge oder durch zwei Objective. Das erstere der beiden Verfahren, nach dem auch die Curve (Fig. 10 der Tafel, p. 866) hergestellt ist, setzt voraus, dass von der Originalplatte zunächst ein Contactabzug wiederum auf einer Platte hergestellt wird, die dann die Curven weiss auf dunklem Grunde zeigt. Diese Platte dient als Matrice für eine Copie

1) H. Ebert, Wied. Ann. **64.** p. 240ff. 1898.

auf sogenanntem Abzieh-Collodium-Papier, dessen Schicht sich nach Fixage, Vergoldung und Auswässerung in warmem Wasser von seiner Papierfolie ablösen und — indem man die letztere vorsichtig unter der Collodiumhaut hervorzieht — auf einer Glasplatte befestigen lässt. Bei einiger Uebung gelingt es leicht, Strom- und Spannungscurve übereinander zu bringen, nachdem dieselben vorher auf der Copie voneinander getrennt sind. Die richtige Lage wird durch Deckung der Nulllinien und einer vor dem Copiren auf der Platte zu ihr gezogenen Normalen erreicht. (Letztere auf der Abbildung sichtbar.) Sind zwei lichtstarke Objective vorhanden, so ist die zweite Methode ihrer Einfachheit halber vorzuziehen. Die von den beiden Röhren herrührenden Lichtstreifen werden durch sie auf der Mattscheibe zur Deckung gebracht und liefern dann auf der bewegten Platte ohne weiteres die ineinander verschobenen Curven. Das Bild auf der Mattscheibe gestattet dann auch eine directe Betrachtung im rotirenden Spiegel.

Von den im Laufe der Versuchsreihen erhaltenen Curven bilden wir auf der beigegebenen Tafel, Figg. 1—10, p. 866 einige der charakteristischsten ab und geben nachfolgend für jede derselben eine kurze Erläuterung.

Erläuterung der Tafel, Figg. 1—10, p. 866.

Fig. 1. *Stromcurve eines Deprezunterbrechers.* Indicatorspule im Stromkreise eines grösseren Inductoriums. Unregelmässiger Gang des Unterbrechers bemerkbar an der verschiedenen Curvenhöhe. In einem Falle zickzackförmiger Anstieg durch schlechten Contact. Relativ langes Aussetzen des Stromes zwischen Oeffnung und Schluss, dargestellt durch die zwischen den einzelnen Aufstiegen horizontal verlaufenden Curvenstücke, welche gleichzeitig die Nulllinie des Curvenbildes darstellen. Während dieser Ruhepausen findet das Ausschwingen des aus Selbstinduction und Capacität bestehenden Systems (die in der Curve auftretenden Verwaschungen am Fusse des Abfalls) statt, wie sie von Hrn. B. Walter nach der Betrachtung im rotirenden Spiegel bereits gezeichnet wurden.[1])

1) B. Walter, Wied. Ann. 62. p. 312. 1897.

Tafel.

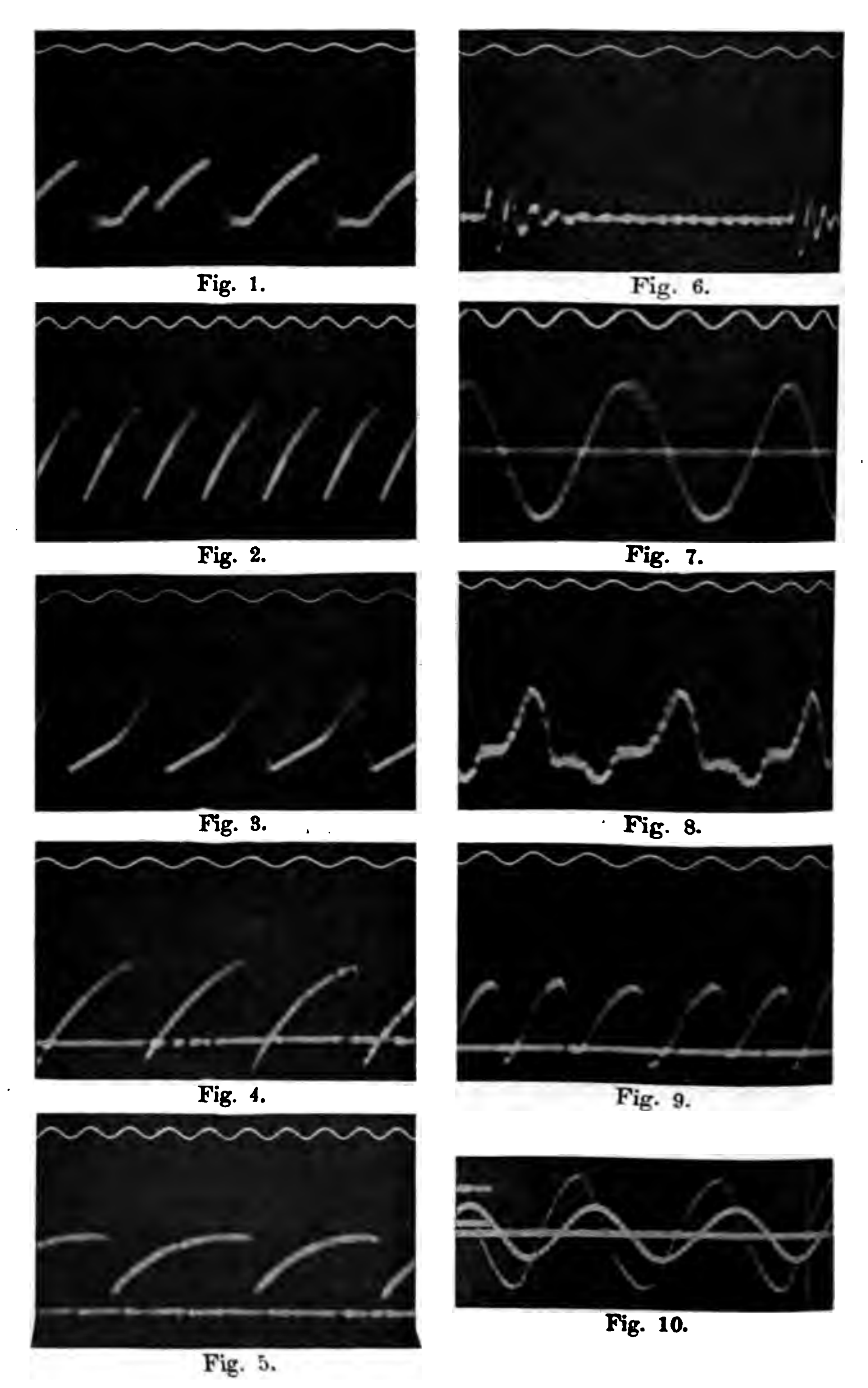


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9. Fig. 10.

Fig. 2. *Stromcurve des elektrolytischen Unterbrechers.* Auch die photographische Fixirung der Curve zeigt im wesentlichen den bereits früher nach der directen Betrachtung im rotirenden Spiegel zeichnerisch dargestellten Verlauf, nämlich Maximalamplituden von gleicher Höhe.[1]) Der Stromabfall erfolgt so rapide, dass er auf der Reproduction nicht erscheint (auf der Originalplatte war er schwach vorhanden). Stromabfall und Anstieg folgen einander unmittelbar, wodurch sich auch (als eine der Ursachen) die höhere effective Stromstärke gegenüber derjenigen der mechanischen Unterbrecher (z. B. Deprezunterbrecher) bei gleicher Funkenlänge (also annähernd gleicher Maximalamplitude des Primärstromes) erklärt. Bemerkenswerth ist das ausserordentlich regelmässige Arbeiten des Unterbrechers.[2])

Fig. 3. *Inductionsspule mit magnetisch übersättigtem Eisenkern im Stromkreise des elektrolytischen Unterbrechers.* Zu beachten ist der Knick im Aufstieg, welcher den Sättigungspunkt im Eisenkern bezeichnet. Er kommt naturgemäss auch im Abfall zur Geltung.

Fig. 4. *Einfluss von Capacität an den Klemmen des elektrolytischen Unterbrechers.*[3]) Der Abfall der Curve reicht bis unter die Nulllinie (letztere erhalten durch Vorbeiziehen der photographischen Platte bei Stromruhe).

Fig. 5. *Selbstinduction und Capacität an den Klemmen des elektrolytischen Unterbrechers.*[4]) Der Abfall reicht nicht bis zur Nulllinie herab.

---

1) A. Wehnelt, Wied. Ann. 68. p. 250. 1899.

2) Hr. Jul. West (Elektrotechn. Zeitschr. 20. p. 747—750. 1899) spricht dem Unterbrecher regelmässiges Arbeiten ab, doch ist seine Versuchsanordnung nicht einwandsfrei, da er die Funkenfolge an der Secundärspule eines Inductoriums als Kriterium benutzt. Nun unterliegt der Widerstand der Funkenstrecke durch abfliegende Metalltheilchen, Wirbel aufsteigender warmer Luft und das durch sie bewirkte fortwährende Ueberspringen der Funkenerscheinung in eine mehr lichtbogenartige Bildung, dauernder Veränderung. Die variable Belastung bewirkt dann ihrerseits eine Aenderung der Selbstinduction in der Primärspule und damit auch eine Aenderung der Unterbrechungszahl. Ein Urtheil über die Regelmässigkeit des Ganges lässt sich daher bei Anwesenheit einer Funkenstrecke nicht gewinnen.

3) Vgl. A. Wehnelt, Wied. Ann. 68. p. 255 u. 256. 1899.

4) l. c.

Fig. 6. *Schwingungen eines Systems bestehend aus Selbstinduction und Capacität.* An den Klemmen des Unterbrechers *U* (Fig. 2) liegen in Hintereinanderschaltung die Selbstinductionsspule *L* (mit Eisenkern), die Capacität *C* und die Ablenkungs-(Indicator)-Spule *S* an der Braun'schen Röhre. Bei Stromöffnung ladet sich der Condensator infolge der an den Klemmen des elektrolytischen Unterbrechers auftretenden hohen Spannung. Unmittelbar darauf fällt die Unterbrecherflüssigkeit wieder zusammen und giebt, indem sie das System in sich schliesst, demselben Gelegenheit, sich oscillatorisch zu entladen. Das Abklingen dieser Schwingungen zeigt die Curve. Durch die über derselben erscheinende Stimmgabelcurve ist man in der Lage, bei bekannter Capacität die im System vorhandene Selbstinduction nach der Formel

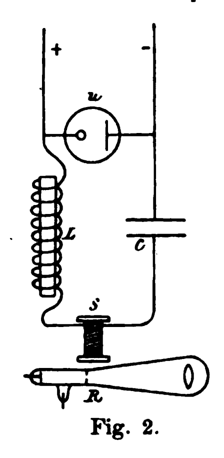


Fig. 2.

$$L = \frac{t^2}{4\pi^2 C}$$

zu berechnen (bez. umgekehrt).

Die in diesem Falle durchgeführte Berechnung ergab beispielsweise bei einem Condensator von 4 Mikrof. den Selbstinductionscoefficienten $L = 0{,}125$, während sich derselbe bei der gleichen Spule, aber ohne Eisen, nach der Maxwell'schen Methode gemessen zu 0,012 ergab. Nimmt man mit Ledeboer[1]) an, dass ein Eisenkern den Selbstinductionscoefficienten etwa um das Zehnfache (der Grössenordnung nach) erhöht, so würden sich beide Werthe in guter Uebereinstimmung befinden.

Fig. 7. *Wechselstromcurve.* Stromspender ist eine Gleichstrommaschine von der durch Schleifringe Wechselstrom abgenommen wird. Die Curve zeigt einen sehr rein sinoidalen Verlauf.

Figg. 8 und 9. *Umformung sinoidalen Wechselstromes in pulsirenden Gleichstrom mittels Graetz'scher Zellen.*[2])

Curve 8. Zellen in Hintereinanderschaltung. Die eine Phase des Wechselstromes ist nahezu vernichtet bis auf einen

1) Vgl. A. Heydweiller, Hülfsbuch elektr. Messungen p. 183. 1892.
2) L. Graetz, Wied. Ann. 62. p. 226. 1897.

kleinen Rest, welcher einen Ueberschuss der Maximalspannung über die Polarisationsspannung der Zellen darstellt. Die horizontalen Curvenstücke liegen ober- und unterhalb der Nulllinie, was sich ohne weiteres aus der Nachwirkung des jeweiligen Polarisationszustandes der Zellen erklärt.

Curve 9. Schaltung der Zellen in Form einer Wheatstone'schen Brücke. Es werden beide Phasen dargestellt, sodass der Wechselstrom die Form eines pulsirenden Gleichstromes annimmt. Es bleibt zu untersuchen, warum der Abfall steiler verläuft als der Anstieg.

Fig. 10. *Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.* Aufstellung von zwei Braun'schen Röhren in der oben beschriebenen Weise, die eine beeinflusst durch eine Spule in einem Stromkreis von hoher Selbstinduction und geringem Ohm'schen Widerstande, die andere durch eine Spule von hohem Widerstande. Die Spannungscurve (in der Abbildung die höhere) hat, da sie durch Stromablenkung, nicht durch Condensatorablenkung gewonnen wurde, allerdings gegen die wirkliche Spannungscurve eine geringe Phasen-Verschiebung; diese wird jedoch sehr gering sein, da W gross und L entsprechend klein gewählt wurde. Ausser der Nulllinie zeigt die Abbildung noch zwei durch Gleichstromablenkung erhaltene Aichungslinien, die untere der Stromcurve, die obere der Spannungscurve zugehörig. Da, wie in der Einleitung auseinandergesetzt, die Ausschläge proportional der Stromstärke sind, so lassen sich mit ihrer Hülfe maximale, effective und mittlere Stromstärken berechnen. Gemessen wurde beispielsweise mit Hitzdrahtinstrumenten:

$$J_{\text{effectiv}} = 0{,}6 \text{ Amp.},$$

$$E_{\text{effectiv}} = 16{,}0 \text{ Volt.}$$

Aus der Curve ergab sich mit Hülfe der Aichungsstriche die Maximalamplitude zu

$$J_{\max} = 0{,}85 \text{ Amp.},$$

$$E_{\max} = 22{,}63 \text{ Volt},$$

und hieraus berechnet

$$J_{\text{effectiv}} = 0{,}707. \quad J_{\max} = 0{,}599 \text{ Amp.,}$$
$$E_{\text{effectiv}} = 0{,}707. \quad E_{\max} = 15{,}99 \text{ Volt,}$$

was gut mit den Werthen der Hitzdrahtinstrumente übereinstimmt.

Resultat.

Die Braun'sche Röhre zeigt sich bei photographischer Fixirung ihrer Curvenbilder auch für Zwecke quantitativer Ausmessung von Strom- und Spannungscurven geeignet.

Charlottenburg, im November 1899.

(Eingegangen 7. November 1899.)

Namenregister zum Jahrgang 1899.

Z.

Berichtigung.

In der Abhandlung von Albert Neugschwender **Band 68**, p. 92 muss es am Anfange heissen:

„. . . ergab sich mir folgendes" statt „nur".

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



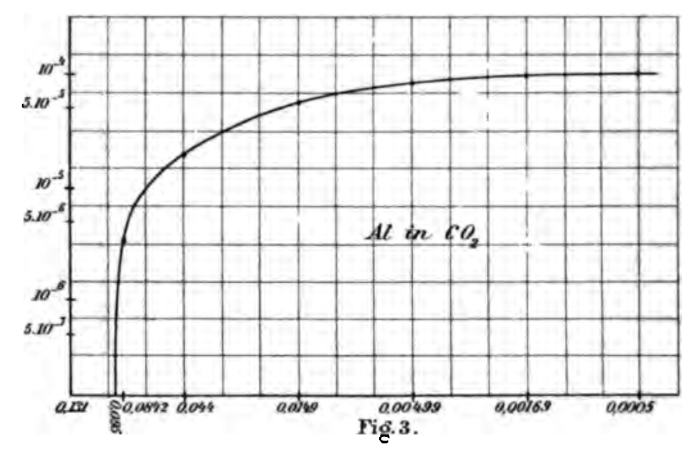


Fig. 3.

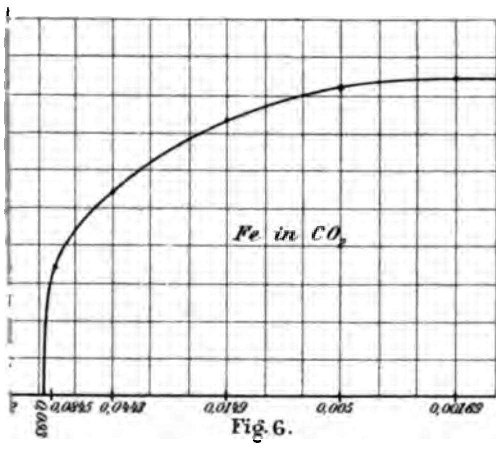


Fig. 6.

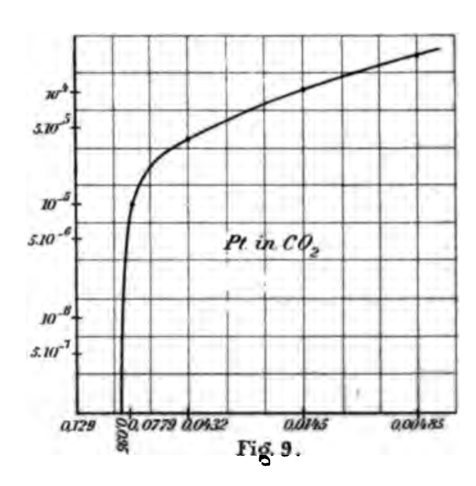
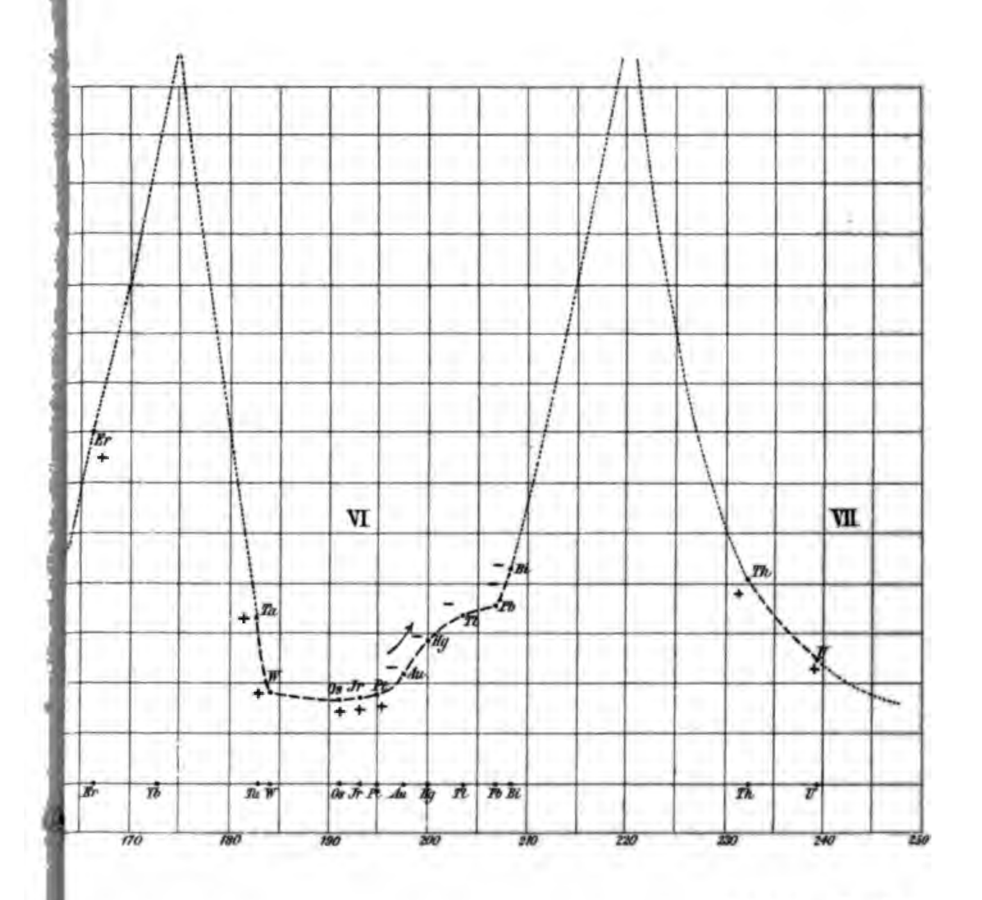


Fig. 9.

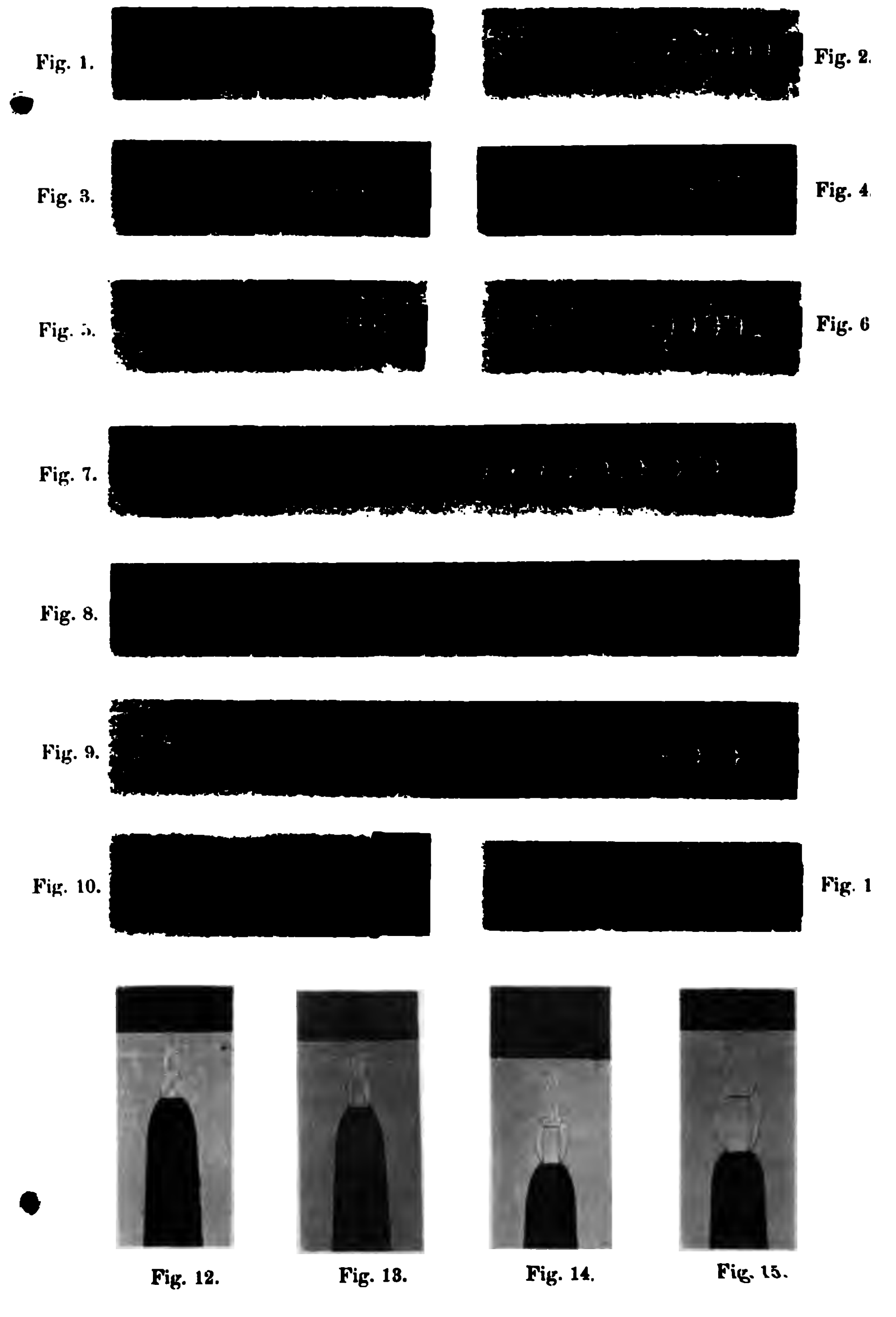
Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig.

Taf. II.



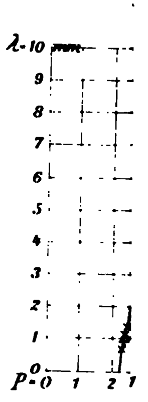
Lith. Anst. v. C. Kirst Leipzig

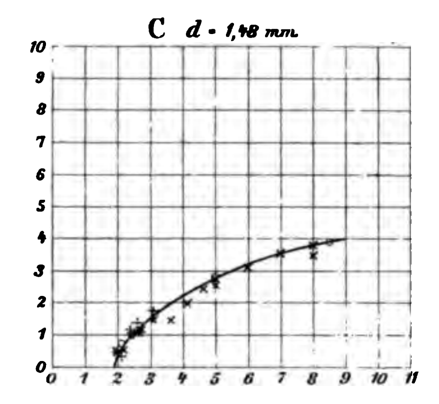


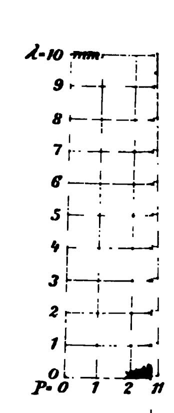

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 1
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

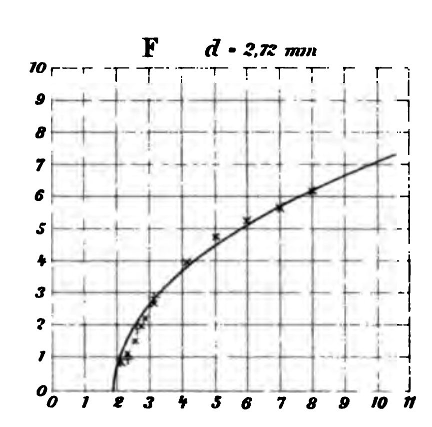
R. Emden.

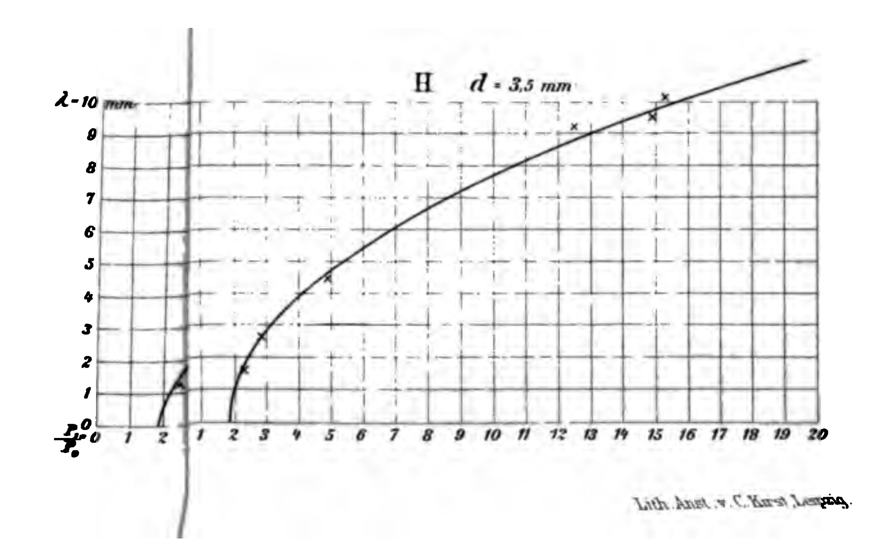












Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig.



$= 0{,}001$
$= (1 + 0{,}0$



Fig. 2.

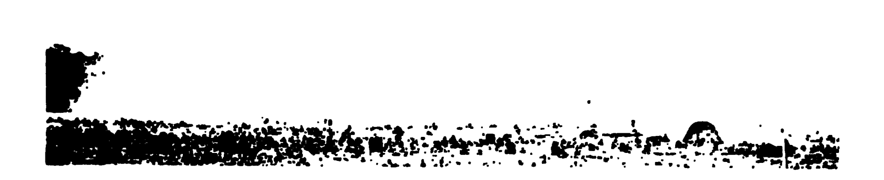


Fig. 1



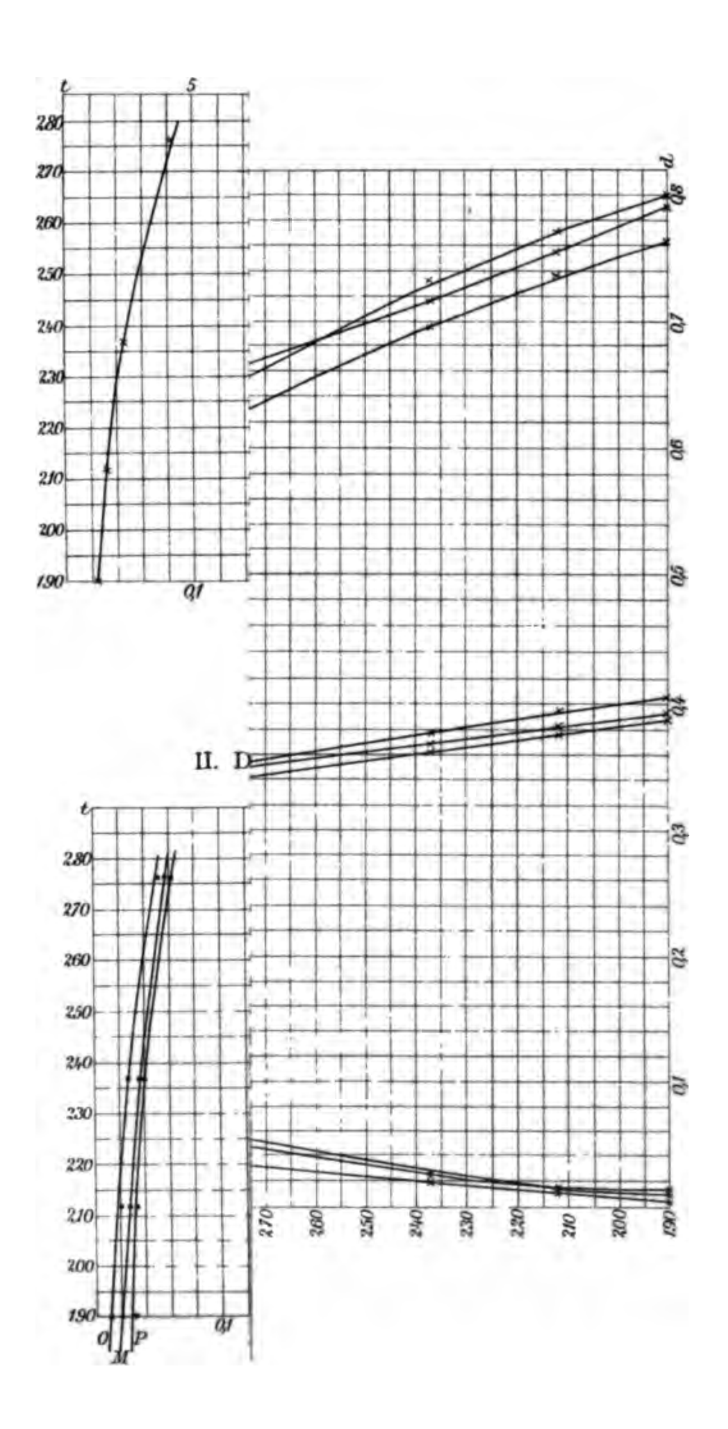
Fig. 4.

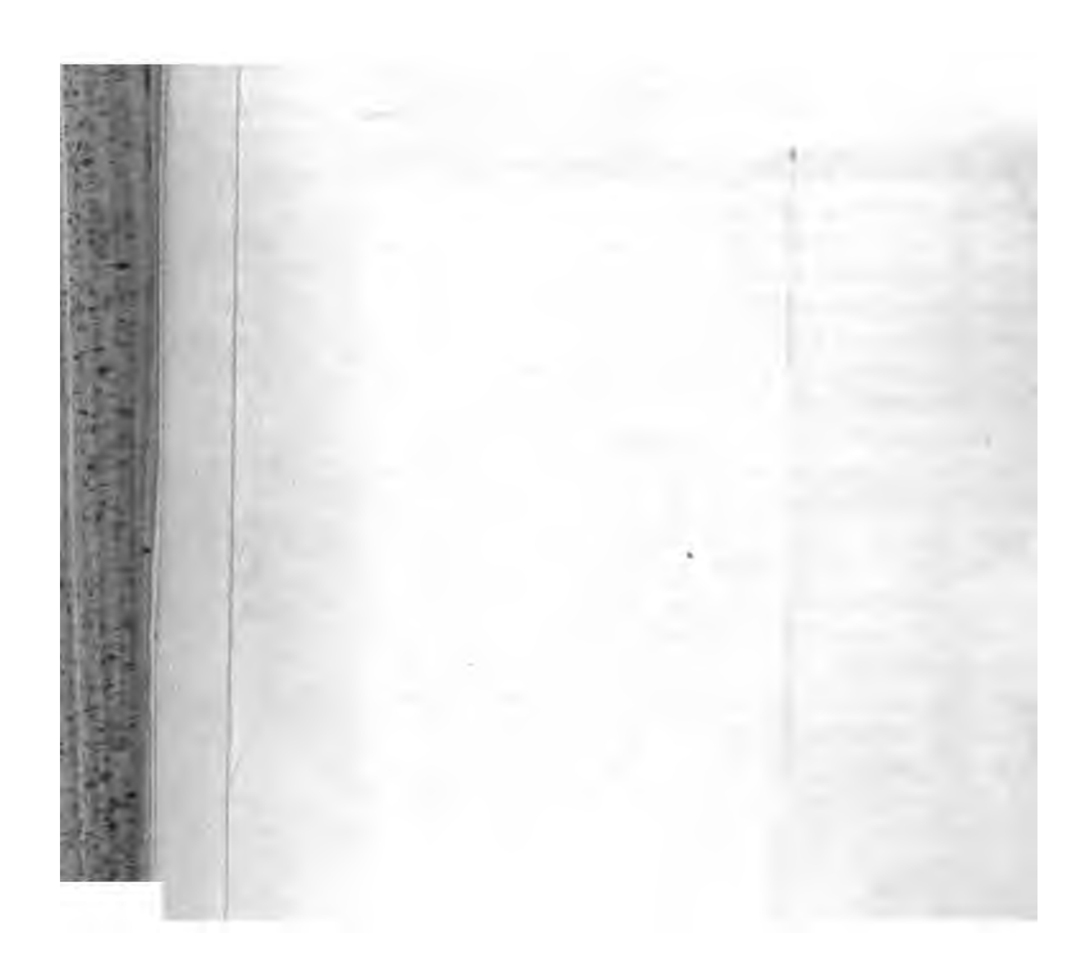


Fig. 3.



W. Wolff.


t
5
280
270
260
250
240
230
220
210
200
190
0,1
d
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
II. D
t
280
270
260
250
240
230
220
210
200
190
O
P
M
0,1
270
260
250
240
230
220
210
200
190



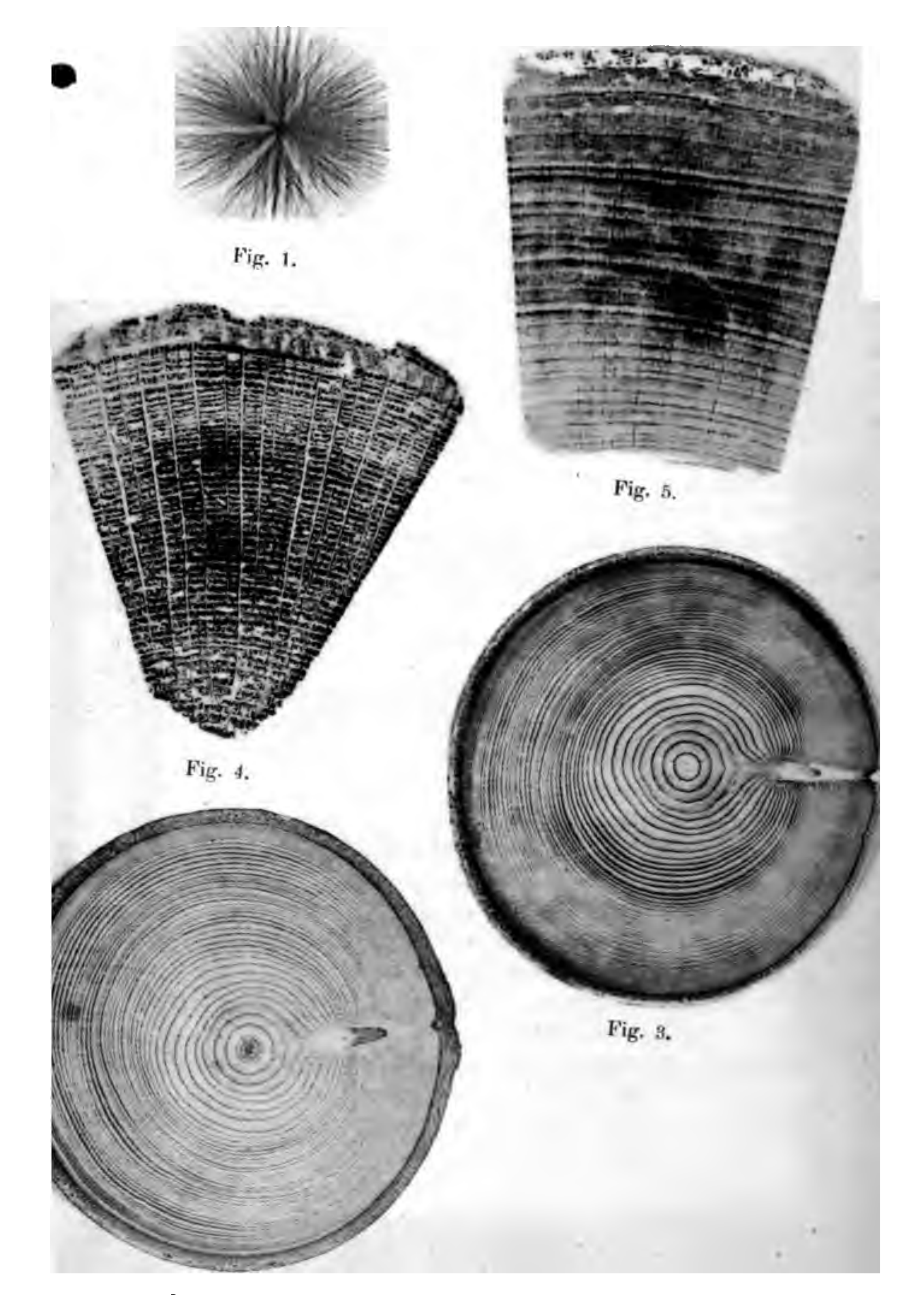


Fig. 1.

Fig. 5.

Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 2.

L. Fomm.




PHYSICS - MATH
530.5
A613
v.69
1899

